Regeln der Laplace-Transformation

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$s > k$

Bsp: 1:

$$\sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F_{\sin(t)}(s) = \mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}, \quad s > 0$$

Aber: Bsp 2:

$3\,\mathrm{sin}(t) + 4t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; ?$

Satz 1 (Linearitätssatz):

Vor.: $f_1(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F_1(s)$, $s \in D_1$

$f_2(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F_2(s)$, $s \in D_2$

Bel.: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:

$f(t) = a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)$

$\int$

$F(s) = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$,

$s \in D = D_1 \cap D_2$

Zum Bsp 2.

$3 \cdot \sin t + 4 \cdot t$

$\sin t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2+1}, \quad s>0$

$t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2}, \quad s>0$

$3 \cdot \sin t + 4t$



$3 \frac{1}{s^2+1} + 4 \frac{1}{s^2}, \quad s>0$

Bsp 3 !

$f(t) = 2 \cdot \sin(t) - 3e^{+4t}$

$\mathcal{L}$

$F(s) = 2\frac{1}{s^2+1} - 3\frac{1}{s-4}$

$s > 0$ $s > 4$

$D_F = (4, +\infty) \ni s$

D_F ! $s > 4$

$s \in (4, +\infty)$

$$T_f(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\forall k \quad f^{(k)}(x_0) \in \mathbb{R}$ Zahlen $\quad a_k = f^{(k)}(x_0)$

$x_0 = 0:$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{x^k}{k!} = f(x)$

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$?

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \mathcal{L}\left\{\frac{t^k}{k!}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \mathcal{L}\{t^k\} \quad (*)$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = ?$$

Tabelle:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \; s>0$$

$$\left.\begin{array}{l} n-1 = k \\ n = k+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{t^k}{k!} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^{k+1}}$$

$$t^k \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}, \; s>0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot \mathcal{L}\{t^k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{k!}{s^{k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}}, \quad s > 0$$

Satz (Dämpfungssatz)

Eine Dämpfung (Stärkung) im Zeitbereich ergibt eine Verschiebung nach links (rechts) im Bildbereich.

Vor: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_{f(t)}(s)$, $s > k$

Beh: $g(t) = f(t) \cdot e^{-at}$

$\circ$

$G(s) = F_{f(t)}(s+a)$, $a > 0$

$\left(h(t) = f(t) \cdot e^{at}, \; a > 0 \right.$

$\circ$

$H(s) = F_{f(t)}(s-a)$

$s > k+a$

Bew! Es gilt.

$$G(s) \overset{\text{Def}}{=} \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-at} \cdot e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{-(a+s)t}\, dt =$$

