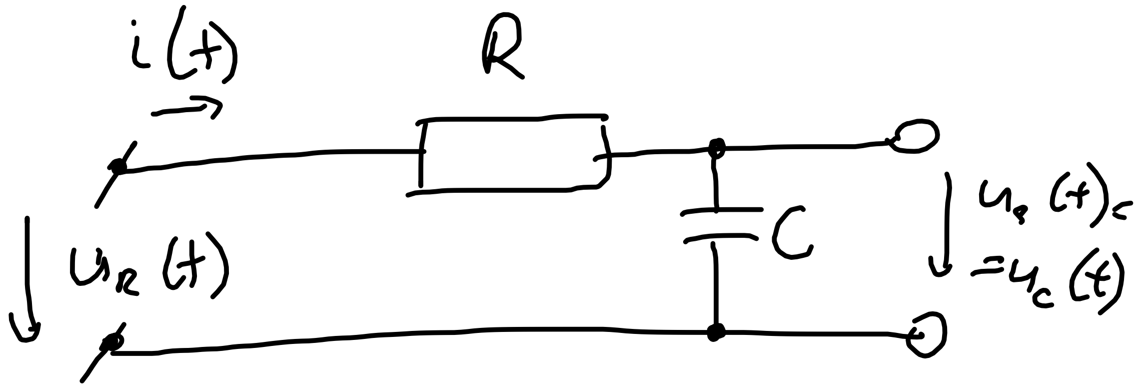
Weitere Anwendungen von Fourier-Analyse

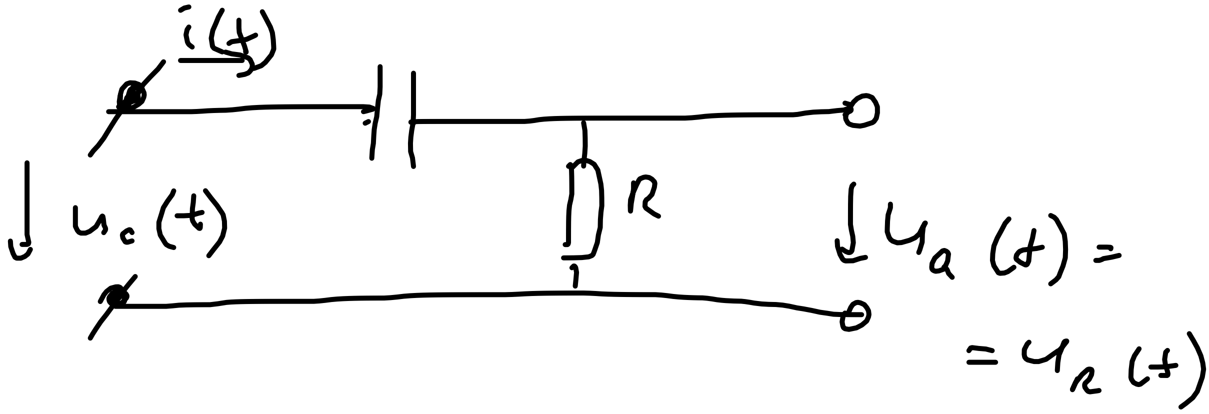
Lineare Filter



1. Tiefpass

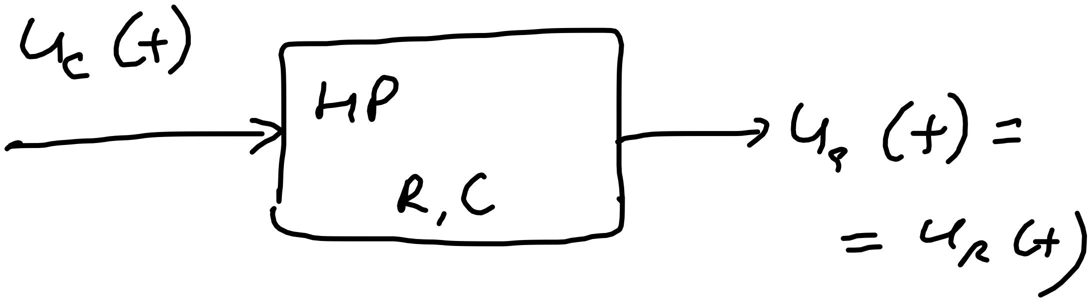
System:

