(1) LR-Zerlegung: $A = LR$

↳ A streng regulär

$$\begin{cases} \det \Delta_1 \neq 0 \\ \det \Delta_2 \neq 0 \\ \vdots \\ \det \Delta_n = \det A \neq 0 \end{cases}$$

(L = , R = )

(2) $A^T = A$, st. regulär

$\longrightarrow A = LDL^T$

(3) $\Delta_k > 0 \ \forall k \longrightarrow A = CC^T$

Das GS $A = LR$ lautet

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot r_{kj} \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} \cdot r_{kj}$$

(*) $l_{ij} = 0$ für $j > i$

(L - untere Δ-Mat)

$r_{ij} = 0$ für $i > j$

(obere Δ-Mat)

- Für $i=1$, $j=1$:

$$\Rightarrow a_{11} = \underbrace{l_{11}}_{=1} \cdot r_{11} = r_{11}$$

$$\Rightarrow r_{11} = a_{11}$$

- Für $i=1$, $j>1$

$$\Rightarrow a_{1j} = l_{11} \cdot r_{1j} = r_{1j}$$

$$\Rightarrow r_{1j} = a_{1j}, \quad j=2,\dots,n$$

- $j=1$, $i>1$

$$\Rightarrow a_{i1} = l_{i1} \cdot r_{11} \Rightarrow$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{r_{11}}, \quad i=2,\dots,n$$

- **Allgemein:** für $i \le j$:

$$a_{ij} = \underbrace{l_{ii}}_{=1} \cdot r_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot r_{kj}$$

$$\Rightarrow r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} r_{kj}$$

$$j = i, i+1, \dots, n$$

$$a_{ji} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot r_{ki} + l_{ji} \cdot r_{ii}$$

$$\Rightarrow l_{ji} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} r_{ki} \right),$$

$$j = i+1, \dots, n$$

Algorithmus 1 (LR-Zerlegung)

a) Für $i = 1$

$$r_{1j} = a_{1j} \quad ; \quad j = 1, \dots, n$$

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{r_{11}} \quad ; \quad j = 2, \dots, n$$

b) Für $i = 2, \dots, (n-1)$:

$$r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot r_{kj} \; ; \quad j = i, \dots, n$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot r_{ki} \right) \cdot \frac{1}{r_{ii}} \; ; \quad j = i+1, \dots, n$$

c) Für $i = n$

$$r_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} \cdot r_{kn}$$

Dieser Algorithmus wird:

$$n - 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(n - ((i+1)+1) \right) =$$

$$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 =$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \text{ Divisionen}$$

und

$$\sum_{i=2}^{n} (i-1)\Big((n-i+1) + (n-(i+1)+1)\Big) \approx \frac{n^3}{3}$$

Multiplikationen benötigen.

Um das GS $Ax = b$ zu lösen, benutzt man nach der LR-Zerlegung sog. Vorwärts- und Rückwärtssubstitution

$A = LR \rightarrow LRx = b$

$Rx = y$

$Ly = b \rightarrow$  $y = b$

Vorwärts-S.

 $x = y$

Rückwärts-S.

Algorithmus 2 (Vorwärtseinsetzen)

$$Ly = b$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \ell_{21} & \ddots & \\ \ell_{n1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1) $y_1 = b_1$

2) für $i = 2, 3, \ldots, n$

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} \cdot y_k$$

Anzahl der Multiplikationen

$$\sum_{i=2}^{n} (i-1) = 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \approx \mathcal{O}(n^2)$$

Anzahl der Divisionen $= 0$.

Landau-Symbol (wird erklärt; Größenordnung)

Algorithmus 3

(Rückwärtseinsetzen)

$$Rx = y$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad r_{jj} \neq 0$$

a) $x_n = \frac{y_n}{r_{nn}} \rightsquigarrow$ vorletzte Gl.: $r_{n-1,n-1} x_{n-1} + r_{n-1,n} x_n = y_{n-1}$

b) für $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} x_k}{r_{ii}}$$

$$\#\text{Mult.} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(n - (i-1) + 1\right) =$$

$$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 =$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$$

$$\#\text{Div.} = n$$

Beispiel:

Zerlegung der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Durchführbarkeit:

Berechnung der Hauptminoren:

$$\Delta_1 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Regel von Sarrus

$$\Delta_3 = \det A = 16 + 18 + 48 - 48 - 8 - 36 = -10$$

$\Rightarrow$ LR-Zerlegung möglich

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} II = II - \frac{1}{2} I \\ \longrightarrow \\ III = III - I \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$III = III + \tfrac{1}{2} II \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

