HTW DES SAARLANDES
Ing.-Wiss. Fakultät, MST/M
Numerik & Statistik SS 2010
Prof. Dr. B. Grabowski
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Numerik SS 2010

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 *Welche Lösungen besitzt das Randwertproblem*

$$y'' + y = r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

für folgende Daten?

a) $[a,b] = [0,\pi]$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $r(x) \equiv 0$

b) $[a,b] = [0,\pi/2]$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $r(x) \equiv 0$

c) $[a,b] = [0,\pi]$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $r(x) \equiv 0$

d) $[a,b] = [0,\pi/2]$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $r(x) \equiv 0$

e) $[a,b] = [0,\pi/2]$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $r(x) = x^2$

f) $[a,b] = [0,\pi]$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $r(x) = x^2$

Lösung:
s. nächste Seite

$y'' + y = r(x)$, $x \in [a,b]$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$

Lösung der homogenen DGL:

„EWe": $\lambda^2 + \lambda = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm i$;

$\Rightarrow y(x) = \tilde{c}_1 e^{ix} + \tilde{c}_2 e^{-ix} \overset{=}{=} c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_1, c_2, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$.

(1) $r(x) \equiv 0$.

a) $[a,b] = [0, \pi]$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0, \\ -c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \xi \in \mathbb{R}, \ \xi \text{ - beliebig} \end{cases}$$

Also $y(x) = \xi \sin x$, $\xi \in \mathbb{R}$ – unendlich viele Lösungen.

b) $[a,b] = [0, \pi/2]$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow y(x) = \cos(x) \rightarrow \exists!_0 \text{ Lösung}$$

c) $[a,b] = [0, \pi]$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ -c_1 = 1 \end{cases} \ \lightning \rightarrow \nexists \text{ Lösung}$$

d) $[a,b] = [0, \pi/2]$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Nur triviale Lösung } y(x) \equiv 0, \ x \in [0, \pi/2]$$

(2) $r(x) = x^2$;

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist z.B. $y_0 = x^2 - 2$

$\Rightarrow$ Lös = Spez. inhom. + Allg. homogen.

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 2$

e) $[a,b] = [0, \pi/2]$, $\alpha = \beta = 0$

$$\begin{cases} c_1 - 2 = 0 \\ c_2 + (\pi/2)^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 2; \\ c_2 = 2 - \pi^2/4; \end{array}$$

Eine eindeutige Lösung $y(x) = 2\cos x + \left(2 - \frac{\pi^2}{4}\right) \sin x + x^2 - 2$,

f) $[a,b] = [0, \pi]$, $\alpha = \beta = 0$;

$$\begin{cases} c_1 - 2 = 0 \\ c_1 + \frac{\pi^2}{4} - 2 = 0 \end{cases} \ \lightning \quad \text{keine Lösung}$$

Aufgabe 2 *Transformieren Sie das Randwertproblem*

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x, u, u')$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

in eines mit homogenen Randbedingungen.

<u>Lösung:</u>

$u'' + p(x)\,u' + q(x)\,u = f(x, u, u');$ $\quad x \in [a, b]$

$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$

<u>Ansatz:</u>

$w(x) := u(x) - \alpha \frac{x-b}{a-b} - \beta \frac{x-a}{b-a}$ $\quad (a \neq b)$ (sonst gibt's kein RWP)

$\Rightarrow w(a) = u(a) - \alpha = \alpha - \alpha = 0$ — ok;

$\quad\;\; w(b) = u(b) - \beta = \beta - \beta = 0$ — ok;

Also die RBen stimmen

Jetzt finden wir die Transformierte Gestalt der DGL:

$w'(x) = u'(x) - \frac{\alpha}{a-b} - \frac{\beta}{b-a} = u'(x) + \frac{-\alpha+\beta}{a-b}$

$w''(x) = u'(x);$

$\Rightarrow$ Die Transformierte DGL

$$w'' + p(x)\left(w' + \frac{-\alpha+\beta}{a-b}\right) + p(x)\left(w - \alpha\frac{x-b}{a-b} - \beta\frac{x-a}{b-a}\right) =$$

$$= f\left(x, w - \alpha\frac{x-b}{a-b} - \beta\frac{x-a}{b-a}, w' + \frac{\beta-\alpha}{a-b}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad w'' + p \cdot w' + q\,w = F(x, w, w'')$

und

$$F(x, w, w'') = f\left(x, w - \alpha\frac{x-b}{a-b} - \beta\frac{x-a}{b-a}, w' + \frac{\beta-\alpha}{a-b}\right) +$$

$$+ p(x)\frac{\alpha+\beta}{a-b} + q(x)\left(\alpha\frac{x-b}{a-b} + \beta\frac{x-a}{b-a}\right)$$