Numerische Differentiation

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\,dt$$

$$\Delta u = f(\vec{x})$$

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

in 3D

nD:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$$

Gitter

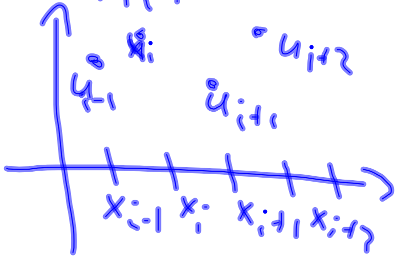
$\hookrightarrow$ Gitterfunktion (Tabelle)

Problembeschreibung:

Von einer konti. Funktion $u(x)$ sind nur Funktionswerte auf einem äquidistanten Gitter

$$\Gamma := \{x_i \mid x_i = i \cdot h,\ i \in \mathbb{Z}\}$$

bekannt:



$u_i = u(x_i),\quad i \in \mathbb{Z}$

exakte Werte!

$h = x_{i+1} - x_i \quad \forall i$

$\longrightarrow$ Gitterweite von Γ.

Gesucht: Approximation an die Ableitung $u^{(k)}$ an der Stelle ξ ($\xi \notin \Gamma$ nicht unb.) mit Hilfe der u_i:

$\longrightarrow$ **Finite-Differenzen**

Bsp 1: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \shortparallel \\ h}} \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \approx$$

$$\approx \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = D^+(u_i)$$

$$D^-(u_i)(x) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

$$D^\pm(u_i)(x) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

Bsp2: u'' soll im Punkt x_i mit Hilfe der 3 Werte u_{i-1}, u_i, u_{i+1} appr. werden.

Also: gesucht α, β, γ mit

$$u_i'' \approx \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}$$

Der Approximationsfehler soll höchstens $O(h)$ betragen

Lösung:

$$u'' = \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1} + \mathcal{O}(h)$$

Mit der Taylorentwicklung

(Lagrange-Restglied:

$$R(x) = \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}}_{\text{Zahl}} h^{n+1} = \mathcal{O}(h^{n+1})$$
)

$$T(f)_{x_0}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i =$$

Entw.-Punkt

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1} =$$

Zahl!!

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})$$

Bsp für Taylor:

$$e^x = f(x)$$

$x_0 = 0$ – Entw.-Punkt.

$$T(e^x)_{x_0=0}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + R_n(x$$

$$e^1 = e^{(0+1)}$$

$$e \Rightarrow e^1 = T(e^x)_{x_0=0}(1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + R_n(1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{(e^x)^{(n+1)}(h)}{(n+1)!} \cdot (1-0)^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{e^h}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{e^h}{(n+1)!}$$

$$e_{n=0} = \frac{1}{1} + \frac{e^h}{1} =$$

$$= 1 + e^h, \quad h \in [0,1]$$

$$e_{n=1} = 1 + 1 + \frac{e^h}{2}$$

$$e_{n=3} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{e^h}{24}$$

$$u_{i+1} = u(x_{i+1}) =$$

$$= \underline{u(x_i + h)}$$

$$u_{i-1} = \underline{u(x_i - h)}$$

$$u_i = u(x_i)$$

Entwicklungspunkt: x_i "$x - x_0$"

$h = (x_i + h) - x_i = x_{i+1} - x_i$

$$u_{i+1} = u(x_i + h) =$$

$$= T(u)_{x_i}(x_i + h) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(x_i)}{k!} h^k + R_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(x_i)}{k!} h^k + O(h^{n+1})$$

u_{i-1}: $\Delta x = -h$:

$$u_{i-1} = u(x_i - h) =$$

$$= T(u)_{x_i}(x_i - h) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{(k)}(x_i)}{k!} (-h)^k + O(h^{n+1})$$

$$u_i = u(x_i)$$

$$u_i'' \approx \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1} =$$

$$= \alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1} + O(h)$$

$$\alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1} =$$

$$= \alpha\left(u_i - h u_i' + \frac{1}{2} h^2 u_i'' + O(h^3)\right) +$$

$$+ \beta u_i +$$

$$+ \gamma\left(u_i + h u_i' + \frac{1}{2} h^2 u_i'' + O(h^3)\right) =$$

$$= u_i(\alpha + \beta + \gamma) +$$

$$+ u_i'(-\alpha h + \gamma h) +$$

$$+ u_i''\left(\alpha \frac{1}{2} h^2 + \gamma \frac{1}{2} h^2\right) +$$

$$+ O(h^3) \approx u_i''$$

$$u_i'' = 0\cdot u_i + 0\cdot u_i' + 1\cdot u_i''$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 & (i) \\ -h\alpha + h\gamma = 0 & (ii) \\ \frac{1}{2}h^2(\alpha+\gamma) = 1 & (iii) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} &(ii) \Longrightarrow \alpha = \gamma \\ &(iii) \Longrightarrow \tfrac{1}{2}(2\alpha)h^2 = 1 \\ &\qquad \Longrightarrow \alpha = \gamma = \tfrac{1}{h^2} \\ &(i) \Longrightarrow \beta = 0 - \alpha - \gamma = \\ &\qquad = -\tfrac{2}{h^2} \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u_i'' \approx \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right)}$$

. . . . .

Wie genau ist unsere Approximation?

Mit der ausführlichen Taylor-Entw.:

$$u_{i\pm1} = u_i \pm h u_i' + \frac{1}{2}h^2 u_i'' \pm \frac{1}{6}h^3 u_i''' + \frac{1}{24}h^4 u_i^{(iv)} \pm \frac{1}{120}h^5 u_i^{(v)} + \frac{1}{720}h^6 u_i^{(6)} + O(h^7)$$

folgt durch Einsetzen

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{h^2}\Bigg(\Big[\cancel{u_i}-\cancel{h u_i'}+\frac{1}{2}h^2u_i''-\cancel{\frac{1}{6}h^3u_i'''}+\frac{1}{24}h^4u_i^{(iv)}-\cancel{\frac{1}{120}h^5u_i^{(5)}}+\frac{1}{720}h^6u_i^{(6)}+O(h^7)\Big]-\cancel{2u_i}+\Big[\cancel{u_i}+\cancel{h u_i}+\frac{1}{2}h^2u_i''+\cancel{\frac{1}{6}h^3u_i'''}+\frac{1}{24}h^4u_i^{(4)}+\cancel{\frac{1}{120}h^5u_i^{(5)}}+\frac{1}{720}h^6u_i^{(6)}+O(h^7)\Big]\Bigg)=$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(h^2 u_i'' + \frac{1}{12} h^4 u_i^{(4)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{360} h^6 u_i^{(6)} + O(h^7)\right)$$

$$= u_i'' + \frac{h^2}{12} u_i^{(4)} +$$

$$\underbrace{+ \frac{1}{360} h^4 u_i^{(6)} + O(h^5)}_{= O(h^4)}$$

$$u_i'' = (\alpha u_{i-1} + \beta u_i + \gamma u_{i+1}) - R$$

$$\Rightarrow R = (\alpha u_i \ldots\ldots) - u_i''$$

$$R = \left[u_i'' + \frac{h^2}{12} u_i^{(4)} + O(h^4)\right] - u_i'' =$$

$$= \frac{h^2}{12} u_i^{(4)} + O(h^4) =$$

$$= O(h^2)$$

Man sagt:

die Approximation

$$u_i'' \approx \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right)$$

hat die Konsistenz(ordnung)

$O(h^2)$:

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right) + O(h^2)$$