RWP

Abl. → Diff.

Differenzenverfahren

AWP

AWP mit Parameter (dann werden Parameter angepasst)

Schießverfahren (Wasserschlauch-Methode)

Das Einfach-Schießverfahren

Gegeben sei RWP

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u') \\ u(a) = \alpha \to \text{RW und AW} \\ u(b) = \beta \to \text{RW} \end{cases}$$

- Annahme: $\exists!$ Lösung

RWP: $\longrightarrow$ AWP

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u') \\ u(a) = \alpha \\ u'(a) = s \end{cases} \quad (*)$$

Das AWP(*) besitzt i.A. eine eindeutige Lösung:

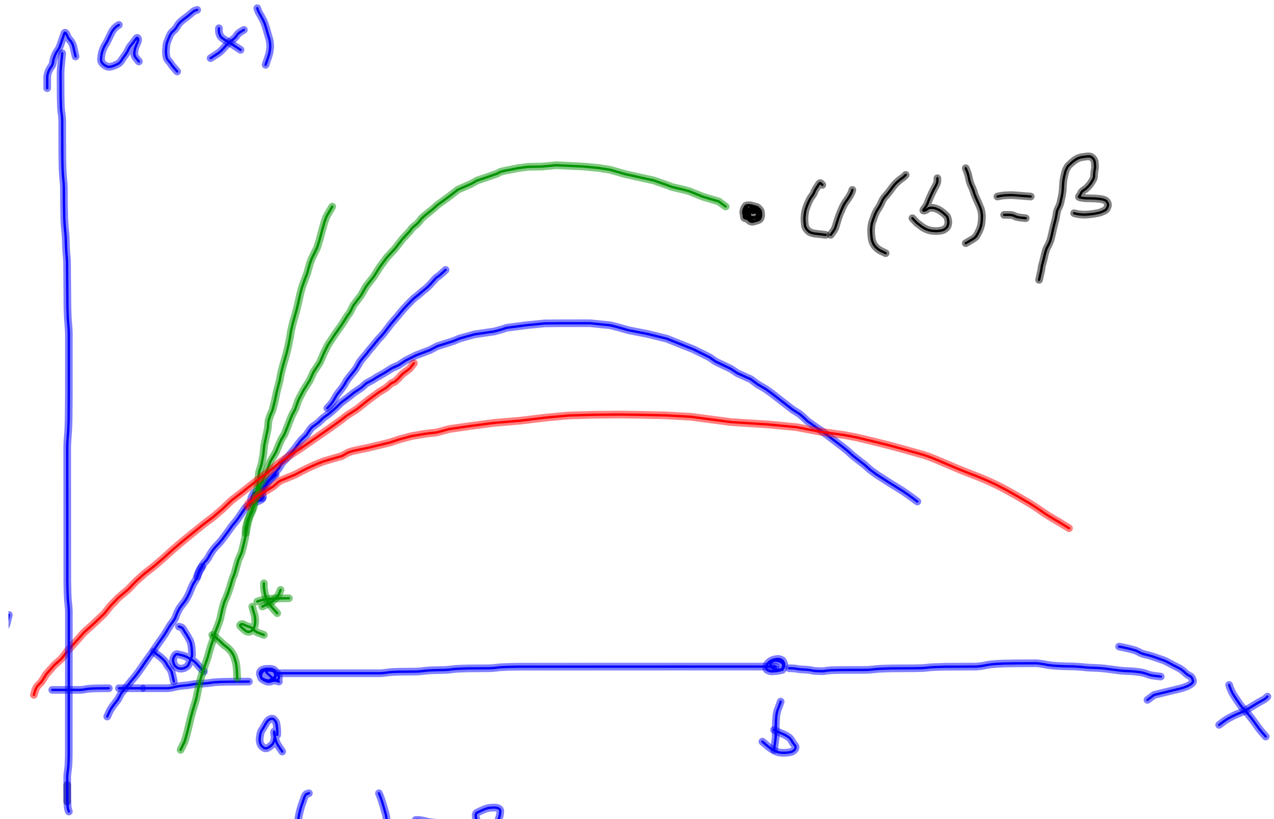
$u(x, s)$.

