$$\kappa_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \geq 1$$

$\kappa_2(A)$ groß:

$B \rightsquigarrow A^{-1}$

$Ax = b$

$(BA)x = Bb$

$\kappa_2(BA) \rightarrow$ nah an 1

Berechnung von B:

z.B. unvollständige LR

(incomplete LU)



$\tilde{L}$ $\tilde{R}$ $\tilde{L}\tilde{R} \approx A$

aber leicht zu invertieren.

2) $A = (U_A + D + O_A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als B: z.B. D, oder $D + O_A$, ...

Bemerkungen zu QR:

1) Die Elemente $a_{kj}^{(0)}$ werden überspeichert durch

$$\begin{cases} a_{kj}^{(j)} & \text{für } j > i, \\ q_{kj}^{(i)} & k = i, \dots, n \\ & \text{für } j = i, \end{cases}$$

2) Matrix Q $k = i+1, \dots, n$ bzw.
Q_i speichert man nicht,
sondern nur die Elemente
$u_k^{(i)}$ $\longrightarrow$ ein Extrafeld.

3) Der numerische
Aufwand ist $\sim \frac{2}{3} n^3$
Multiplikationen
$\longrightarrow$ doppelt so hoch
wie bei LR-Zerlegung.
Die Matrix Q wird
nicht ausgerechnet

4) $Ax = b$

$A = QR$ mit

$Q = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}$

(weil:

$Q_{n-1} \cdots Q_3 Q_2 Q_1 A = R$

$A = QR$

$\Rightarrow Q = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}$

weil Q_i sym.)

$Ax = b$

$\Rightarrow QRx = b$

$Rx = Q^T b$

$\Rightarrow$ Rechte Seite wird mitumgeformt.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
QR-Zerlegung berechnet z.B.
der Gleitkommaarithmetik zu
$\widetilde{Q}\widetilde{R}$ mit:

$$\|\widetilde{Q}\widetilde{R} - A\| \leq c_1(n) \cdot h \cdot \|A\| + O(h^2)$$

$$\|\widetilde{Q}^T\widetilde{Q} - I\| \leq c_2(n) h + O(h^2)$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0 + 0 + 2 - 0 - (-2) - 0 = 4 \neq 0$$

$$A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow$ regulär, aber nicht streng regulär.

$\rightarrow$ 2 Schritte; Komplette Speicherung.

$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|a^{(1)}\|_2 = |a^{(1)}| = \sqrt{2}$;

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -1$, weil $a_{11} > 0$

$\mu_1 = \sqrt{2}$; $\neq 0 \rightarrow$ Fall 2

$\sigma_1 = \sqrt{2\mu_1\left(\mu_1 + |a_{11}^{(0)}|\right)} =$

$= \sqrt{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$u_1^{(1)} = \dfrac{a_{11}^{(0)} - \lambda_1 \mu_1}{\sigma_1} =$

$= \dfrac{1 - (-1)\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

$u_2^{(1)} = \dfrac{a_{21}^{(0)}}{\sigma_1} = 0$

$u_3^{(1)} = \dfrac{a_{31}^{(0)}}{\sigma_1} = \dfrac{1}{\sigma_1} = \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$

$Q_1 = I - \lambda_1 u^{(1)} \cdot u^{(1)T}$;

$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

....

$R = A^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$u^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}$

und $\operatorname{diag}(R) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$

Nur in Sonderfällen Steigerfolge

$\longrightarrow$ Eine mögliche QR.

Zu bes. von Q:

$Q = Q_1 \cdot Q_2 = \left(I - 2u^{(1)}u^{(1)T}\right) \cdot$

$\left(I - 2u^{(2)}u^{(2)T}\right) =$ Sinnvoll erweitert!

$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

Givens-Rotationen

Def: Eine $G_{ke} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

heißt Givens-Rotationsmatrix falls:

$$(G_{ke})_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & k \neq i \neq \ell \\ c, & i=j=k \text{ oder } i=j=\ell \\ s, & i=k,\ j=\ell \\ -s, & i=\ell,\ j=k \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

