Gauß - Algorithmus zur Bestimmung vom Rang einer Matrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix.

Diese Matrix wird unter Verwendung der folgenden Ops auf Dreiecksgestalt umgeformt:

(1Z) Vertauschung zweier Zeilen

(1S) Vertauschung zweier Spalten

(2S) Multiplikation einer Spalte mit einer beliebigen reellen Zahl $\lambda \neq 0$

(2Z) Multiplikation einer Zeile mit $\forall \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$

(3Z) Addition einer Zeile eines Vielfachen der anderen Zeile

(3S) Addition einer Spalte eines V------ Spalte.

Dann wird wie folgt vorgegeben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

① Wenn $a_{11} = 0$, dann vertausche die Zeile so, dass nach Vertauschung an der Stelle (1,1) keine 0 ist.

Nun ist $a_{11}^* \neq 0$.

Die erste Zeile in diesem Schritt nennt man Pivot-Zeile; a_{11}^* heißt Pivot-Element.

((17), (15))

(2) $A_1^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix}$

$$L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{a_{21}^*}{a_{11}^*} \cdot L_1$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{a_{31}^*}{a_{11}^*} \cdot L_1$$

$$L_4 \longleftarrow L_4 - \frac{a_{41}^*}{a_{11}^*} \cdot L_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_m \longleftarrow L_m - \frac{a_{m1}^*}{a_{11}^*} \cdot L_1$$

(3z)

③

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \cdots & \tilde{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

Man wiederholt jetzt die Schritte ① - ③ mit der Pivot - Zeile 2 und dem Pivot - Element $\tilde{a}_{22}^*$

u. s. w.

bis

Bsp!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: A$$

$rg(A)$?

$a_{11} = 0$:

$z1 \longleftrightarrow z2$

Pivot-Element

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$z3 \leftarrow z3 - 2 \cdot z1$ Pivot-

$z4 \leftarrow z4 - 3 \cdot z1$ zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$Z4 \leftarrow Z4 - Z2$

Pivot-Zeile

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$Z4 \leftarrow Z4 - Z3$

Pivot-Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Dreiecksform

$\Rightarrow \operatorname{Rang} A = \operatorname{rg}(A) = 4$

$A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

voller Rang!

Def: Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit vollem Rang ($rg(A) = n$) heißt regulär; ansonsten singulär.

Satz: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

invertierbar

$\Updownarrow$

A ist regulär.

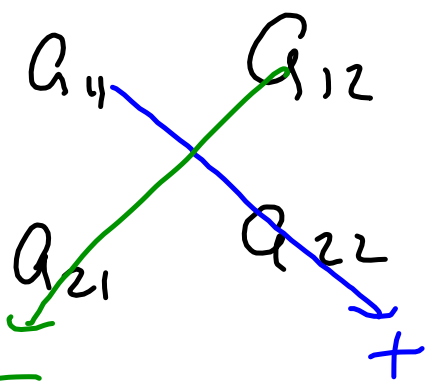
Determinante

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratisch

Def: (1) $n=2$:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$



$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$\in \mathbb{R}$ (ok 2.4.)

(2) $n = 3$

$$\det B = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$$= b_{11} b_{22} b_{33} + b_{12} b_{23} b_{31} +$$