$$s^* := a+s, \quad a>0$$

$$\downarrow$$

$$s^* > s > k$$

$$= \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s^* t} \, dt =$$

Def

$$= F_{f(t)}(s^*) =$$

$$= F_{f(t)}(s+a), \quad a > 0$$

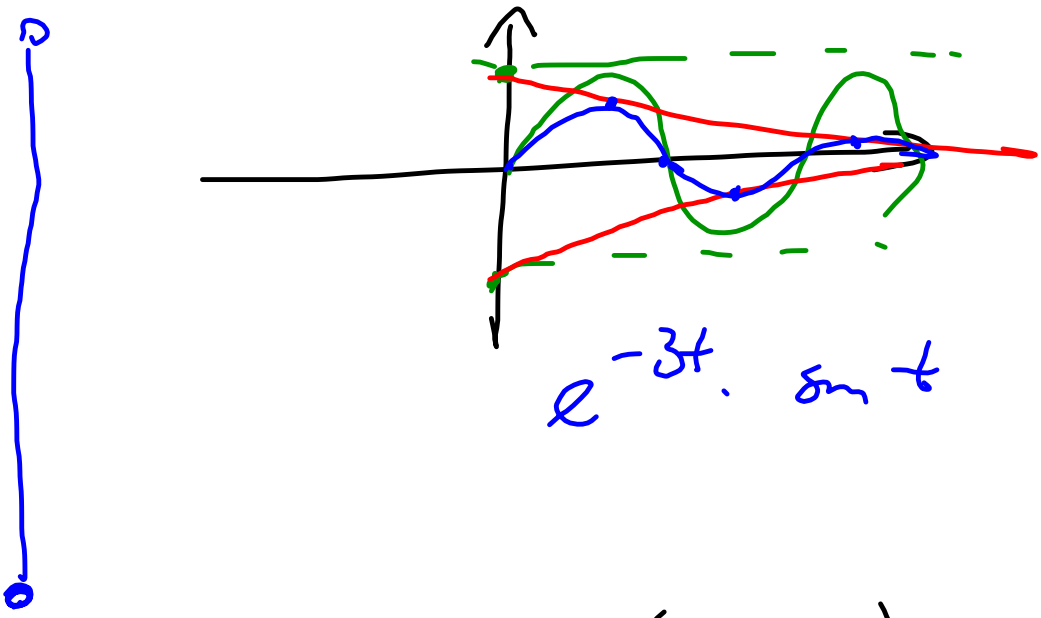
$$s > k$$

$$((s+a) > k)$$

q.e.d

Bsp!

$$g(t) = e^{-3t} \cdot \sin(t)$$



$$G(s) = F_{\sin(t)}(s+3) \quad (=)$$

$$\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}, \quad s>0$$

$$(=) \frac{1}{(s+3)^2+1}$$

Вар 1:

$$g(t) = e^{-2t}\cos t + 2e^{t}\cdot t^2$$

$$G(s) \overset{\text{Lin.}}{=} \mathcal{L}\{e^{-2t}\cos t\} + 2\mathcal{L}\{e^{t}\cdot t^2\} =$$

Дифф.

$$= F_{\cos(t)}(s+2) + 2F_{t^2}(s-1) =$$

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$= \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{(2\cdot 2!)=4}{(s-1)^3}$$

$$s > 1$$

Satz 3 (Verschiebungssatz):

(Eine Verschiebung von $f(t)$ nach rechts bewirkt eine Dämpfung von $F(s)$)

Vor.: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$,

$a > 0$

Beh.: $g(t) = f(t-a)$

$$\downarrow$$

$$G(s) = e^{-as} \cdot F(s)$$

Bew!

$$G(s) = \int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_a^\infty g(t-a)\, e^{-st}\, dt =$$

Substitution:

$u := t - a$

$du = dt$

$t: a \longrightarrow \infty$

$u: a - a = 0 \longrightarrow \infty - a = \infty$

$$= \int_0^\infty f(u)\, e^{-(u+a)s}\, du =$$

$$= \int_0^\infty f(u)\, e^{-us} \cdot e^{-as}\, du =$$

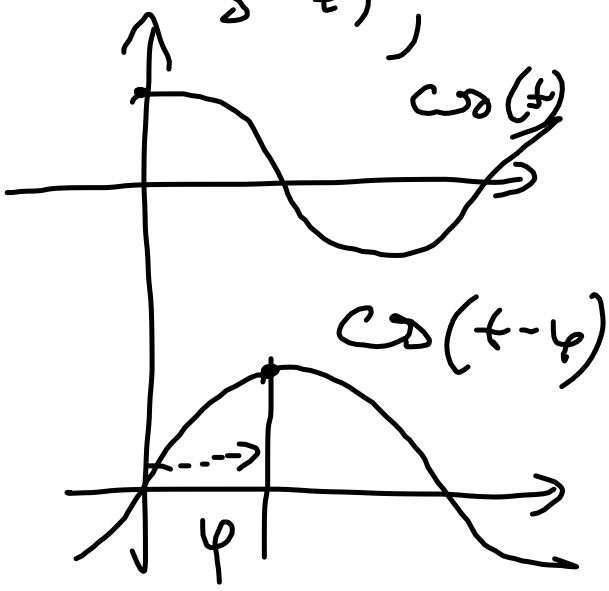
$$= e^{-as} \int_0^\infty f(u)\, e^{-us}\, du =$$

def.

$$= e^{-as} \cdot F(s) \quad , \text{ q.e.d.}$$

Вар!

