HTW

Probe-Klausur

(und klausurvorbereitende Übungsaufgaben)

Angewandte Mathematik MST

Dauer : 100 Minuten Prof. Dr. B. Grabowski

Name:

Matr.Nr.:

Erreichte Punktzahl:

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

Insgesamt haben Sie 4 Aufgaben – je eine aus den Komplexen I- IV - zu lösen!
Zu jedem der Komplexe I - IV gibt es 2 Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit.

Lösen Sie zu jedem Komplex jeweils **nur eine Aufgabe** (Ihrer Wahl), achten Sie dabei auf die zu erreichende Punktezahl. Es wird nur eine Aufgabe bewertet! Wenn Sie mehr Aufgaben zu einem Komplex lösen, wird nur die mit der erreichten höheren Punktzahl in die Bewertung einbezogen!

Viel Erfolg
B.Grabowski

PS: Zu den Komplexen sind jeweils mehr als 2 Aufgaben angegeben. Diese Gesamt-Anzahl steht in Klammern. Nutzen Sie diese Aufgaben zur Klausurvorbereitung!

I. Fourier-Reihen und Fourier-Integral (1 von 2 (3))

1. Aufgabe (5 Punkte a) = 2P, b)= 1, c) = 2P)

a) Zerlegen Sie die Funktion $f(x) = t$ für $0 \leq x < \pi$, $f(x) = f(x+k\pi)$ für $k \in Z$
in eine komplexe Fourier-Reihe!
Geben Sie die Reihe bis n = 6 (Grundschwingung + 1.-5.te Oberschwingung) (inklusive Offset) an!

(Skizzieren Sie zunächst f(x) und überlegen Sie sich, wie groß die Periode und wie groß die Grundkreisfrequenz ω_0 ist .)

b) Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum für n=-6 bis n=6!

c) Geben Sie die Fourier-Reihe für f(x) in reeller Form bis n=6 an und Skizzieren Sie die Linienspektren bis n=6!

2. Aufgabe (5 Punkte, a) = 3P, b) = 1P, c) = 1P)

Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte F(ω) von f(t)!
b) Geben Sie das Amplitudenspektrum |F(ω)| an und skizzieren Sie diese Funktion!
c) Geben Sie die reelle Form des Fourier-Integrals von f(t) an!

3. Aufgabe (5 Punkte, a) = 2P, b) = c) = d) = 1P)

a) Welche Funktion f(t) besitzt das folgende Spektrum $F(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & sonst \end{cases}$?

b) Welche Symmetrieeigenschaften besitzt f(t) ?
c) Skizzieren Sie f(t)!
d) Geben Sie die reelle Form des Fourier-Integrals für f(t) an!

II. Fourier-Transformation und lineare Filter (1 von 2 (3))

4. Aufgabe (5 Punkte, a) = 1P, b)= 1P, c)= 2P, d) = 1P)

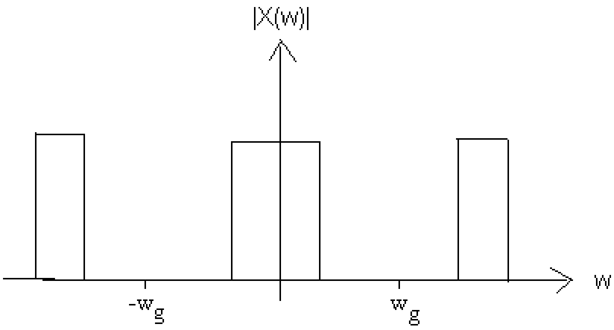
Gegeben sei folgende Differentialgleichung (linearer Filter): m y'(t) + y(t) = x(t) (m > 0)

a) Transformieren Sie die Dgl. in den Frequenzbereich und Berechnen Sie die Übertragungsfunktion G(ω)!
Verwenden Sie dazu folgende Transformationen: y(t) •—° Y(w) und x(t)•—°X(w)

b) Berechnen und Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum |G(w)| !

c) Berechnen Sie die Grenzfrequenzen ω_g, für die gilt: $|G(\omega)| \leq 10^{-4}$!

d) Analysieren Sie das Übertragungsverhalten der o.g. Dgl., was passiert mit einem Eingangssignal x(t), welches folgendes Amplituden-Spektrum besitzt bzw. welches Amplituden-Spektrum besitzt dann das Ausgangssignal y(t)?



5. Aufgabe (4 Punkte, a) = b) = 2P)

a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation f(t) ∘—• F(ω) :
Verschiebungssatz im Zeitbereich (Verschiebung im Zeitbereich bewirkt Dämpfung im Frequenzbereich) :
$\forall a \in R, a > 0$ gilt: f(t) ∘—• F(w) $\Leftrightarrow f(t-a)$ ∘—• $F(w)e^{-jwa}$

b) Die Fourier-Transformierte der Heavisside-Funktion u(t) ist

$$U(\omega) = \frac{-j}{2\pi\omega}$$

Geben Sie unter Verwendung von U(ω) die Fourier-Transformierte der Funktion $f_1(t)$ an!

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & falls \quad 0 \leq t < 1 \\ 2 & falls \quad 1 \leq t < 2 \\ -1 & falls \quad 2 \leq t < 4 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

6. Aufgabe (2 Punkte)

Ordnen Sie jeder der Funktionen in a) bis d) das zugehörige Spektrum zu!