$$+ b_{13} b_{21} b_{32} - b_{13} b_{22} b_{31} -$$

$$- b_{11} b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} b_{33}$$

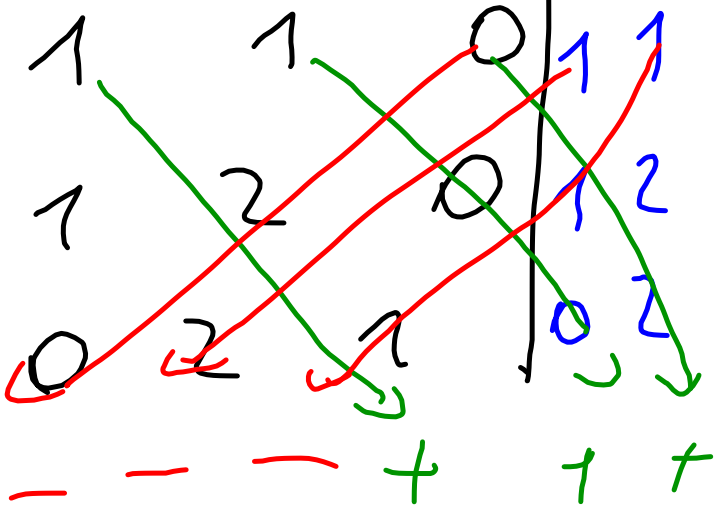
(1), (2) heißt man

Regeln von Sarrus

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$



$$= 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 2 - 0\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$

Def: $\forall n \in \mathbb{N}$: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann für die Determinante von A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} D_{11} +$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} D_{12} + \dots +$$

$$+ a_{1k} \cdot (-1)^{(1+k)} D_{1k} + \dots +$$

$$+ a_{1n} \cdot (-1)^{1+n} \cdot D_{1n},$$

wobei D_{ik} die Determinante der $(n-1)\times(n-1)$ Matrix ist, die entsteht, wenn man in A die i-te Zeile und die k-te Spalte wegstreicht.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

4×4

$$= 0 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+0\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&2\\3&1&0\end{vmatrix}+$$

$$+1\,(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&0\\3&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&1\\2&0&2\\3&1&0\end{vmatrix}-$$

$$-\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&0\\3&1&1\end{vmatrix}$$ (=)

Zwiększenie wiersz 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 1 -$$

$$- 1\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 0 =$$

$$= 6;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1$$

$$- 1 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= 2;$$

$$\ominus - 6 - 2 = -8$$

Satz: Laplace'scher Entwicklungssatz:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Matrix, $n \in \mathbb{N}$ (quadratisch).

Dann gilt:

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \cdot D_{kl} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pq} (-1)^{p+q} \cdot D_{pq},$$

wobei:

D_{xy} die Determinante der $(n-1)\times(n-1)$ Matrix ist, die entsteht, wenn man in A x-te Zeile und y-te Spalte wegstreicht.

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} \cdot D_{kl} =$$

"Entwicklung nach der k-ten Zeile"

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pq} (-1)^{p+q} \cdot D_{pq},$$

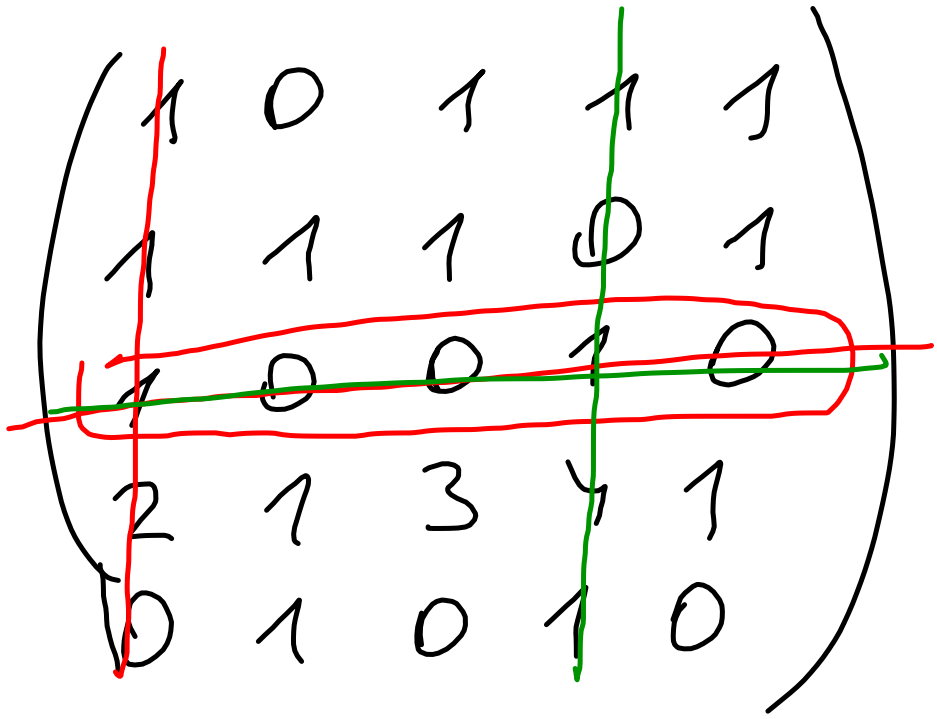
"Entwicklung nach der q-ten Spalte".