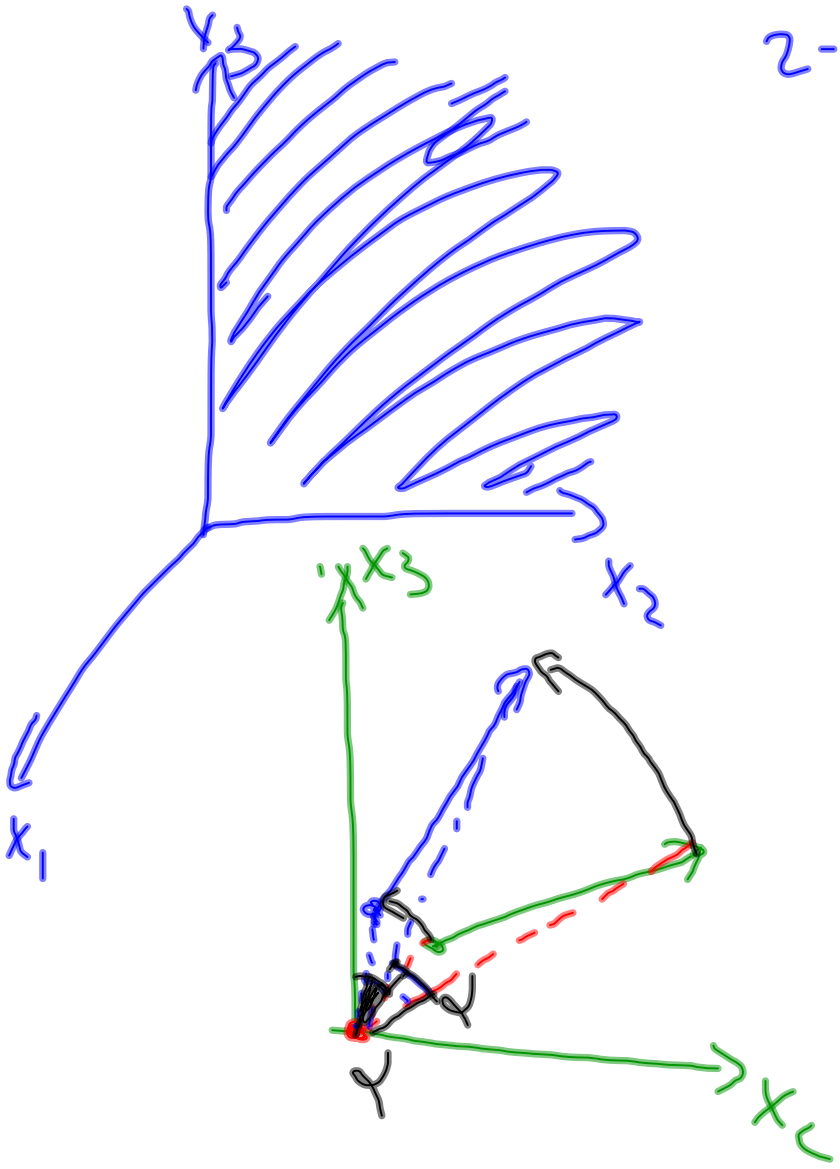
Kronecker-Symbol

mit $c^2+s^2=1$.

$c \to$ "$\cos\alpha$"

$s \to$ "$\sin\alpha$" für ein α

Geometrisch beschreibt $G_{k\alpha}$ Drehung um α ($c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$) in der Ebene $k\ell$

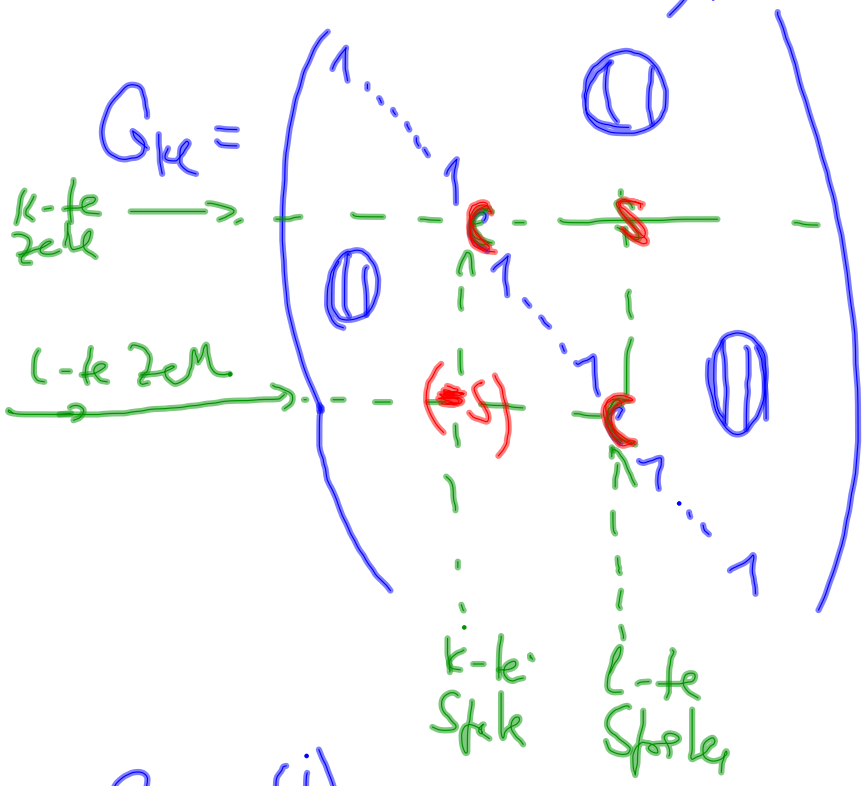


2-3-Ebene

$G_{kl} \cdot A$ operiert mit Spalten ($A \cdot G_{kl}$ – mit Zeilen):

$$G_{kl} A = \left(G_{kl} a^{(1)}, G_{kl} a^{(2)}, \ldots, G_{kl} a^{(n)} \right).$$

$G_{kl} =$

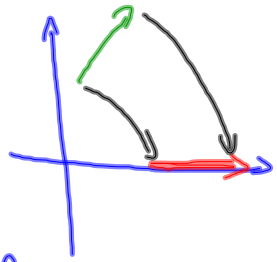


$G_{kl} a^{(j)}$ wird nur in der k-ten und l-ten Zeile sich von $a^{(j)}$ unterscheiden.