Funktionen:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad 0 < x \le \pi \\ -1 & \textit{für} \quad \pi < x \le 2\pi \end{cases}$, f(x) = f(x+k2π) für k $\in$Z

b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \textit{für} \quad -\pi/2 < x \le \pi/2 \\ 0 & \textit{für} \quad \pi/2 < x \le 3/2\pi \end{cases}$, f(x) = f(x+k2π) für k $\in$Z

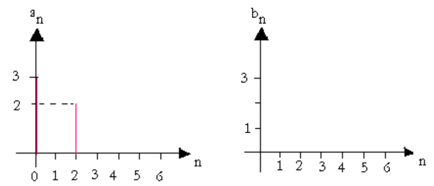
c) $f(x) = 1{,}5 + 2\cos(2\omega_0 x)$

d) $f(x) = Ax$ für $0 < x \le 1$ und f(x) = f(x+k) für k $\in$Z

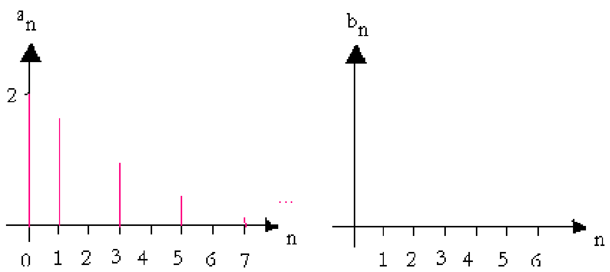
e) $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$, $t \neq 0$

Spektren

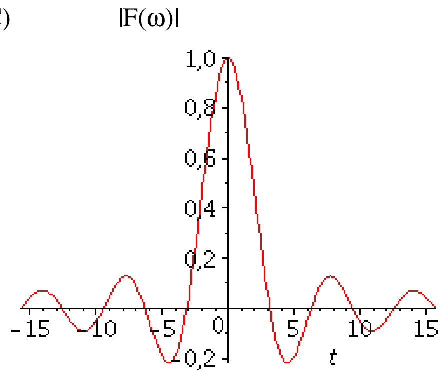
A)



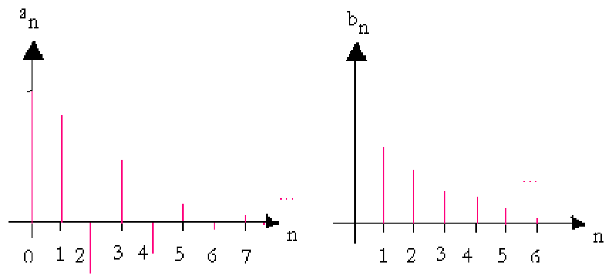
B)



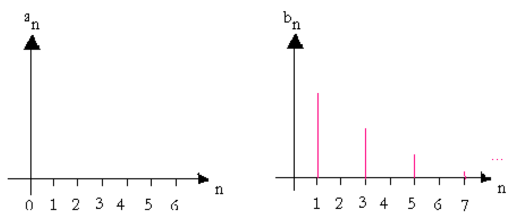
C)



D)



E)



III. Laplace-Transformation (1 von 2 (4))

7. Aufgabe (5 Punkte, a) = b) = 2,5P)

Wie lautet die Gleichung der Funktion im Zeitbereich, die folgende Laplace-Transformierte besitzt?

$a)\quad F(s) = \dfrac{3s}{s^2 + 2s - 3}$ b) $e^{-2s}\dfrac{(s+1)(s^2-1)}{s^4-1}$

8. Aufgabe (5 Punkte a) = 3P, b) = 2P)

a) Geben Sie unter Verwendung der Tabelle der LT und der Transformationssätze die Laplace-Transformierte folgender Funktion an:

$$f(t) = e^{-5t}\sin(2t-3)$$

b) Welchen Wert besitzt die Urbildfunktion f(t) an der Stelle t=0, die die Laplace-Transformierte $F(s) = \dfrac{2s^2 - 3s + 9}{4s^3 - 2s + 13}$ besitzt?

9. Aufgabe (5 Punkte, a) = b) = 2,5P)

a) **Welche Funktionen sind gefaltet worden**, um folgende Laplace-Transformierte zu erhalten:

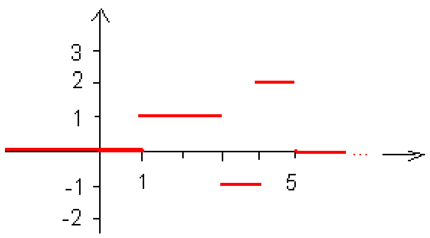
$$F(s) = \frac{3s-1}{s^3 + 9s + s^2 + 9}$$

b) Wie lautet die Gleichung der Funktion im Zeitbereich, die folgende Laplace-Transformierte besitzt: $\mathrm{F(s)} = \dfrac{s+2}{(s^2+2s-3)(s+1)}$? **Verwenden Sie die Methode der Partialbruchzerlegung!**

10. Aufgabe (2 Punkte)

Die Laplace-Transformierte der Heaviside-Funktion u(t) = $\begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ lautet:

1/s für s >0. Geben Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktion an:



IV. Lösen von Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation (1 von 2 (3))

11. Aufgabe (5 Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichung mittels Laplace-Transformation:

$y''(t) + y'(t) + 2y(t)=0$ AB : $y(0)=1$, $y'(0)=0$

12. Aufgabe (5 Punkte)

Lösen Sie folgendes Differentialgleichungssystem:

$y'+z' = x$
$2y'+z'= 2x$ $y(0)=z(0)=0$

13. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie die Lösung y(x) folgender Differentialgleichung mittels Laplace-Transformation!

$$3y'(x)+4y(x)=\frac{1}{2}, \text{ Anfangsbedingung: } y(0) = 0$$