$\cos t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+1}, \quad \delta > 0$



$\varphi > 0$

$g(t) = \cos(t - \varphi)$



$G(s) = e^{-\varphi s}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$

Satz: (Verschiebung nach links):

Vor: $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$

Bed: $a > 0$:

$g(t) = f(t+a)$

$$G(s) = e^{as} \cdot F(s) - e^{as} \int_0^a f(t) e^{-st} dt$$

ohne Bew.

Satz: Ähnlichkeitssatz

23.1.14

Wenn $f(t) \circ\!\!-\!\!\circ F(s)$,

so gilt:

$$f(\omega t) \circ\!\!-\!\!\circ \frac{1}{\omega} F\left(\frac{s}{\omega}\right)$$

$$\forall\, \omega > 0$$

Bew.: LeA

Bsp: $\cos(2t) = f(t)$

$$f(t) = \cos t \circ\!\!-\!\!\circ \frac{s}{s^2+1}$$

$$\cos(\omega t) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{\omega} \frac{(s/\omega)}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{\frac{s}{\omega^2}}{\frac{s^2}{\omega^2} + 1} =$$

$$= \frac{s/\omega^2}{\frac{s^2 + \omega^2}{\omega^2}} =$$

$$= \frac{s}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\cos 2t \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{s}{s^2+4}$$

$$\cos(\omega t) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Satz 5 : (Differentiationssatz)

Wenn $f(t) \bullet\!\!-\!\!\circ F(s)$,

so gilt:

$$f'(t) \bullet\!\!-\!\!\circ sF(s) - f(0)$$

$$f''(t) \bullet\!\!-\!\!\circ s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$f'''(t) \bullet\!\!-\!\!\circ s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(t) \bullet\!\!-\!\!\circ s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-1-k)} \cdot f^{(k)}(0)$$

Beh. durch Vollständige Induktion (nA).

Anfangswertproblem

Bsp:

AWP : DGL + AB

$$y''(t) - 3y'(t) + y(t) = e^{-t}$$

2-Ordnung:

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = 0$$

(2 Anfangsbedg.)

Lineare Gl. (weil Linearkombination der unbekannten Funktion $y(t)$ und deren

Ableitungen:

$y(t) \bullet\!\!-\!\!\circ\, Y(s)$

$y'(t) \bullet\!\!-\!\!\circ\, sY(s) - y(0)$

$y''(t) \bullet\!\!-\!\!\circ\, s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$

$y'' - 3y' + y = e^{-t}$

$\mathcal{L}$

Linearität von $\mathcal{L}$:

$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$

Ableitungssatz:

$$\underbrace{\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right]}_{y''(t)} - 3\underbrace{\left[\left(sY(s) - y(0)\right)\right]}_{y'(t)} + Y(s) = \left[\frac{1}{s+1}\right]$$

$y(t)$

$e^{-1\cdot t}$

$\Rightarrow$ Algebraische Gleichung im Bildbereich:

$(y(0) = y'(0) = 0)$

$$s^2 Y(s) - 3s\,Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$\Leftrightarrow$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 - 3s + 1)}$$

4.4 Methoden der Rücktransformation

Gegeb: $F(s)$

Gesucht: $f(t)$

4.4.1 Verwendung der Tabelle

Bsp: $F(s) = \frac{4}{s^3} + \frac{(s+1)}{(s+1)^2+4}$

① Linearität, Dämpfungssatz

$4 \cdot \frac{t^2}{2!} + e^{-t}\cos(2t) =$

$= 2t^2 + e^{-t}\cos(2t)$

$$\frac{1}{s^3} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{t^2}{2!} \qquad 2! = 1 \cdot 2$$

$$\frac{4}{s^3} \bullet\!\!-\!\!\bullet \frac{4t^2}{2!} = 2t^2$$

$$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + b^2} \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) = e^{-at}\cos(bt)$$

