Systeme von DGL

$$y' = f(x,y)$$

$y(x) \in \mathbb{R}^n$,

$f(x,y) \in \mathbb{R}^n$

- Mögliche Normen in $\mathbb{R}^n$

$$\|y\|_2 = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |y_i|$$

$$\|y\|_1 = |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n|$$

$c_1 \|\cdot\|_\alpha \le \|\cdot\|_\beta \le c_2 \|\cdot\|_\alpha$

"Äquivalenz der Normen im endlichdimensionalen Raum"

Expl. Euler-Verfahren:

$$y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

$\Rightarrow$ a) $(x_i, y_i) \in G \ \forall i$

$$G = \{(x,y),\ x_0 \le x \le x_0 + \alpha,\ \|y - y_0\| \le \beta\},$$

$$x - x_0 \le \frac{\beta}{A},\ \|f(x,y)\| \le A$$

---

b) $\|y_h(x) - y_0\| \le A \cdot |x - x_0|$

c) $\|y_h(x) - [y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0)]\| \le \varepsilon |x - x_0|$

falls $\|f(x,y) - f(x_0, y_0)\|$

Form der Lip.-Bed. für Vektorfkt.:

Skalar: $|f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y-z|$

mit $L := \max_{(x,y)\in G} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$

- Taylor-Reihe für $f \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x,y) = f(x,z) + I(x,\xi)(y-z)$$

mit $I(x,\xi) \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$I_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}$$

$$\|f(x,y)-f(x,z)\| \leq \|I(x,\xi)\| \cdot \|y-z\| \leq$$

$\|f(x,y)-f(x,z)\|$: Vektornorm; $\|I(x,\xi)\|$: Matrixnorm; $\|y-z\|$: Vektornorm

$$\leq L \|y-z\|$$

$$L := \max_{(x,y)\in G} \|I(x,\xi)\|$$

Matrix-Normen:

Axiomen:

(A – eine Matrix (oder ein and. Obj.))

(1) $\|A\| \geq 0$

(1a) $\|A\| = 0 \iff A = 0$

(2) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\| \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

(Sub-Multiplikativität)

Zusammenhang zw. Vn & Mn:

$\|\cdot\|_v$ eine Vektornorm

Dann die zugehörige Matrixnorm:

$$\|A\|_M = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} =$$

$$= \max_{\|x\|_v = 1} \|Ax\|_v$$

(induzierte Norm)

Vektornorm in $\mathbb{R}^n$	ind. Matrixnormen in $\mathbb{R}^{n\times n}$
$\|\cdot\|_2$	$\sqrt{\rho(A^TA)}$ "Spektralnorm" $\rho(B)$ = Betrag des betragsmäßig größten Eigenwertes von B ("Spektralradius")
$\|\cdot\|_\infty$	$\max\limits_{1\le k\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \lvert a_{kj}\rvert$ "Zeilensummennorm"
$\|\cdot\|_1$	$\max\limits_{1\le k\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} \lvert a_{jk}\rvert$ Spaltensummennorm

u.s.w., z.B. $\|\cdot\|_n$), Frobeniusnorm, u.v.a. ....

Für induzierte Normen gilt: $\|Ax\|_v \le \|A\|_m \cdot \|x\|_v$

- Resultate von skalaren Gl'en übertragen sich analog.

3. Runge-Kutta-Methoden

- Das AWP:

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$y(x) \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n$$

- Entspr. Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

- Das Euler-Polygonzug-Verf. ist eine sehr einfache Möglichkeit

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \approx (x - x_0) f(x_0, y_0)$$

zur Approx. (Rechtecksregel, Auswertung am linken Rand)

- Implizites Euler:

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \approx (x - x_0) f(x, y(x))$$

→ Auswertung in rechter Intervallende.

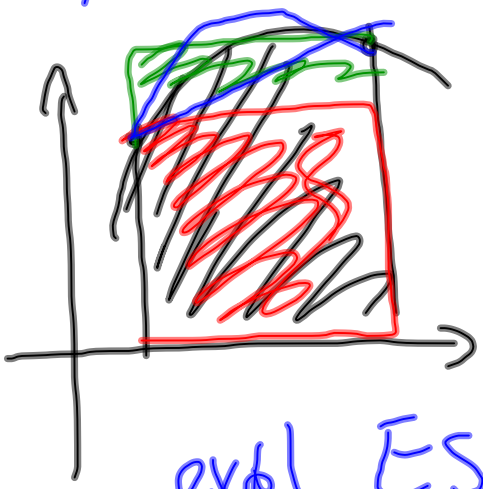
$$y_{k+1} = y_k + h_k f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

in jedem Schritt eine nichtlineare Gl. zu lösen!

- allgemeine Form von

Einschrittverfahren : (ESV)

$$(3.1)\quad y_{k+1} = y_k + h_k \cdot F(x_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1})$$



F - Verfahrens-Funktion

- expl. ESV : F hängt nicht von y_{k+1} ab
- impl. ESV : F hängt von y_{k+1} ab

3.1. Grundbegriffe, Definitionen

- Sei h eine Diskretisierung des Intervalls $[x_0, X]$ mit dem Gitter

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = X$$

$$G_h = \{x_0, \dots, x_{n(h)}\}$$

und den Schrittweiten

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$h = \max_{0 \le i \le n-1} h_i$$

Def. 3.1 (Konvergenz):

a) Sei $x \in [x_0, X]$ fix und x_h Gitterpunkt für alle Diskretisierungen h, d.h. $x = x_{n(h)}$. Das Verfahren (3.1) konvergiert in x für $h \to 0$ wenn:

$$|y(x) - \underbrace{y_{n(h)}}_{y_h(x_{n(h)})}| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

b) Das Verfahren (3.1) konvergiert auf $[x_0, X]$, wenn für die Folge der Diskretisierungen gilt:

$$\max_{x_i \in G_h} |y(x_i) - y_h(x_i)| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

y def. auf $[x_0, X]$

y_h def. auf G_h

"Gitterfunktion"

c) (3.1) hat die Konvergenzordnung $p > 0$, wenn:

$$\max_{x_i \in G_h} |y(x_i) - y_h(x_i)| = O(h^p)$$

für $h \to 0$