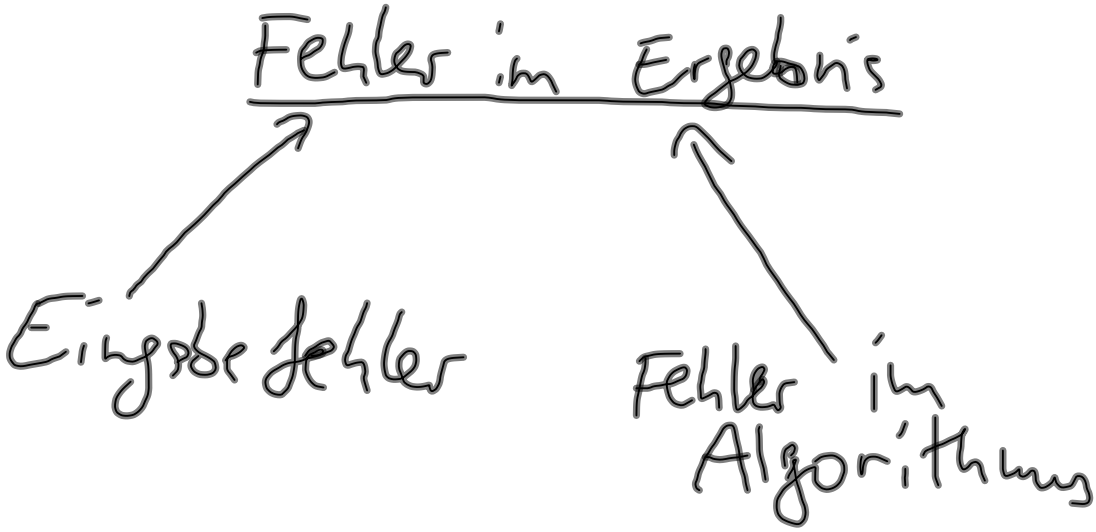
$$R = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ & 2 & 3/2 \\ & & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

NB! Vorzeichenwechsel!

3. Fehleranalyse

In (2) LR-Zerlegen haben wir Eingangsgrößen: (A, b), und das Resultat $(A, b) = x = A^{-1} b$



Eingabefehler:
- Meßfehler
- Darstellungsfehler

Es existieren nur endlich viele Computerzahlen

$$z = a\,p^{\alpha},$$

wobei p die Basis ($p = 2, 8, 16, 10, 60, 12, 20, \ldots$)

α den Exponenten

($\alpha \in (\alpha_{min}, \alpha_{max}) \subset \mathbb{Z}$)

und a die sog. Mantisse bezeichnet.

Es gilt:

entweder

$$a = \pm\left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \ldots + \frac{d_t}{p^t}\right)$$

mit $d_1 \neq 0$ und

$$d_i \in \{0, \ldots, p-1\}$$

oder $a \equiv 0$,

t ist Mantissenlänge

(Anzahl der gültigen Ziffern)

$$0{,}123 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

$t = 3$, $b = 10$

$z = a\,p^{\alpha}$ ist die

Sog. Gleitkommadarstellung

(floating point representation)

$$\underbrace{0{,}0012}_{\text{Fix-Komma-Dar.}} = \underbrace{0{,}12 \cdot 10^{-2}}_{\text{Gl.-Komma Darst.}}$$

Jede Zahl x mit

$\left(\text{damit } \frac{1}{p} \leq |x| \leq p \text{ dann } (1-p)\right)$

lässt sich als eine

kleinste darst. Zahl ... größte darst. Zahl

durch eine Rundung darstellen.

x=0 ist eine besondere Computerzahl mit a=0.

Bspl: Drei-Stellen-Arithm.

1230+4+4=?

$1230 = 0{,}123 \cdot 10^4$

$4 = 0{,}4 \cdot 10^1$

$+ \longrightarrow \quad = 0{,}0004 \cdot 10^4 = 0{,}00$

$1230+4 = 0{,}123 \cdot 10^4$

$+ 0{,}4 \cdot 10^1 = (0{,}123 + 0{,}000)\,10$

$= 0{,}123 \cdot 10^4 = 1230$

$\Rightarrow$ 1230+4+4 = 1230

$+ \longleftarrow$

$4+4 = 0{,}4 \cdot 10^1 + 0{,}4 \cdot 10^1 =$

$= 0{,}8 \cdot 10^1$

$1230 + 0{,}8 \cdot 10^1 =$

$= 0{,}123 \cdot 10^4 + 0{,}8 \cdot 10^1 =$

$= (0{,}123 + 0{,}001) \cdot 10^4 =$

$= 0{,}124 \cdot 10^4 = 124$

1230+4+4 = 1238

Regel: Addiere erst die kleinsten Zahlen, und die größeren.

Bsp2: t=3, α=-3..3

p=10

Kleinste darstellbare Zahl