$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$P_1 A x = P_1 b$$

$$P_1 A x = P_1 b;$$

$$(P_1 A P_2) P_2^{-1} x = P_1 b$$

P_2 - Permutationsmatrix

$$P_2^{-1} = \tilde{P}$$

$$P_2 \tilde{P} = I$$

$$\tilde{P} P_2 = I$$

$$P_2 P_2^T = I$$

$$\Rightarrow P_2^{-1} = P_2^T$$

$$\det |P| = \pm 1$$

$$P^{-1} = P^T$$

Vollständige Pivotsuche

Cholesky-Verfahren für symmetrische positiv definite Matrizen:

Def.: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt symmetrisch, wenn:

$$A^T = A$$

Def.: Eine $A = A^T$ Matrix heißt symmetrisch und positiv definit (spd-Matrix), falls alle Hauptminore $\Delta_k > 0$ sind.

Satz: Eine Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn $\langle Ax, x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 4 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6 > 0$

$\Delta_3 = \det A = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 + 0 - 2 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 12 > 0$

und $A = A^T \Rightarrow A$ spd. (nach Def.)

Satz: $\langle Ax, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0.$

$$Ax = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle Ax, x \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 4x_1^2 + x_2x_1 + x_3x_1 + x_1x_2 + 2x_2^2 +$$

$$+ x_1x_3 + 2x_3^2 =$$

$$= 4x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 +$$

$$+ 2x_1x_2 + 2x_1x_3 =$$

$$= \left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) +$$

$$+ \left(x_1^2 + 2x_1x_3 + x_3^2\right) +$$

$$+ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 +$$

$$+ 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$$

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0.$

Satz (Eigenschaften einer spd-Matrix):

Für jede spd-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

1. A ist invertierbar (regulär)
2. $a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
3. $\max_{ij} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}$

Satz: Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ streng diagonaldominant mit positiven Diagonaleinträgen. Dann ist A eine spd-Matrix.

Def: Eine Matrix B heißt streng diagonaldominant, falls $\forall i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Schwach d.d.: "$\leq$"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & & & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{k,k-1} & a_{kk} & a_{k,k+1} \cdots a_{kn} \\ & & & & \\ a_{n1} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$|a_{k1}| + \dots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \dots + |a_{kn}| < |a_{kk}|$$

Zu unserem Bsp:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$1+1 < 4$
$1+0 < 2$
$1+0 < 2$

und $4 > 0, \ 2 > 0, \ 2 > 0$

und symm.: $A = A^T$

$\Rightarrow A$ spd

Bem: 1) Keine Spalten- oder Zeilenpivotisierung notwendig (evtl. sehr selten (so gut wie nie) diagonale Pivot-Suche)

2) Cholesky-Zerlegung möglich $A = CC^T$

Algorithmus (Cholesky-Zerlegung):

1) für $j = 1, \ldots, n-1$:

$$c_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$i = j+1, \ldots, n$:

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} c_{jk} \right)$$

2) $$c_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\frac{1}{6} n^3$ Mult.-Add., n $\sqrt{\cdot}$

Effektiv!!!

$$CC^T x = b$$

$$\begin{cases} Cy = b \\ C^T x = y \end{cases}$$

Algorithm $(Cy = b)$:

1) $y_1 = \frac{b_1}{c_{11}}$

2) $y_i = \frac{1}{c_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} y_k \right)$,

$i = 2, \dots, n$

.

Algorithmus ($C^T x = y$)

1) $x_{nn} = \frac{y_{nn}}{c_{nn}}$

2) $\underline{i = n-1, \dots, 1}$:

$$x_i := \frac{1}{c_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ki} x_k \right)$$

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine spd-Matrix. $A = CC^T$ Chol.-Zerlegung lässt sich in Gleitkommaarithmetik auf $\tilde{C}$ mit:

$$|A - \tilde{C}\tilde{C}^T| \leq (n+1)\eta\, a a^T + O(\eta^2)$$

$$a = \left(\sqrt{a_{11}}, \sqrt{a_{22}}, \dots, \sqrt{a_{nn}} \right)^T \in \mathbb{R}^n$$

Bem: kein Wachstum der Elemente!

$\longrightarrow$ seltene Ausnahme. (angenehm :))

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$n = 3$

Alg: 1) für $j = 1, 2$:

$$c_{11} = \left(a_{11} - \sum_{k=1} \right.$$

Korrektur des Alg.:

für $j = 2, \dots, n-1$

Dreams:

Für $j=1$:

$i=1$: $c_{11} = \sqrt{a_{11}}$

$i=2, \dots, n$: $c_{i1} = \frac{a_{i1}}{c_{11}}$

$$c_{11} = \sqrt{4} = 2$$

$$c_{21} = \frac{a_{21}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$c_{31} = \frac{a_{31}}{2} = \frac{1}{2}$$

2		
1/2	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	
1/2	$-\frac{1}{2\sqrt{7}}$	$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{7}}$

$$c_{22} = \sqrt{a_{22} - \sum_{k=1}^{1} c_{21}^2} =$$

$$= \sqrt{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$c_{32} = \frac{1}{c_{22}} \left(a_{32} - \sum_{k=1}^{1} c_{31} c_{21} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} \left(0 - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$c_{33} = \sqrt{a_{33} - \sum_{k=1}^{2} c_{3k}^2} =$$

$$= \sqrt{2 - c_{31}^2 - c_{32}^2} =$$

$$= \sqrt{2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{28}} = \sqrt{\frac{48}{28}} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{7}}$$

$$QRx = b$$

$$(Q^T Q) Rx = Q^T b$$

$$(Q^T Q) = I$$

$$Rx = \underbrace{Q^T b}_{q}$$

$$\triangle \; x = q$$