Def: Ein Problem $x \mapsto f(x)$ heißt **wohlgestellt**

falls $\exists L_{abs}(\delta)$ konst:

$$\|f(\tilde{x}) - f(x)\| \leq L_{abs}(\delta)\|\tilde{x} - x\|$$

$\forall x \in E_\delta(x)$,

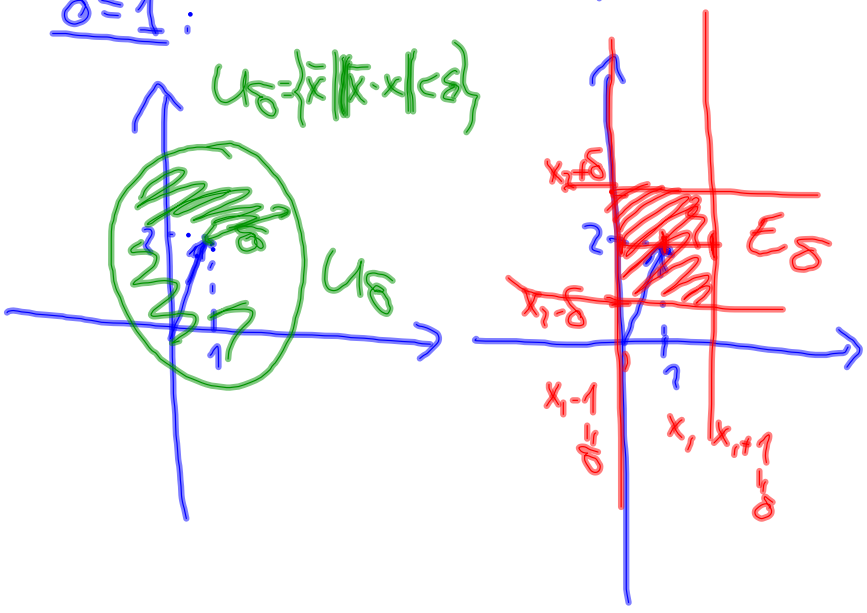
$E_\delta(x) := \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\tilde{x}_i - x_i| \leq \delta, \; i = 1, \dots, n\}$

$(f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$

z.B.: 2D: $\mathbb{R}^2$:

$x = (1,2)$ $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

$\delta = 1$:



Die absolute Kondition des Problems ist

$$\kappa_{abs} = \lim_{\delta \to 0} L_{abs}(\delta)$$

Falls x und $f(x)$ von Null verschieden sind, so def. man $L_{rel}(\delta)$:

$$\frac{\|f(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(x)\|} \leq L_{rel}(\delta) \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$$

und die relative Kond.-Zahl

$$\kappa_{rel} = \lim_{\delta \to 0} L_{rel}(\delta)$$

$\nexists L_{abs}, L_{rel} \longrightarrow$

heißt das Problem schlecht gestellt.

Bsp: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diffbar

$\kappa_{abs} = \|f'(x)\|$ mit

$\left(f'(x)\right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$

$\kappa_{rel} = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \|f'(x)\|$

Bsp 2: Addition:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x_1 + x_2$;

$\Rightarrow f'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

$\|f'(x)\|_{max} = 1$

$\Rightarrow \kappa_{abs} = 1$

$\kappa_{rel} = \frac{\|x\|_{max}}{\|f(x)\|} \|f'(x)\|_1 =$

$= \frac{|x_1| + |x_2|}{|x_1 + x_2|}$

$\operatorname{sgn}(x_1) = \operatorname{sgn}(x_2) \Rightarrow \kappa_{rel} = 1$

↙ das Problem gut gestellt.

$\operatorname{sgn}(x_1) = -\operatorname{sgn}(x_2)$

$\Rightarrow$ i.A. $\nexists\, \kappa_{rel} < \infty$

$\longrightarrow$ das Problem schlecht gestellt.

$\Rightarrow$ Anw. Comp. $\longrightarrow$ Auslöschen der führenden Ziffern

Bsp 3: LGS:

Problem: $Ax = b$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$f(b) = A^{-1}b$

Die Abbildung ist linear

$\Rightarrow f'(b) = A^{-1}$

$\Rightarrow \kappa_{abs} = \|A^{-1}\|$

$\Downarrow$

$\kappa_{rel} = \frac{\|b\|}{\|A^{-1}b\|} \|A^{-1}\| =$

$= \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \|A^{-1}\| \leq$

$\leq \frac{\|A\| \cdot \|x\|}{\|x\|} \cdot \|A^{-1}\| = \underline{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$

Def: Die Größe

$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ heißt Konditionszahl der Matrix A.

