

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Die Faltung zweier auf \mathbb{R} definierter Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verifizieren Sie den Faltungssatz der kontinuierlichen Fouriertransformation für die Funktionen

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Wenn wir eine Faltung mit einer Boxfunktion oft iterieren und geeignet reskalieren, treffen wir einen alten Freund: die Gaußfunktion. Bereits wenige Iterationen stellen eine gute Approximation dar.)

Aufgabe 2

Für komplexwertige Vektoren $f = (f_i)_{i=0}^{M-1}$ und $g = (g_i)_{i=0}^{M-1}$, $M \in \mathbb{N}$ definiert man das hermitesche Skalarprodukt von f und g als $\langle f, g \rangle := \sum_{m=0}^{M-1} f_m \bar{g}_m$.

Zeigen Sie: Bezüglich dieses Skalarprodukts bilden die M Vektoren

$$v_p := \frac{1}{\sqrt{M}} \left(\exp\left(\frac{2\pi ip0}{M}\right), \dots, \exp\left(\frac{2\pi ip(M-1)}{M}\right) \right)^T$$

mit $p = 0, \dots, M-1$ eine Orthonormalbasis des M -dimensionalen komplexen Raums.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Fouriertransformation des verrauschten Stufensignals

$$f = (6, 4, 5, 6, 1, 0, 2, 0)^T.$$

Entfernen Sie die drei höchsten Frequenzanteile und führen Sie die Fourierreücktransformation durch. Die Berechnungen sollen mit Taschenrechnergenauigkeit ausgeführt werden.

Aufgabe 4 (Bildpyramiden)

Berechnen Sie aus dem 5×5 Bild

$$\begin{pmatrix} 352 & 64 & 496 & 64 & 64 \\ 544 & 400 & 400 & 400 & 112 \\ 176 & 176 & 272 & 176 & 464 \\ 448 & 448 & 160 & 448 & 160 \\ 448 & 448 & 304 & 16 & 52 \end{pmatrix}$$

eine Gauß- und eine Laplace-Pyramide. Rekonstruieren Sie anschließend aus der Laplace-Pyramide das Ausgangsbild.

Aufgabe 5 (Diskrete Wavelettransformation)

Berechnen Sie die diskrete Haar-Wavelet-Transformation des verrauschten Stufensignals

$$f = (6, 4, 5, 6, 1, 0, 2, 0)^T.$$

Entfernen Sie die drei betragskleinsten Waveletkoeffizienten und führen Sie die Rücktransformation durch ('Hard Wavelet Shrinkage'). Die Berechnungen sollen mit Taschenrechnergenauigkeit ausgeführt werden. Vergleichen Sie mit Fouriertransformation vom Blatt 1.

Aufgabe 6 (Histogrammegalierung)

Ein Bild, dessen Grauwerte mit 3 Bit quantisiert seien, habe folgendes Histogramm:

Grauwert	rel. Häufigkeit
0	0.19
1	0.25
2	0.21
3	0.16
4	0.08
5	0.06
6	0.03
7	0.02

Führen Sie eine diskrete Histogrammegalierung durch und geben Sie das resultierende Histogramm an.