$a = 1, \; b = 2$

4.4.2. Rücktrafo durch PBZ

(Partial Bruch Zerlegung)

$$F(s) = \frac{P_m(s)}{P_n(s)}, \quad n > m$$

$\Rightarrow$ PBZ:

(1) LPZ von $P_n(s)$

LF: $(x-a)$, $(x-a)^k$, (x^2+cx+d), $(x^2+cx+d)^\ell$

wobei x^2+cx+d keine reelle Nullstelle hat;

$$P_n(s) = (x-x_0)^{k_0} \cdot (x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+c_1x+d_1)^{\ell_1} \cdot (x^2+c_2x+d_2)^{\ell_2} \cdot \ldots$$

(2)

$$F(s) = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{C_{11} + D_{11}x}{x^2 + c_1 x + d_1} +$$

$$+ \frac{C_{12} + D_{12}x}{(x^2 + c_1 x + d_1)^2} + \dots$$

$$\dots$$

(3) Koeffizienten bestimmung durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzen der Werte

Bsp:

$$F(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s-1)^2}$$

Grad (Zähler) = 1 < 3 = Grad (Nenner)

$\Rightarrow$ PBZ:

1. Ltr des Nenners:

$(s+2)(s-1)^2$ ist schon zerlegt.

2. Ansatz für die PBz.

$s_1 = -2$ (einfache Nullstelle)

$s_{2,3} = 1$ (doppelte NS)

Ansatz!

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)^2} =$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

3. Schritt: A, B, C berechnen:

$$\frac{s+1}{(s+2)(s-1)^2} = \frac{A(s-1)^2 + B(s-1)(s+2)}{(s+2)(s-1)^2}$$

Hauptnenner

$$\frac{C(s+2)}{(s+2)};$$

"Zwei Brüche sind gleich, wenn Nenner und beide Zähler gleich sind"

$(s+1) = A(s-1)^2 + B(s-1)(s+2) + C(s+2)$

3 Werte einsetzen:

(Wel Fs gilt, dass auch für 3 spezielle)

Z.B.: $s_1 = 1$, $s_2 = -2$,

$s_3 = 0$

(freie Wahl!)

$s_1 = 1$:

$1+1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 3$

$3 \cdot C = 2 \Rightarrow C = 2/3$

$s_2 = -2$:

$-1 = 9 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{9}$

$\underline{s_3 = 0}$:

$$1 = A - 2B + 2C$$

$$B = \frac{1 - A - 2C}{-2};$$

m.d $A = -\frac{1}{9}$, $C = 2/3$

$$\Rightarrow B = \frac{1 + 1/9 - 12/9}{-2} = \frac{1}{9}$$

Also!

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{9} \cdot \left[\frac{1}{s+2}\right] + \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{1}{s-1}\right] +$$

$\left[\frac{1}{s+2}\right]$: 2 → e^{-2t}

$\left[\frac{1}{s-1}\right]$: 0 → e^{t}

$$+ \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$$

$\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$: 0 → te^{t} (Dämpfung oder Ableitung)

$$F(s) \circ\!\!-\!\!\bullet\; f(t) =$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{t} +$$

$$+ \frac{2}{3} t e^{t}$$

Ein Vorbereitungsübungstermin (vor der Klausur) wird zusätzlich bekanntgegeben, vor. 20.02. oder 21.02.

ZUR KLAUSUR :

Wann:

24.02.2014 um 9 Uhr

Wo:

R. 8025 Campus Alt-Saarbrücken

Zugelassene Mittel:

ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner; Tabellen zur Laplace- und Fourier-Transformation (NUR die von der Vorlesungsseite bzw. von der Seite von Fr. Prof. Grabowski runtergeladene Tabellen L1 und L2 sowie F); 2 handbeschribene DIN A4 Blätter (max. 4 Seiten).