

Übungsaufgabe:

1.7 In einem Reaktionszeitversuch  $V$  seien folgende Ereignisse von Interesse:  $A$  = „Die Reaktionszeit ist größer oder gleich 3 Sekunden“,  $B$  = „Die Reaktionszeit ist nicht größer als 5 Sekunden“,  $C$  = „Die Reaktionszeit ist größer als 7 Sekunden“,  $D$  = „Die Reaktionszeit liegt zwischen 3 und 5 Sekunden (einschließlich 3 und 5)“.

- Stellen Sie  $A, B, C, D$  als Mengen dar!
- In welcher Relation stehen  $A$  und  $C$  zueinander?
- Stellen Sie  $D$  aus  $A$  und  $B$  unter Verwendung von Mengenoperationen dar!
- Welches Ereignis wird durch die Menge  $A \setminus C$  beschrieben? Geben Sie die Menge an!
- Geben Sie alle Paare disjunkter Ereignisse an, die sich aus  $A, B, C$  und  $D$  bilden lassen!

$]0,5]$   
 $($

$$A = \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t \geq 3\}$$

$$B = \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t \leq 5\} = (0, 5]$$

$$C = \{t \in \mathbb{R}^+ \mid t > 7\}$$

$$D = [3, 5]$$

$$b) C \subset A$$

$$c) D = A \cap B$$

$$d) A \setminus C = [3, 7]$$

$V, Z$  sind disjunkt

$$\Downarrow$$
$$V \cap Z = \emptyset$$

$$C \cap B = \emptyset$$

$$C \cap D = \emptyset$$

Übungsaufgabe:

1.9\* Sei  $V$  der zufällige Versuch „Zweimaliger Münzwurf“. Ein Versuchsausgang sei durch das Paar  $\omega = (M_1, M_2)$ ,  $M_i \in \{K, Z\}$ , beschrieben ( $M_i$ : Ergebnis des  $i$ -ten Wurfes,  $i=1,2$ ).

a) Geben Sie  $\Omega$  an!

b) Geben Sie  $\mathcal{P}(\Omega)$  an!

c) Beschreiben Sie die Ereignisse  $A = \{(K,K), (Z,K)\}$ ,  $B = \{(K,K), (Z,Z)\}$ ,  $C = \{(K,K), (Z,K), (K,Z)\}$  in Worten!

$$\Omega = \{(k,k), (k,z), (z,k), (z,z)\}$$

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = 4 \cdot 2^4 \quad |\Omega| = 4$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\emptyset, \Omega,$$

$$\{(k,k)\}, \{(k,z)\}, \{(z,k)\}, \{(z,z)\}$$

4 Elementarereignisse

$$\{(k,k), (k,z)\}, \{(k,k), (z,k)\},$$

$$\{(k,k), (z,z)\}, \{(k,z), (z,k)\},$$

$$\{(k,z), (z,z)\}, \{(k,z), (z,z)\},$$

$$\{(k,z), (z,z)\}, \{(z,k), (z,z)\},$$

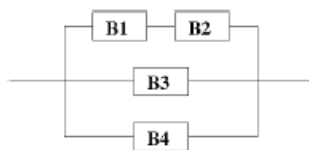
$$\{(k,k), (k,z), (z,k)\}, \{(z,k), (z,z)\},$$

Mindestens einer Kopf  
 ...

Übungsaufgabe:

Sei  $B_i$  das Ereignis "Bauelement  $B_i$  ist O.K.",  $i = 1, \dots, 4$ .

$G$  sei das in folgender Skizze dargestellte Gerät:



Das Gerät funktioniert, wenn mindestens eine Reihe funktioniert. Eine Reihe funktioniert, wenn alle Bauelemente der Reihe funktionieren.

Stellen Sie mit Hilfe der Ereignisse  $B_i$  und den Mengenoperationen  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\setminus$ , sowie Komplementbildung folgende Ereignisse dar:

- $A =$  "Das Gerät ist O.K."
- $B =$  "Nur  $B_1$  und  $B_2$  sind O.K, die anderen Bauelemente nicht."
- $C =$  "Genau 2 Reihen des Gerätes funktionieren."
- $D =$  "Mindestens ein Bauelement ist O.K."
- $E =$  "Mindestens ein Bauelement ist defekt."
- $F =$  "Wenigstens ein Bauelement ist O.K."

