Jede Zahl x mit

$$p^{e_{min}-1} \leq |x| \leq p^{e_{max}}\left(1-p^{-t}\right)$$

läßt sich als Gleitkommazahl darstellen (durch eine Rundung)

$$x \longmapsto fl(x)$$

Der Fehler der Rundung ist

$$\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right| \leq \eta = \frac{1}{2}p^{1-t}$$

Axiomatisch:

$$fl(x) = x(1+\varepsilon)$$

mit $|\varepsilon| \leq \eta$

Gilt: $|x| < p^{e_{min}-1}$

so wird x auf Null gesetzt (Unterlauf, underflow)

ist $|x| > p^{e_{max}}(1-p^{-t})$, dann ist unklar, was der Comp. abspeichert (Overflow).

Günstigster Fall: Abbruch mit Fehlermeldung.

Sei $* \in \{+, -, \cdot, \div\}$.

Axiomatisch:

$$fl(a * b) = (a * b) \cdot (1 + \varepsilon),$$

für $fl(a * b) \neq 0$. $|\varepsilon| \leq \eta$

Bsp: Skalarprodukt

$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$z = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$$

Der Fehler bei der Berechnung erfüllt:

$$\tilde{z}_i = fl(z_i) = fl(z_{i-1} + fl(x_i y_i))$$

$$= fl\left(z_{i-1} + \underbrace{x_i y_i (1+\varepsilon_i^{(1)})}_{\text{schon gerundet "exakt"}}\right) =$$

$$= \left(z_{i-1} + x_i y_i (1+\varepsilon_i^{(1)})\right)(1+\varepsilon_i^{(2)})$$

Klar, daß man mit $\varepsilon_i^{(\alpha)}$ nicht arbeiten kann.

Wegen $|\varepsilon_i^{(\alpha)}| \leq \eta$ nimmt man zur Vereinfachung

$$\varepsilon_i^{(\alpha)} \equiv \varepsilon \text{ an.}$$

$$\Rightarrow \tilde{z}_i = z_{i-1}(1+\varepsilon) + x_i y_i (1+\varepsilon)^2$$

und damit

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i (1+\varepsilon)^{n+1-i}$$

$\Rightarrow$ Die Reihenfolge der Summation ist von entscheidender Bedeutung!

$\Rightarrow$ Computerberechnungen sind niemals assoziativ und nicht immer kommutativ.

Zwei verschiedene Arten, den Fehler zu analysieren:

- **Direkte F-Analyse:**

$$|z-\tilde{z}| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \left(1-(1+\varepsilon)^{n+1-i}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \cdot \left|1-(1+\varepsilon)^{n+1-i}\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \cdot \left|-\underbrace{(n+1-i)}_{\leq n}\underbrace{\varepsilon}_{\leq \eta} + O(\varepsilon^2)\right|$$

$$\leq \langle |\vec{x}|, |\vec{y}| \rangle \cdot n \cdot \eta$$

- **Inverse F-Analyse:**
Berechnungen werden als exakt angenommen, Fehler sind Datenfehler:

$\tilde{z} = \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$ ist exakt berechnet, aber mit

$$\tilde{x}_i = x_i (1+\varepsilon)^{\frac{n+1-i}{2}}$$

$$\tilde{y}_i = y_i (1+\varepsilon)^{\frac{n+1-i}{2}},$$

d.h. $|x-\tilde{x}| \leq \frac{1}{2} n \eta |x| + O(\eta^2)$

$|y-\tilde{y}| \leq \frac{1}{2} n \eta |y| + O(\eta^2)$

Natürlich auch andere Varianten denkbar.

Die Größen $O(\eta^2)$ werden fast immer vernachlässigt.

Landau – Symbole

- kompakte Notation
- Algorithmus soll von Problemgröße n abhängig sein
- Laufzeit ist Abbildung: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(n) = a_n$ (Folge)
- meist ist a_n monoton wachsend und nicht beschränkt
- Interessant, wie schnell $a_n \to \infty$ strebt.

