Die Gesamtheit der EWe nennt man das Spektrum der Matrix.

<u>Satz:</u> Sei A eine Matrix mit EWen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

Dann gilt:

(1) Die Eigenwerte der Matrix $(A + \mu E)$ sind $\lambda_1 + \mu;\ \lambda_2 + \mu;\ \lambda_3 + \mu \ldots$

(2) Die Eigenwerte der Matrix $\alpha \cdot A$ sind $\alpha \cdot \lambda_1$, $\alpha \cdot \lambda_2$, $\alpha \cdot \lambda_3$ ....

(3) Die Eigenwerte von A^k, $k \in \mathbb{N}$ sind λ_1^k, λ_2^k, λ_3^k ....

(3) A invertierbar

$\Updownarrow$

0 ist kein EW von A

(4) Ist A invertierbar, gilt (3) für $k \in \mathbb{Z}$; insbesondere hat A^{-1} die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots$

Weder für $A \pm B$
noch für $A \cdot B$ gibt
es einfache Regeln

Sei A eine symmetrische $(n \times n)$ Matrix, d.h.

$$A^T = A$$

<u>Satz</u>: Sei A eine $(n \times n)$ Matrix symmetrische. Dann gilt:

(1) Alle Eigenwerte von A sind reell.

(2) Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden

Eigenvektoren sind paarweise orthogonal.

(3) Der Rang von A ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Eigenwerte.

Satz: Spektralzerlegung

Sei A eine symmetrische $(n \times n)$ Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Dann existiert eine $(n \times n)$ Matrix P, sodass gilt:

$$P^{-1} A P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

bzw.:

$$A = P \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \cdot P^{-1}.$$

Dabei sind λ_i die (von Null verschiedenen) Eigenwerte von A.

Die Spaltenvektoren der Matrix P bestehen aus paarweise orthonormalen (d.h. orthogonalen und auf Länge 1 normierten)

Eigenvektoren von A.

Die Reihenfolge der Eigenwerte in $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ stimmt mit der Reihenfolge der zug. Eigenvektoren in der Matrix P überein.