a)  $(B_1 \cap B_2) \cup B_3 \cup B_4$

$A = (B_1 \cap B_2) \cup B_3 \cup B_4$

Menge

Aussagen

$$\begin{aligned} d) \quad F = & (\overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \wedge \overline{B_3} \wedge \overline{B_4}) \\ & \cup (B_1 \wedge \overline{B_2} \wedge \overline{B_3} \wedge \overline{B_4}) \cup \\ & \cup (\overline{B_1} \wedge B_2 \wedge \overline{B_3} \wedge \overline{B_4}) \cup \\ & \cup (\overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \wedge B_3 \wedge \overline{B_4}) \cup \\ & \cup (\overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \wedge \overline{B_3} \wedge B_4) \end{aligned}$$

$$b) B = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} = \\ = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3 \cup B_4}$$

$$c) C = (B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) \cup \\ \cup (B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap B_4) \cup \\ \cup (\overline{B_1 \cap B_2} \cap B_3 \cap B_4) \\ = \overline{B_1 \cap B_2} \cup B_3 \cup B_4$$

$$d) \overline{D} = \text{"kein BEI\$T OK"} \\ = \overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4}$$

$$D = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

$$e) E = \overline{B_1} \cup \overline{B_2} \cup \overline{B_3} \cup \overline{B_4}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wie groß ist die Chance, dass ein bestimmtes Ereignis A eintritt?

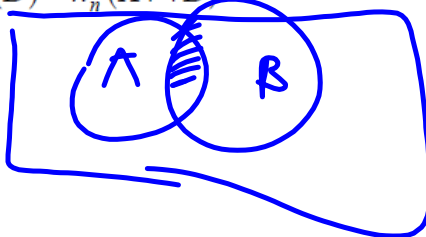
Idee: "n-mal der Versuch zu wiederh.  
z.B. 2-mal werfen 100 mal  
(K, K) 20 mal

$$P_n(A) = P_{100}((K, K)) = \frac{20}{100}$$

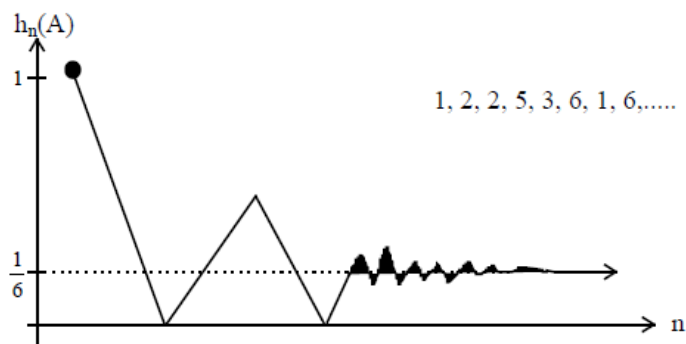
Problem:  $n_n$  liegt von  
Anzahl der Versuche und von  
Zufall ab. ↙

**Eigenschaften der relativen Häufigkeit:**

1.  $0 \leq h_n(A) \leq 1$ ,  $h_n(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$ ,  $h_n(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$  (Normiertheit)
2.  $A \subseteq B \Rightarrow h_n(A) \leq h_n(B)$  (Monotonie)
3.  $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) - h_n(A \cap B)$  (Additivität)



Würfeln  $A = \{6\}$



$$h_n(\{6\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p = \frac{1}{6}$$



Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit

$$|\Omega| = \infty \rightarrow |\mathcal{E}(\Omega)| = \infty$$

**Def.:** Sei  $V$  ein zufälliger Versuch mit der Ereignismenge  $\Omega$  und sei  $\mathcal{P}(\Omega) = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$  das Ereignisfeld zu  $V$ . Dann heißt jede Abbildung  $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$  Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{P}(\Omega)$ , falls  $P$  folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$  (Normiertheit)
2.  $A \subseteq B \rightarrow P(A) \leq P(B)$  (Monotonie)
3.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  (Additivität)
4.  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ , falls  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  ( $\sigma$ -Additivität)

Klassische WS:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\#(\text{günstige Ereignisse})}{\# \text{ mögl. Ereignisse}}$$

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

(Chance : 0%  $\leftrightarrow$  100%)

$$P(\emptyset) = 0 \quad \text{unmögliches Er.}$$

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{sicheres Ereignis}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A = "gerade Zahl" 1-mal Würfeln

B = "2 oder 4"  $P(A)$

1-mal Würfeln:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{2, 4, 6\} \quad |\Omega| = 6 \quad |A| = 3 \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{2, 4\} \quad |B| = 2 \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

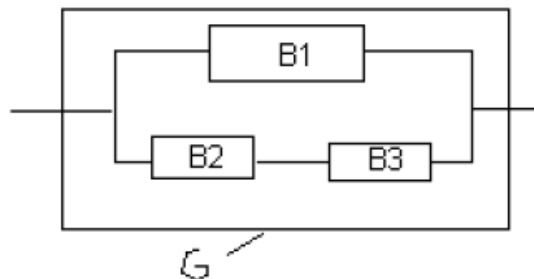
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) = \frac{1}{2}$$

Beispiel:

Sei  $B_i$  das Ereignis  $B_i =$  „Bauelement  $B_i$  ist O.K“,  $i=1, \dots, 3$ .