  ⇓

  Vergleich mit bekannten Prototypen

Definition: (Groß-O, Klein-o): Eine Folge $A=\{a_n\}$ ist "Groß-O" von $B=\{b_n\}$, wenn der Quotient $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ beschränkt ist.

Die Folge $A=\{a_n\}$ ist "Klein-o" von B, wenn $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ eine Nullfolge ist.

Schreibweise: $A = O(B)$ bzw. $A = o(B)$

O, o nennt man Landau-Symb.

Bsp:

(a) $2n^2+3n+4 = O(n^2)$,

denn: $\frac{2n^2+3n+4}{n^2} =$

$= \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2} = 2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2} \leq 9$

(oder: eine konvergente Zahlenfolge $\longrightarrow$ beschränkt)

(b) $2n^2+3n+4 = O(n^3)$,

denn:

$$\frac{2n^2+3n+4}{n^3} = \frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

Mehrdeutigkeit:

$A = O(B)$ ist nicht eindeutig: Für $A=(n+2)$ sind z.B:

$A = O(n^2)$

$A = O(n)$

$A = O(\frac{n}{2})$

wahle Aussagen.

Es gilt:

- Konstante Faktoren ändern nicht die Ordnung:

$$O(B) = O(c \cdot B) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Termen niedrieger Ordnung sind unwichtig:

$n^2+3n+4 = O(n^2)$

$n^2+17n = O(n^2)$

Satz (Rechenregel):

Für reelle Zahlenfolgen A, B, C gelten folgende Regeln:

(a) $A = O(A)$

(b) $c \cdot O(A) = O(A)$

$c \cdot o(A) = o(A)$

(c) $O(A) + O(A) = O(A)$

$(2n^2+1) + 0{,}0000001\,n^2 = O(n^2) + O(n^2) = O(n^2)$

$o(A) + o(A) = o(A)$

(d) $O(O(A)) = O(A)$

$o(o(A)) = o(A)$

(e) $O(A) \cdot O(B) = O(A \cdot B)$

$o(A) \cdot o(B) = o(A \cdot B)$

(f) $A \cdot O(B) = O(A \cdot B)$

$A \cdot o(B) = o(A \cdot B)$

(g) Transitivität:

$A = O(B),\ B = O(C)$

$\Rightarrow A = O(C)$

$A = o(B),\ B = o(C) \Rightarrow A = o(C)$

Vergleichbarkeit von Folgen:

Nicht alle Folgen sind vergleichbar:

$$a_n = \begin{cases} n^2 & , n \text{ gerade} \\ n & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} n & , n \text{ gerade} \\ n^2 & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$

n gerade: $A \neq O(B)$

n ungerade: $B \neq O(A)$

Def: $\begin{pmatrix} O(A) = O(B) \\ O(A) < O(B) \end{pmatrix}$

(i) $O(A) = O(B)$

$\Updownarrow$ df

$A = O(B)$ und $B = O(A)$

(ii) $O(A) < O(B)$

$\Updownarrow$ df

$A = O(B)$ und $B \neq O(A)$

Häufig verwendete Prototypen

O	Laufzeitverhalten
$O(1)$	konstant
$O(\log_q n), q>1$	logarithmisch
$O(n)$	linear
$O(n \log_q n), q>1$	$n \log n$
$O(n^2)$	quadratisch
$O(n^3)$	kubisch
$O(n^k)$	polynomiell
$O(q^n), q>1$	exponentiell

Oft $q=2$, spielt aber wegen $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ keine Rolle

Vergleich der Ordnungen:

$$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^3) < \dots < O(n^n) < \dots < O(2^n) < O(3^n) \dots$$

n	$\log n$	$n \log n$	n^2	n^3	2^n
10	3,32	33,22	100	1000	1024
100	6,64	664,4	10000	10^6	$1,27 \cdot 10^{30}$
1000	9,97	9966	10^6	10^9	10^{301}
10000	13,29	132877	10^8	10^{12}	

$\hookrightarrow \approx 10^{3010}$