Es gilt: $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

$\|A^{-1}\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} \ominus \left(Ay = x\right)$

$\ominus \frac{1}{\min_{\|Ay\| \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}}$

$\Rightarrow \boxed{\kappa(A) = \frac{\max_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|}}$

Im Fall der Spektralnorm

$\|A\|_2 = \|A\|_\sigma = \{\max |\lambda|$

(A-quad) λ-EW $(A)\}$

$\Rightarrow \kappa(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

Eigenschaften ($A \neq 0$)

1) $\kappa(A) \geq 1$

$\kappa(A) = 1 \Rightarrow A^T A = \alpha I, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$

2) $\kappa(\alpha A) = \kappa(A)$

3) $A \neq 0$ ist genau dann singulär, wenn $\kappa(A) = \infty$

Bsp.: Gestörtes GS:

$Ax = b \rightsquigarrow (A + \Delta A)\tilde{x} = b + \Delta b$

Fehler-Analyse der Gauß-Elimination und Pivot-Strategie

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det = -1; \quad \Delta_1 = 0$

LR-Zerlegung versagt (A nicht streng regulär)

Bsp: $A = \begin{pmatrix} p^{-t} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^t & 1 \end{pmatrix}}_{=:L} \underbrace{\begin{pmatrix} p^{-t} & 1 \\ 0 & 1-p^t \end{pmatrix}}_{=:R} = A$$

$$-p^t = -\left(\frac{1}{p} + \frac{0}{p^2} + \ldots + \frac{0}{p^t}\right) p^{t+1}$$

$$r_{22} = 1 - p^t$$

Exponentenausgleich:

$$1 = \left(\frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} + \ldots + \frac{d_t}{p^t}\right) p^{t+1}$$

$$\Rightarrow d_1 = \ldots = d_t = 0$$

(bei genügend großem t)

d.h.:

$$\begin{pmatrix} p^{-t} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \tilde{L}\tilde{R} =$$

$$\begin{pmatrix} p^{-t} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{-t} & 1 \\ 0 & -p^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Elemente sind bei der Zerlegung stark gewachsen

Pivot-Strategien

(1) Spaltenpivotsuche

a) Wähle im Eliminationsschritt $A^{(k)} \to A^{(k+1)}$ ein p mit $\left|a_{pk}^{(k)}\right| \geq \left|a_{ik}^{(k)}\right|$ $i = k, \dots, n$

b) Vertausche die Zeile p und k

Bem.:
- i.d.R. $O(n^2)$ zus. Op's
- $|l_{ij}| \leq 1 \quad \forall i,j = 1, \dots, n$
- $g = \frac{\max\limits_{i,j} |r_{ij}|}{\max\limits_{i,j} |a_{ij}|} \leq 2^{n-1}$

Diese Abschätzung ist scharf:
d.h. $g = 2^{n-1}$ für

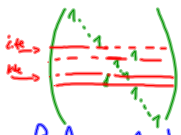
$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (Wilkinson)

Satz: Für jede invertierbare Matrix A existiert eine Permutationsmatrix P derart, daß die L-R-Zerlegung $PA = LR$ existiert.

Permutationsmatrix:

$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$P_{ik} \longleftrightarrow I$ mit vertauschter i-ter und k-ter Zeile:



$P_{ik} \cdot A \to A$ mit vertauschter i-ter und k-ter Zeile

$A \cdot P_{ik} \to A$ mit vertauschter i-ter und k-ter Spalte

P_{ik} – Elementar Permutationsmatrix

$P = \prod_{(i,k)} P_{ik}$ – Permutationsmatrix

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

P_{13}:



$P_B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$

$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_{23} \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$P_{23} \cdot B = (P_{23} \cdot P_{13}) \cdot A$

$P = P_{23} \cdot P_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$PA = LR$$

$$Ax = b$$

$$PAx = Pb$$

$$LRx = Pb$$

$$\rightarrow \begin{cases} Rx = y \\ Ly = Pb \end{cases}$$