G sei das in folgender Skizze dargestellte Gerät:



- Das Gerät funktioniert, wenn mindestens eine Reihe funktioniert.
- Eine Reihe funktioniert, wenn alle Bauelemente der Reihe funktionieren.

Es sei folgendes bekannt:

- 5 % aller Bauelemente vom Typ  $B_1$  sind defekt
- bei 90% aller Geräte sind sowohl  $B_2$  als auch  $B_3$  OK
- bei 87% aller Geräte sind alle 3 Bauelemente  $B_1, B_2, B_3$  OK.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass G funktioniert und wieviel % aller Geräte sind defekt?

$$P(B_1) = 0,95$$

$$P(B_2 \cap B_3) = 0,9$$

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = 0,87$$

$$G = B_1 \cup (B_2 \cap B_3)$$

$$P(G) = P(B_1 \cup (B_2 \cap B_3)) =$$

$$= P(B_1) + P(B_2 \cap B_3) -$$

$$- P(B_1 \cap \cancel{B_2 \cap B_3}) =$$

$$= 0,95 + 0,9 - 0,87 =$$

$$= 0,98$$

Übungsaufgabe:

*Beispiel:* Die Hochbegabung von Kindern einer bestimmten Alterstufe wird mit zwei Testverfahren ermittelt. bestehen die Kinder beide Tests, so werden sie als hochbegabt eingestuft. Es sei bekannt, dass 1 % der Kinder der betrachteten Altersstufe Test 1 (T1) besteht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind den zweiten Test (T2) besteht, ist 0,02. Insgesamt bestehen 99% weder den ersten noch den zweiten Test. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Kind als hochbegabt eingestuft?

Übungsaufgabe:

- 1.12\* Bei der Herstellung eines Produktes treten 2 Fehler  $F_1$ =“nicht maßhaltig“ und  $F_2$ =“nicht funktionsfähig“ mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(F_1)=0,01$  und  $P(F_2)=0,02$  ein. Mit mindestens einem Fehler behaftet sind insgesamt 0,5 % aller Produkte. Ein Produkt ist nur dann verkäuflich, wenn es keinen der beiden Fehler besitzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Produkt verkäuflich?

Übungsaufgabe:

- 1.13\* In deutschsprachlichen e-mails tritt das Wort „Viagra“ mit der Wahrscheinlichkeit 0,01 auf. Das Wort „Rolex“ tritt in 2 % aller Fälle auf. Mit mindestens einem dieser beiden Worte sind 2,5 % aller e-mails behaftet. Eine e-mail wird nur dann nicht als spamverdächtig klassifiziert, wenn sie keines der beiden Worte enthält. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine e-mail nicht als spamverdächtig eingestuft?

Wo bekommen wir diese gegebenen Wahrscheinlichkeiten her?

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- in Glücksspielen oder Laplace-Versuchen:  
Wahrscheinlichkeiten können exakt als Chance des Eintretens von A bei Durchführung von V ermittelt werden
- die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  kann mit Hilfe der beobachteten relativen Häufigkeit  $h_n(A)$  abgeschätzt werden:  
  
-> Stabilität der relativen Häufigkeit

Es gilt:  $\text{stoch} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(A) = P(A)$  (Stochastische Grenzwertbegriff)



- $P(A) = 1/6$

->  $P(A)$

- $P(A) = 1/6 \sim 0,167$  bedeutet auch,

->  $P(A)$

Umgekehrt liefert eine beobachtete relative Häufigkeit einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses. Je größer dabei  $n$  ist, desto genauer ist dieser Schätzwert für  $P(A)$ .

## Klassische Wahrscheinlichkeit

**Def.:** Sei  $V$  ein zufälliger Versuch. Wenn für die Menge  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  aller Elementarereignisse gilt:

1.  $|\Omega| = m < \infty$  ( $\Omega =$  endlich)
2.  $P(\{\omega_i\}) = p \forall i = 1 \dots m$  (alle  $\{\omega_i\}$  sind gleichwahrscheinlich)

dann heißt  $V$  *Laplace-Versuch*. (Laplace-Versuche: typisch für Glücksspiele)

**Satz:** Sei  $V$  ein Laplace-Versuch,  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  und sei  $A \subseteq \Omega$  mit  $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_l}\}$  ( $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ). Dann gilt:

1.  $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{m} \forall i = 1, \dots, m$
2.  $P(A) = l : m = \frac{|A|}{|\Omega|}$  (Chance für das Eintreten von A)

