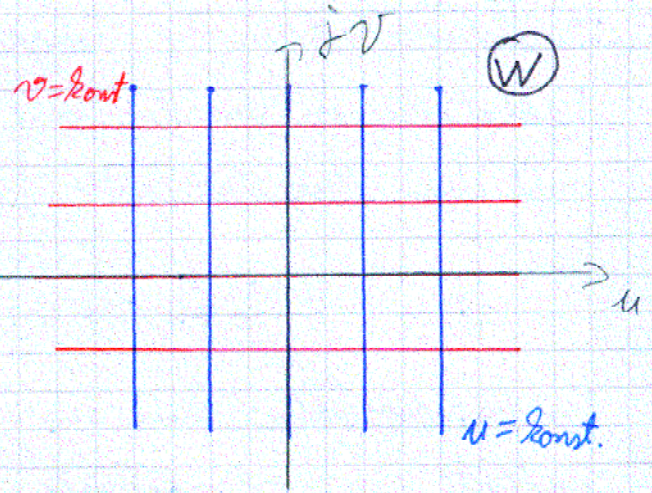
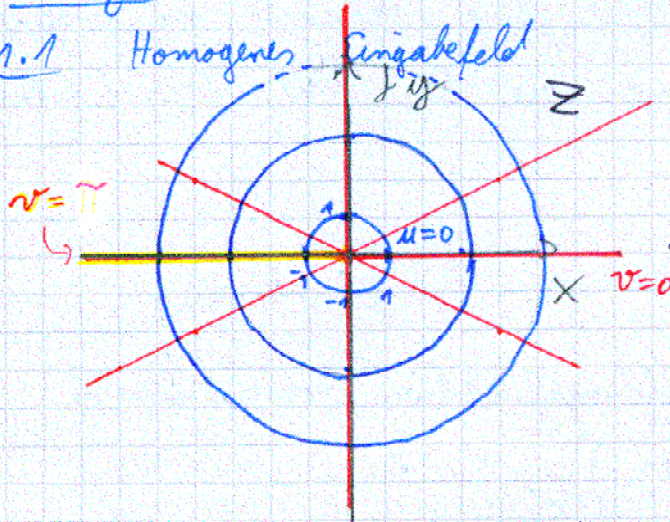


1. Aufg.: $Z = e^w$

1.1 Homogenes Eingangsfeld

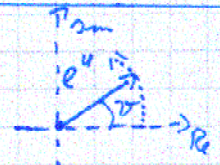


$Z = e^w$ mit $w = u + jv$ und $Z = x + jy$

$Z = e^{u+jv} = e^u \cdot e^{jv} = e^u \cdot (\cos v + j \sin v) = x + jy$
 $|Z| \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$
 $u = \frac{x}{\cos v} \Rightarrow \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = v$

u beliebig aber fest, v variabel: —

$Z = e^u \cdot e^{jv}$ beschreibt einen Kreis mit Radius e^u



v beliebig aber fest; u variabel: —

$Z = e^u \cdot e^{jv} \Rightarrow$ (Halb-)Geraden mit Winkel v zur Re-Achse

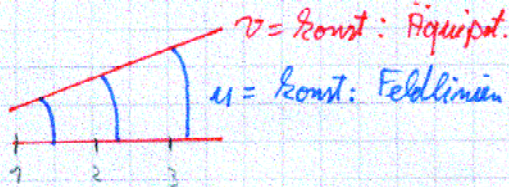
(Bsp: $v=0$: $x = e^u \cdot \cos 0 = e^u \cdot 1$ für $-d \leq u \leq d$)

$y = e^u \cdot \sin 0 = 0$ " " " "

$v=\pi$: „andere Hälfte“ der Geraden $v=0$ da $x = e^u \cdot \cos \pi = -e^u$)

1.2 Reale Probleme, die damit lösbar sind:

a)

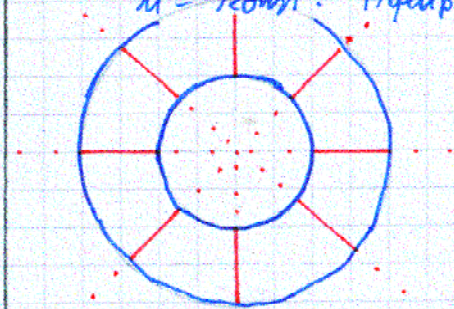


Mit eingeschränktem Wertebereich (z.B. $1 \leq x \leq 4$)

> PLATTENKOND mit schiefen Platten

> Flachsammelröhren unter einem best. Winkel v

b) $v = \text{konst.}$: Feldlinien
 $u = \text{konst.}$: Äquipot.