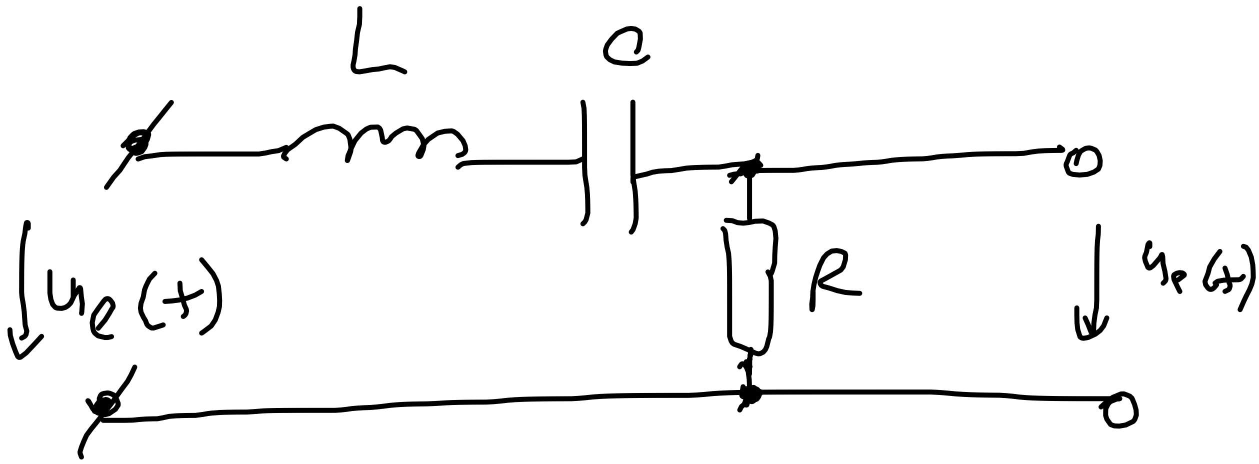
$$u_E(t) \longrightarrow \boxed{TP_{R,C}} \longrightarrow u_A(t) = u_C(t)$$



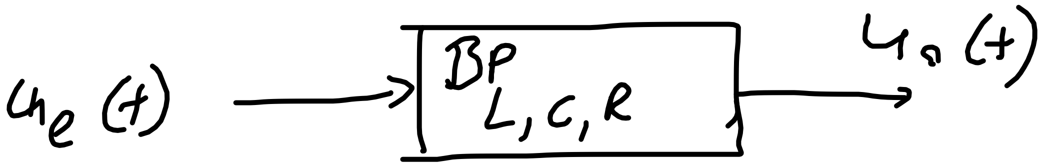
2. Hochpass

System:





System:



3. Bandpass

Idealisiertes Verhalten!

Sei:

$$u_e(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega), \quad \text{d.h.}$$

$$u_e(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

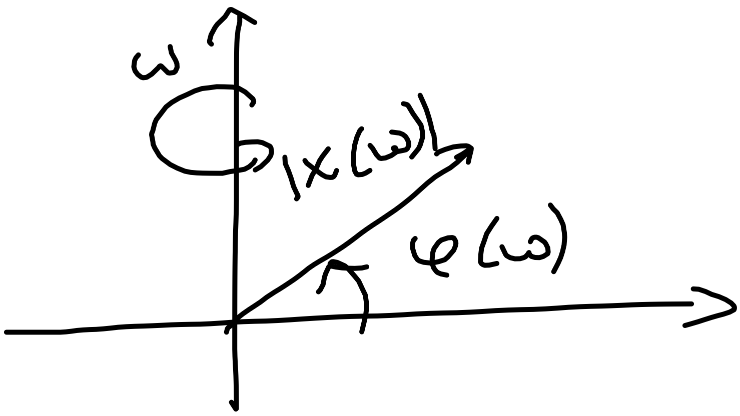
komplexe Amplitude

d.h.

$$u_e(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)} \cdot e^{j\omega t}\, d\omega =$$