Satz: Sei $a \in \mathbb{R}^2$. Dann gibt es Givens-Rotation G_1, so dass:

$$Ga = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$|d| = \|a\|_2 = |a| \neq 0$$



Beweis: $G = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$

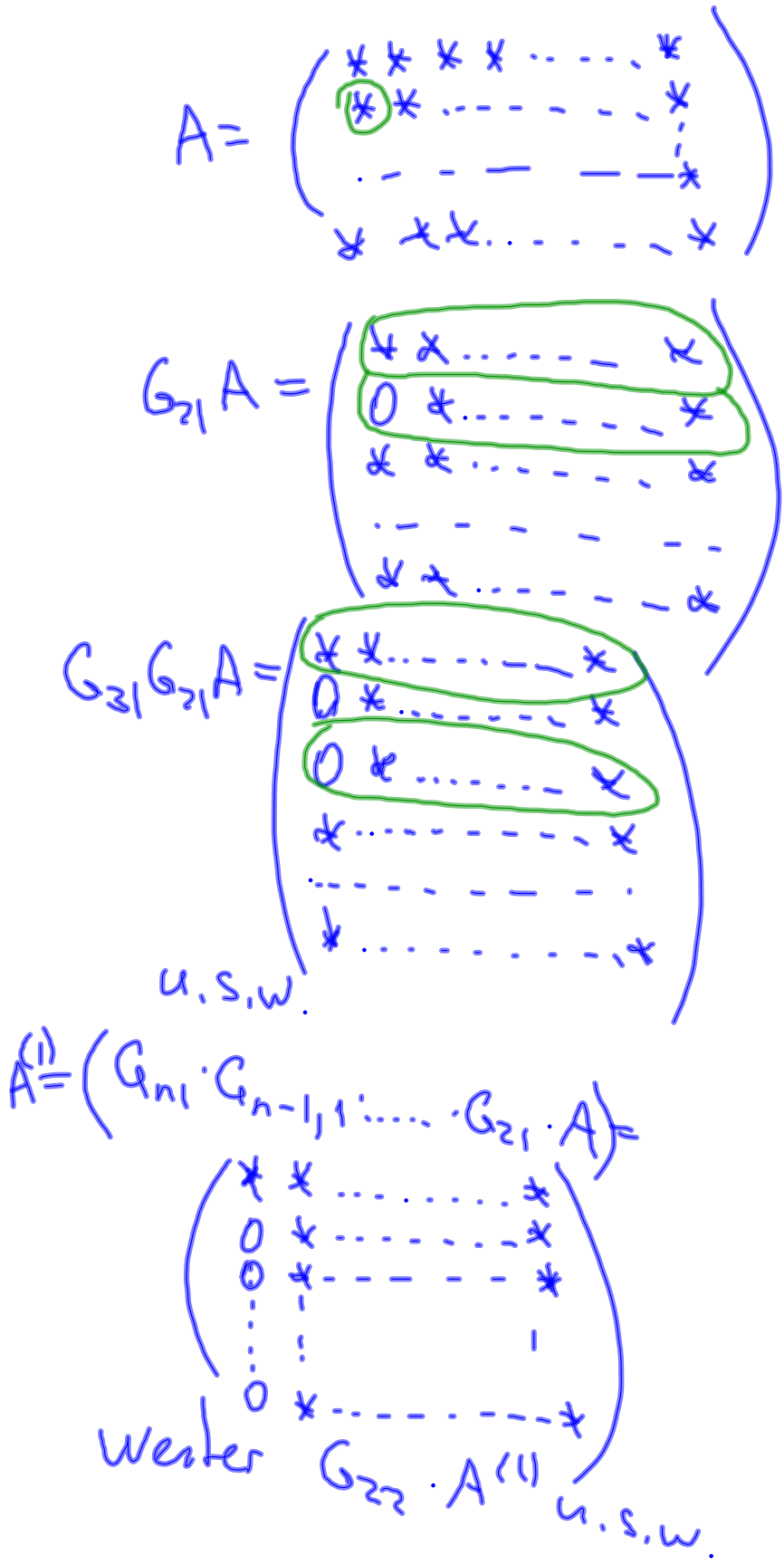
$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$Ga = \begin{pmatrix} ca_1 + sa_2 \\ -sa_1 + ca_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c = \frac{a_1}{d}, \quad s = \frac{a_2}{d}$$

mit $d^2 = a_1^2 + a_2^2 = \|a\|_2^2 \neq 0$ ☐

→ Kann man mit Hilfe von G.-R. gegebene Matrix auf Obere Dreiecksgestalt bringen!


A =
$G_{21} A =$
$G_{31} G_{21} A =$
u. s. w.
$A^{(1)} = (G_{n1} \cdot G_{n-1,1} \cdot \ldots \cdot G_{21} \cdot A) =$
Weiter $G_{22} \cdot A^{(1)}$ u. s. w.