Finde s so, daß

$u(x, s)\big|_{x=b} = \beta$

($u(b, s^*) = \beta$ ist zu lösen)

Dann $u(x, s^*)$ — Lösung des RWAs.



$\tan\alpha = s$

$\tan\alpha^* = s^*$, wobei s^* die Lösung der Gl.

$u(b, s^*) = \beta$.

1) Bisektionsverfahren:

Falls $[u(x,s)-\beta] = F(x)$

monoton mit

$\operatorname{sign} F(a) = -\operatorname{sign} F(b)$

2) Newton-Verfahren:

$F(x) = 0$

$\rightarrow x_k = x_{k-1} - \dfrac{F(x_k)}{F'(x_k)}$

$\left(\text{Für } x_0: \left|\dfrac{F(x_0)\cdot F''(x_0)}{(F'(x_0))^2}\right| < 1\right)$

$u(x,s) = \beta \Leftrightarrow \underbrace{u(x,s)-\beta}_{F(x)} = 0$

3) Fixpunktiteration:

Die Gl. umstellen so, daß $x = f(x)$ die Nullstellen von $F(x) = 0$ als Lösungen hat.

Falls auf $[c,d]$:

1) $f(x)$ stetig

2) $f([c,d]) \subset [c,d]$

3) f - Kontraktion:

$\left(\exists L<1: \forall x,y \in [c,d]: |f(x)-f(y)| < L\,|x-y|\right)$

erfüllt sind, konvergiert

$x_{k+1} = f(x_k)$

$\forall x_0 \in [c,d]$

mit Fehlerabschätzung:

$|x_k - x^*| < \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$

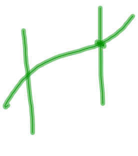
Bei vorgegebener Genauigkeit ε:

$\dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$

$L^k \leq \dfrac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|}$

$k \geq \log_L \dfrac{\varepsilon(1-L)}{|x_1 - x_0|}$

$\left(L = \max_{x\in[c,d]} |f'(x)|\right)$



Probleme des Schieß-Verfahrens:

- oft instabil bzgl. Daten,

z.B.:
- max. Existenzintervall von $u(x,s)$ abhängig
  $\longrightarrow$ evtl. $u(b,s)$ nicht definiert
- AWP numerisch instabil, obwohl entsp. RWP gut gestellt ist (gut konditioniert)

Bsp:

$$\begin{cases} y'' = 110y + y' \\ y(0) = y(10) = 1 \end{cases}$$

$y = y_1, \quad y' = y_2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 110 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$v' = Av, \quad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

1) EWe und EVen:

$\det(A - \lambda I) = 0$ — char. Gl.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 110 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-\lambda(1-\lambda) - 110 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 110 = 0$

$\lambda_1 = 11$

$\lambda_2 = -10$

$\lambda_1 = 11$:

$Au = \lambda u \Leftrightarrow (A - \lambda I)u = \vec{0}$

$(A - \lambda_1 I)u_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 110 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 10$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 110 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2^{(1)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B. $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda_1 = 11, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 10, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$

Die allg. Lösung der Gl.

$$v(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} u_2 =$$

$$= c_1 e^{11x} \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix} + c_2 e^{-10x} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

RB in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v(10) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \cdot y(0) + 0 \cdot y'(0) + 0 \cdot y(10) + 0 \cdot y'(10) = 1 \\ 0 \cdot y(0) + 0 \cdot y'(0) + 1 \cdot y(10) + 0 \cdot y'(10) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(10) = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Eindeutige Lösung des RWPs:

$$y(x) = \underbrace{\frac{1-e^{-100}}{e^{110}-e^{-100}}}_{\approx e^{-110}} e^{11x} + \underbrace{\frac{e^{110}-1}{e^{110}-e^{-100}}}_{\approx 1} e^{-10x};$$

$$y'(x) = \frac{1-e^{-100}}{e^{110}-e^{-100}} e^{11x} \cdot 11 + \frac{e^{110}-1}{e^{110}-e^{-100}} e^{-10x} \cdot (-10)$$