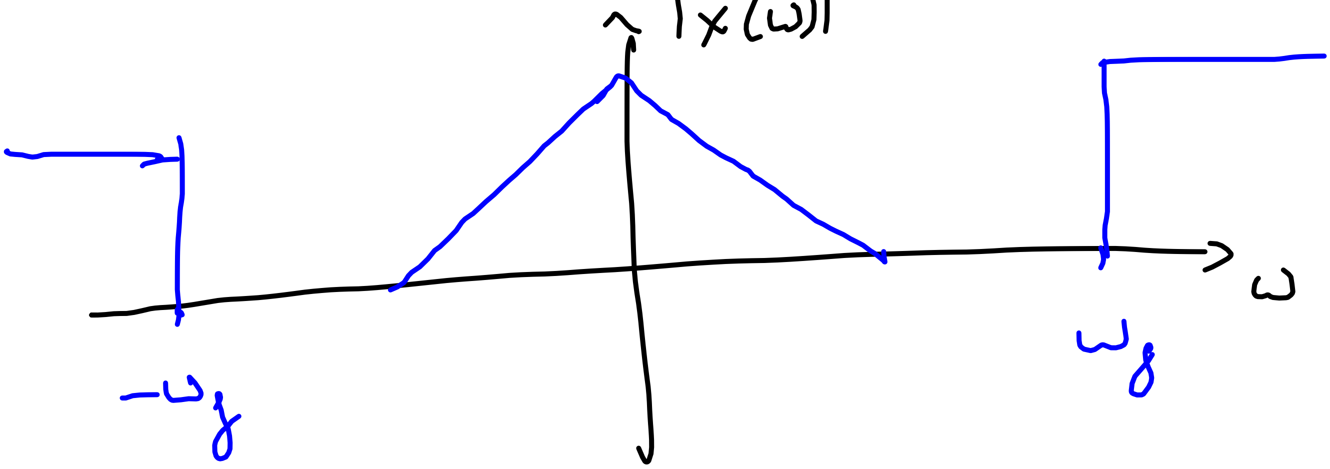
$$= \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|\, e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}\, d\omega$$