Zylinderkondensator

1.3 ges: $E_z = f(u, v)$, $f(x, y)$

E_w : Feldstärke ist in der Eingabeebene (w -Ebene) bekannt, der Homogenfeld. Feldstärke in der z -Ebene erhält man aus E_w durch Multiplikation mit dem Maßstabsfaktor $|E_z'|$:

$$|E_z| = |E_z'| \cdot |E_w| \quad \text{bzw.} \quad E_z = E_z' \cdot |E_w|$$

Der Maßstabsfaktor kann aus der Abbildungsfunktion berechnet werden und ist i. a. ortsabhängig d. h. von $\begin{cases} u, v & \text{in der } w\text{-Ebene} \\ x, y & \text{" " } z\text{-Ebene} \end{cases}$

(Allgemein:)

Formeln zur Berechnung von E_z' :

a) $\underset{\substack{\text{(konj.} \\ \text{kompl.)}}}{E_z'}^* = E_x - jE_y = -\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial v}{\partial x} \overset{\substack{\text{S. und Bornstein} \\ 3.4.5.2}}{=} -\frac{\partial w}{\partial z} = -\underbrace{\frac{1}{\frac{\partial z}{\partial w}}}_{*}$ $\overset{\text{eingeführt } \frac{dw}{dz}}{\text{}}$

b) $E_z' = E_x + jE_y = -\text{grad } u = -\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

c) $|E_z'| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}}$

Anwendung auf $z = e^w$: günstig Variante a)

Hier: $\underset{\substack{\parallel \\ x+jy}}{z} = e^w = e^{u+jv} = e^u (\cos v + j \sin v)$

H52 2.11-Blatt
zu 1.3

Hier günstig: Variante a), vor allem: *

$$\begin{aligned} E_z' = f(u, v) \Rightarrow E_z'^* &= - \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial w}} = - \frac{1}{e^w} = - e^{-w} = - (e^{-u} \cdot e^{-jv}) = - \frac{e^{-jv}}{e^u} \\ &= - \frac{1}{e^u} (\cos(-v) + j \sin(-v)) \\ &= - \frac{1}{e^u} (\cos v - j \sin v) = E_x - j E_y \end{aligned}$$

$\frac{\partial e^w}{\partial w} = e^w$

$E_z' = E_x' + j E_y'$
(multiplied by complex)

$$\Rightarrow E_x' = - \frac{1}{e^u} \cdot \cos v \quad E_y' = - \frac{1}{e^u} \sin v$$

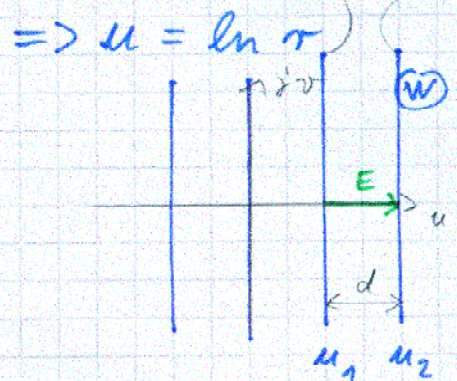
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{E_z' = f(u, v)}$$

• $E_z' = f(x, y):$

$$\begin{aligned} E_z'^* &\stackrel{a.a.}{=} - \frac{1}{\underbrace{e^w}_{z=e^w}} = - \frac{1}{\underbrace{z}} = - \frac{1}{x+jy} = \frac{-x}{x^2+y^2} + j \frac{y}{x^2+y^2} \\ \Rightarrow E_x' &= - \frac{x}{x^2+y^2} \quad E_y' = - \frac{y}{x^2+y^2} \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_{E_z' = f(x, y)} \end{aligned}$$

1.4 Zylinderkondensator $r_1 = 10 \text{ cm}$, $r_2 = 100 \text{ cm}$; $z = e^w$ — Plattenkond. in (w)
 ges: $\eta = \frac{|E_{\text{hom}}|}{|E_{\text{max}}|}$ $\rightarrow z$ -Ebene

Log: $z = e^w = e^{u+iv} = \underbrace{e^u}_{r} \cdot \underbrace{e^{jv}}_{\text{Winkel}}$
 Betrag Phase



$\Rightarrow u_1 = \ln r_1$ und $u_2 = \ln r_2$

mit $|E_w| = \frac{U}{u_2 - u_1} = \frac{U}{\ln(r_2) - \ln(r_1)}$
 $E = \frac{U}{d}$
 Abstand
 Feld
 in (w)

Nun nach z -Ebene: ($E_{z \text{ max}}$ tritt am Zylinderkond bei r_1 auf.)

Da $|E_z| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{|z|} \Big|_{\text{max}} = \frac{1}{r_1}$

$\Rightarrow |E_{z \text{ max}}| = \frac{1}{|z|} \cdot |E_w| = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{U}{\ln r_2 - \ln r_1}$

mit $|E_z| = |E_z'| \cdot |E_w|$

und $|E_{z \text{ hom}}| = \frac{U}{r_2 - r_1}$ $\Rightarrow \eta = \frac{|E_{\text{hom}}|}{|E_{\text{max}}|} = \frac{r_1 \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{r_2 - r_1} = 0,256$
Schlagweite

1.5 Zeichnen Sie das Feld von $z = e^w + 0,25w$; Welcher Wertebereich ist sinnvoll u, v

Da $w = u + jv$: $z = e^u \cdot e^{jv} + \frac{1}{4}(u + jv) = e^u \cos v + j e^u \sin v + \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}jv$
 $= e^u \cos v + \frac{u}{4} + j(e^u \sin v + \frac{v}{4}) = x + jy$

Einige Werte ausrechnen:

	$v=0$		$v=\frac{1}{5}\pi$		$v=\frac{2}{5}\pi$	
u	x	y	x	y	x	y
-13						
-12						
-10						
...						
0						
...						

$x = e^u \cos v + \frac{u}{4}$
 $y = e^u \sin v + \frac{v}{4}$