Anfangsbedingung:

$$v(0)=\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -10+\frac{21(1-e^{-100})}{e^{110}-e^{-100}}\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix} 1 \\ -10\end{pmatrix}$$

- bei 10-stelliger Genauigkeit:

z.B. $\tilde{v}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -10+10^{-9}\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \tilde{s}$

Lösung:

$$y(10,\tilde{s})\approx\frac{10^{-9}}{21}e^{110}\approx 2{,}8\cdot 10^{37}$$

Aber: $y(10)=1$

RW

$\Longrightarrow$ Verbesserung: Verkleinerung des Intervalls

$\hookrightarrow$ Mehrfach-Schieß-Methode

Mehrfachschießverfahren

<u>RWP</u>: $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ r(y(a), y(b)) = 0, \end{cases}$

$y \in \mathbb{R}^n$

<u>Idee</u>: Beim MSV werden die Werte:

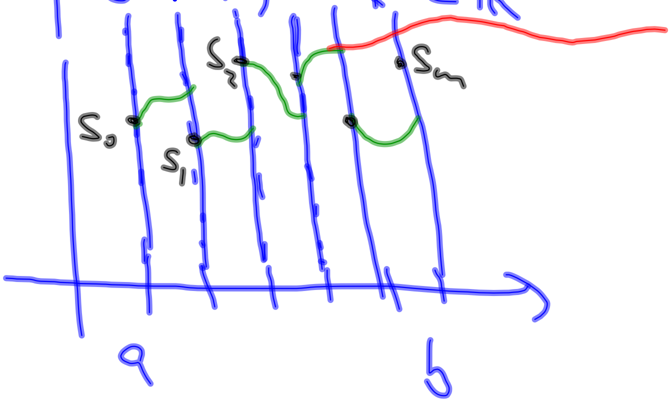
$$s_k = y(x_k), \quad k = 0, \dots, m$$

an mehreren Stellen gleichzeitig iterativ berechnet

$$a = x_0 < x_1 < \dots\dots < x_m = b$$

Sei $y(x; x_k, s_k)$ die Lösung des AWPs:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x > x_k, \\ y(x_k) = s_k \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$



Aufgabe: bestimme die Vektoren s_k so, daß die stückweise zusammengesetzte Funktion

$$\begin{cases} y(x) = y(x; x_k, s_k), & x \in [x_k, x_{k+1}) \\ y(b) = s_m \end{cases}$$

stetig ist und die RB

$$r(s_0, s_m) = 0$$

erfüllt.

∘ $n(m+1)$ Bedingungen:

$$\begin{cases} y(x_{k+1};\, x_k, s_k) = s_{k+1} \\ r(s_0, s_m) = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ GS für $n(m+1)$ Unbekannten, $\underbrace{s_0, \ldots\ldots, s_m \in \mathbb{R}^n}_{=\, S}$

$$F(S) := \underbrace{\begin{pmatrix} y(x_1;\, x_0, s_0) - s_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y(x_m;\, x_{m-1}, s_{m-1}) - s_m \\ r(s_0, s_m) \end{pmatrix}}_{\in\, \mathbb{R}^{n\cdot(m+1)}} = 0$$

kann mit Hilfe des Newton-Verfahrens:

$$S_{i+1} = S_i - [DF(S_i)]^{-1} \cdot F(S_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

iterativ gelöst werden.

- Die Matrix $DF(S) = \left(\frac{\partial}{\partial s_k} F_i(S) \right)_{i,k=0,\ldots,m}$

hat die Gestalt:

$$DF(S) = \begin{pmatrix} G_0 & -I & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & G_1 & -I & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & G_{m-1} & -I \\ A & 0 & 0 & \cdots & & B \end{pmatrix}$$

mit

$$\underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{G_k} = D_{s_k} F_k(S), \quad k = 0, \ldots, m-1;$$

$$A = D_{s_0} r(s_0, s_m) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
$$B = D_{s_m} r(s_0, s_m) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$