$$X(\omega) = |X(\omega)| \, e^{j\varphi(\omega)}$$



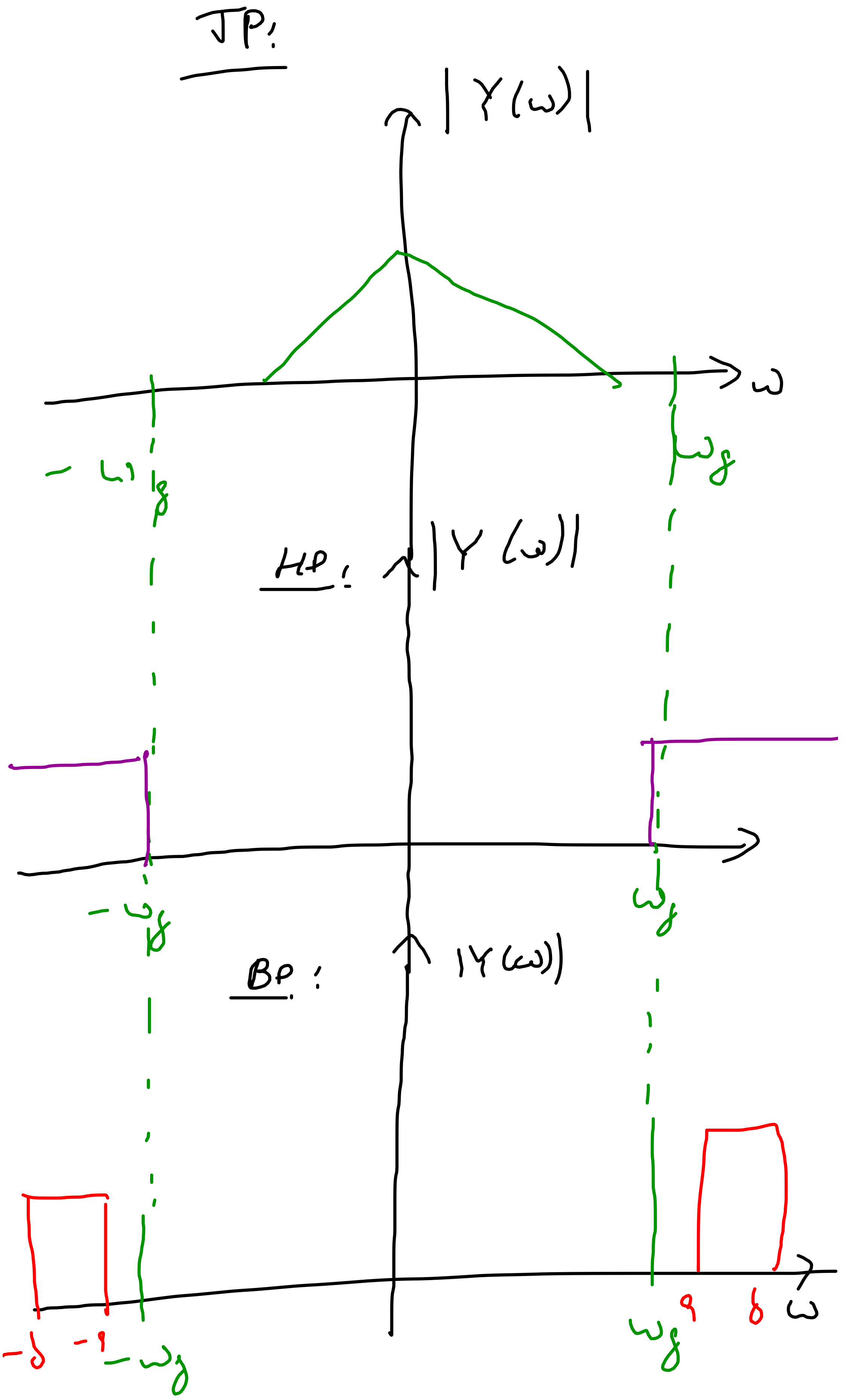
Wir nehmen jetzt mal eine ganz bestimmte Spannung $u_e(t)$ (Eingangsspannung), die, die sich aus Schwingungen und folgender.

Amplitudenspektrum zusammengesetzt!

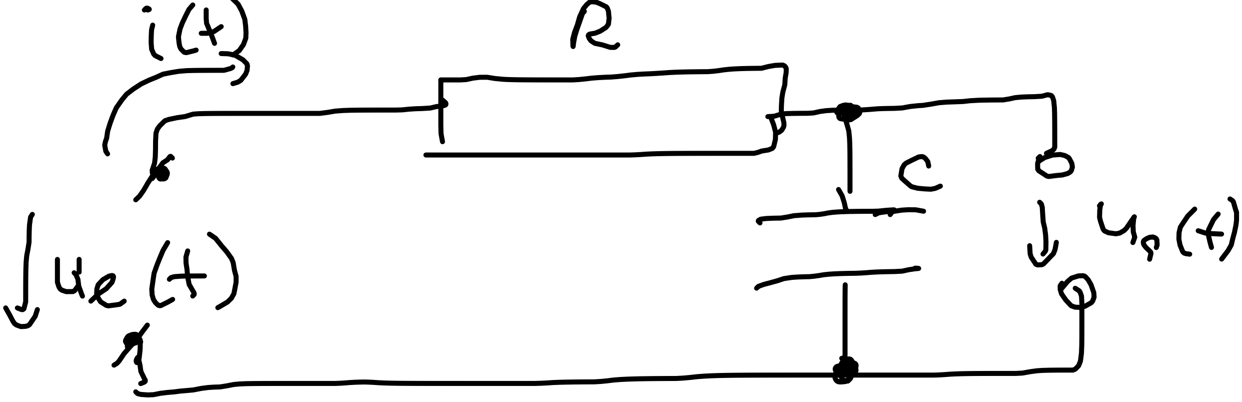


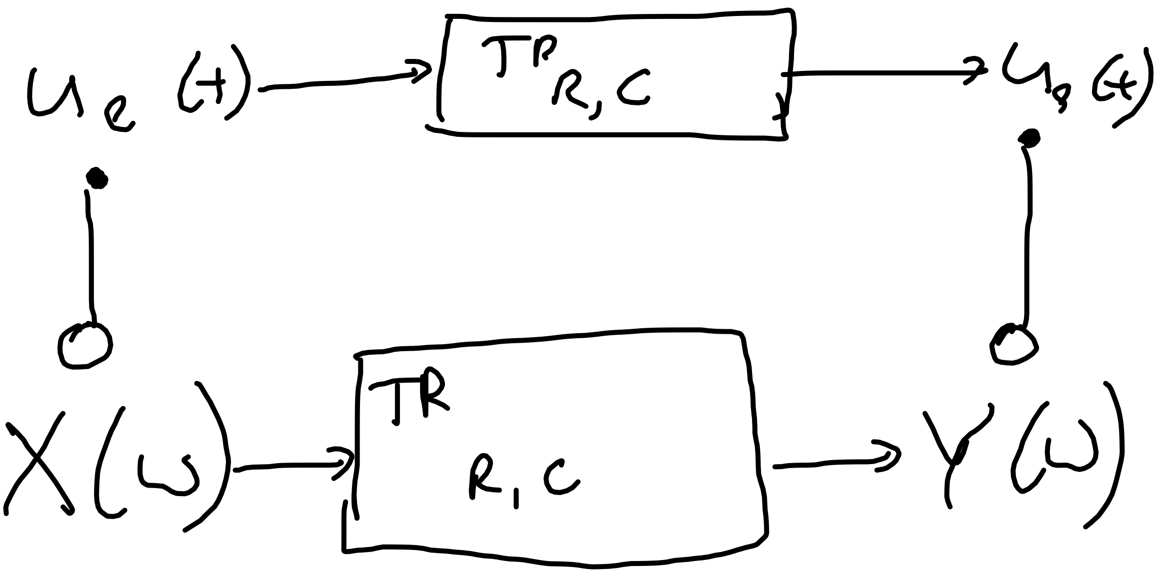
Bei entsprechender Wahl von R, C, L gilt für

$$u_a(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)| e^{j(\omega t + \varphi_Y(\omega))} \, d\omega;$$


TP:
|Y(ω)|
ω
$-\omega_g$
ω_g
HP:
|Y(ω)|
$-\omega_g$
ω_g
BP:
|Y(ω)|
$-b$
$-a$
$-\omega_g$
ω_g
a
b
ω

Wir rechnen das jetzt für den TP genau nach!





d.h.

$$u_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$u_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

(1) Aufstellen eines mathematischen Modells zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen $u_e(t)$ und $u_a(t)$

$\Rightarrow$ E-Technik:

1) Maschenregel:

$$u_e(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

2) Ohm'sches Gesetz:

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

3) Kondensatorgleichung:

$$u_C(t) = \int \frac{i(t)}{C}\, dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{u}_C(t) = \frac{i(t)}{C}$$

(1,2)

$\rightarrow u_e(t) = R \cdot i(t) + u_c(t)$

3) $\rightarrow$

$$u_e(t) = R \cdot C \cdot \dot{u}_c(t) + u_c(t)$$

DGL 1. Ordnung

bzgl. $u_c(t) = u_a(t)$

<u>Ziel:</u> die Gl. lösen

2) Transformation in den Frequenzbereich:

ZB: $u_e(t) = R \cdot C \cdot \dot{u}_c(t) + u_c(t)$

FT

FB: $X(\omega) = R \cdot C \cdot \left[(j\omega) Y(\omega)\right] + Y(\omega) =$

$= \left(RCj\omega + 1\right) Y(\omega)$

Lineare Gleichung

3) Aufstellen und analysieren der sog. Übertragungsfunktion:

$$\Rightarrow Y(\omega) = \underbrace{\left[\frac{1}{1 + j\omega RC}\right]}_{G(\omega)} \cdot X(\omega)$$

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot X(\omega)$$

Übertragungsfunktion

Ausgang = Übertragungsfkt. · Eingang

<u>Def:</u> $G(\omega) = \dfrac{1}{1 + RCj\omega}$

heißt Übertragungsfunktion des TP:

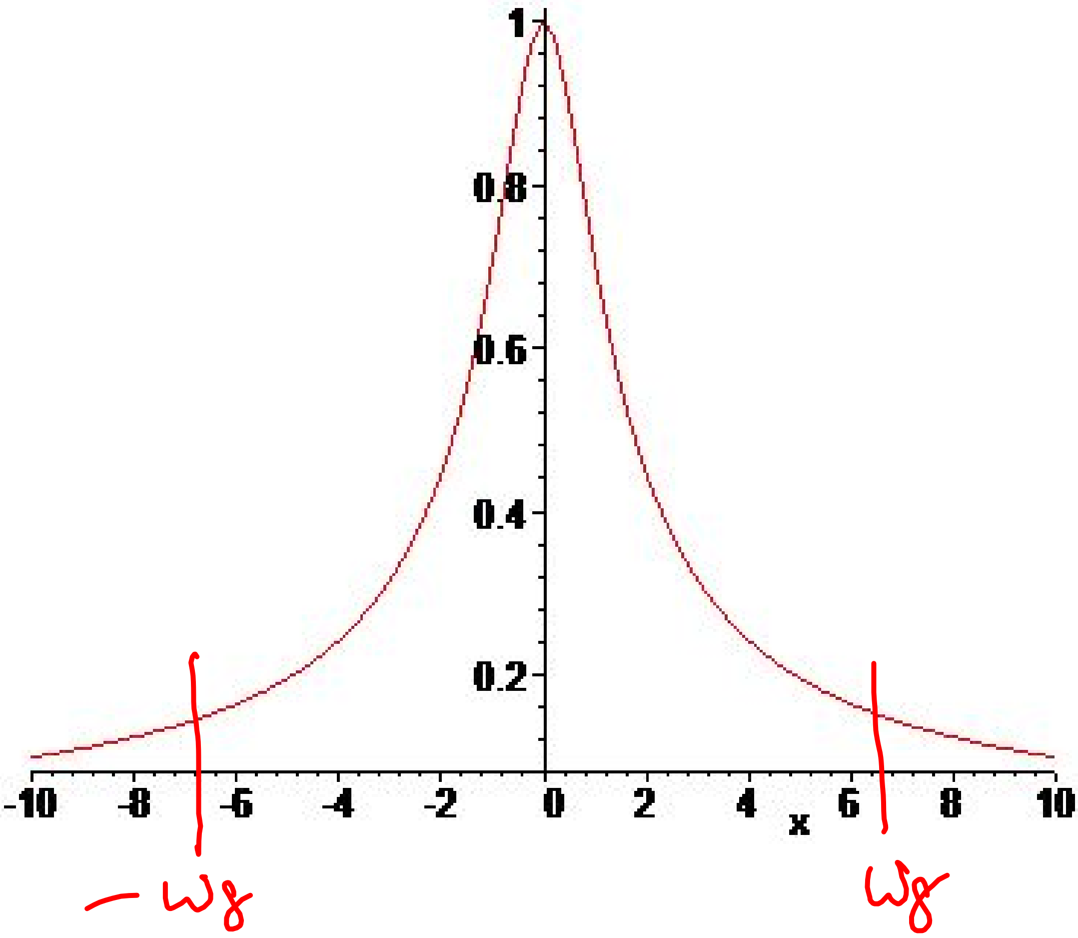
$$\begin{tikzcd} u_e(t) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\circ\!-\!\bullet"] & \boxed{TP} \arrow[r] & u_a(t) \arrow[d, dash, "\circ\!-\!\bullet"] \\ X(\omega) & & Y(\omega) \end{tikzcd}$$

$$u_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$|G(\omega)| = \left| \frac{1}{RCj\omega + 1} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + 1}}$$



d.h.

$$|G(\omega)| \approx 0 \quad \forall |\omega| > \omega_g$$

$$|G(0)| = 1$$

(Tiefpass!)

4) <u>Analyse von $|Y(\omega)|$</u>

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$|Y(\omega)| = |G(\omega) \cdot X(\omega)| =$$
$$= |G(\omega)| \cdot |X(\omega)|$$

$$\forall |\omega| \geq \omega_g :$$

$$|Y(\omega)| \simeq 0$$