Bemerkung: Als Entwicklungszelle bzw. Entwicklungsspalte wird die Zeile bzw. Spalte

gewählt, die die meisten Nullen hat.

Bsp:

$B =$



$\det B = ?$

Die 3. und 5. Zeile haben je 3 Nullen.

→ z.B. Entw. nach der 3. Zeile:

$$\det B = 1 \cdot (-1)^{3+1} D_{31} + 1 \cdot (-1)^{3+4} D_{34} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (=)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ 4x4

$$= 1(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1+0 & \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$+1(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1=1 & \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$= -[1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 4 - 1\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 1] - [0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 1] =$$

$$= -2 - 2 = -4$$

4x4

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= -4 - 0 = -4$$

$$\det B = -4$$

Satz: (1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär (quadratisch mit vollem Rang).
$\det A \neq 0$.

(2) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ singulär
($\text{Rang} < n \Leftrightarrow$ Zeilen von A sind linear abhängig
$\Leftrightarrow$ Spalten von A sind linear abhängig).
Dann: $\det A = 0$

Also! Wenn

$\det A \neq 0$; dann:

A hat vollen Rang;

A regulär;

A invertierbar!

(Später: LGS $A\bar{x} = \bar{b}$ eindeutig lösbar für alle Vektoren $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$)

Berechnung von inverser Matrix zu A mit Gauß-Algorithmus

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Wenn A regulär ist

$(\det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rg} A = n)$,

dann $\exists! B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n.$$

$B = A^{-1}$ Inverse zu A

Ist A singulär

$(\operatorname{rg} A < n \iff \det A = 0)$,

so gibt es keine Inverse zu A.

Sei nun A regulär.

Man berechnet die Inverse wie folgt:

Wir schreiben neben A die Einheitsmatrix der gleichen Dimension an:

$(A \mid E) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$

Mit dem Gauß-Algorithmus mit nur Zeilenoperationen (1Z), (2Z), (3Z) wandeln wir diese erweiterte Matrix $(A \mid E)$ so um, dass links (an der Stelle von A) die Einheitsmatrix steht.

Dann steht in der anderen Hälfte der erweiterte

Methode zu A: die Inverse $(E \mid A^{-1})$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$\det A = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ A regulär

$\Rightarrow$ A invertierbar

Eigentliche Berechnung der Inverse!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$z2 \leftarrow z2 - z1$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$z_3 \leftarrow z_3 - 2 \cdot z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$z_1 \leftarrow z_1 - z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$(E \mid B)$$

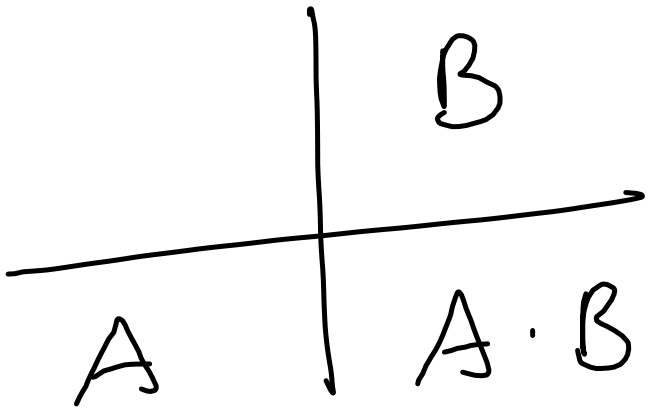
$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

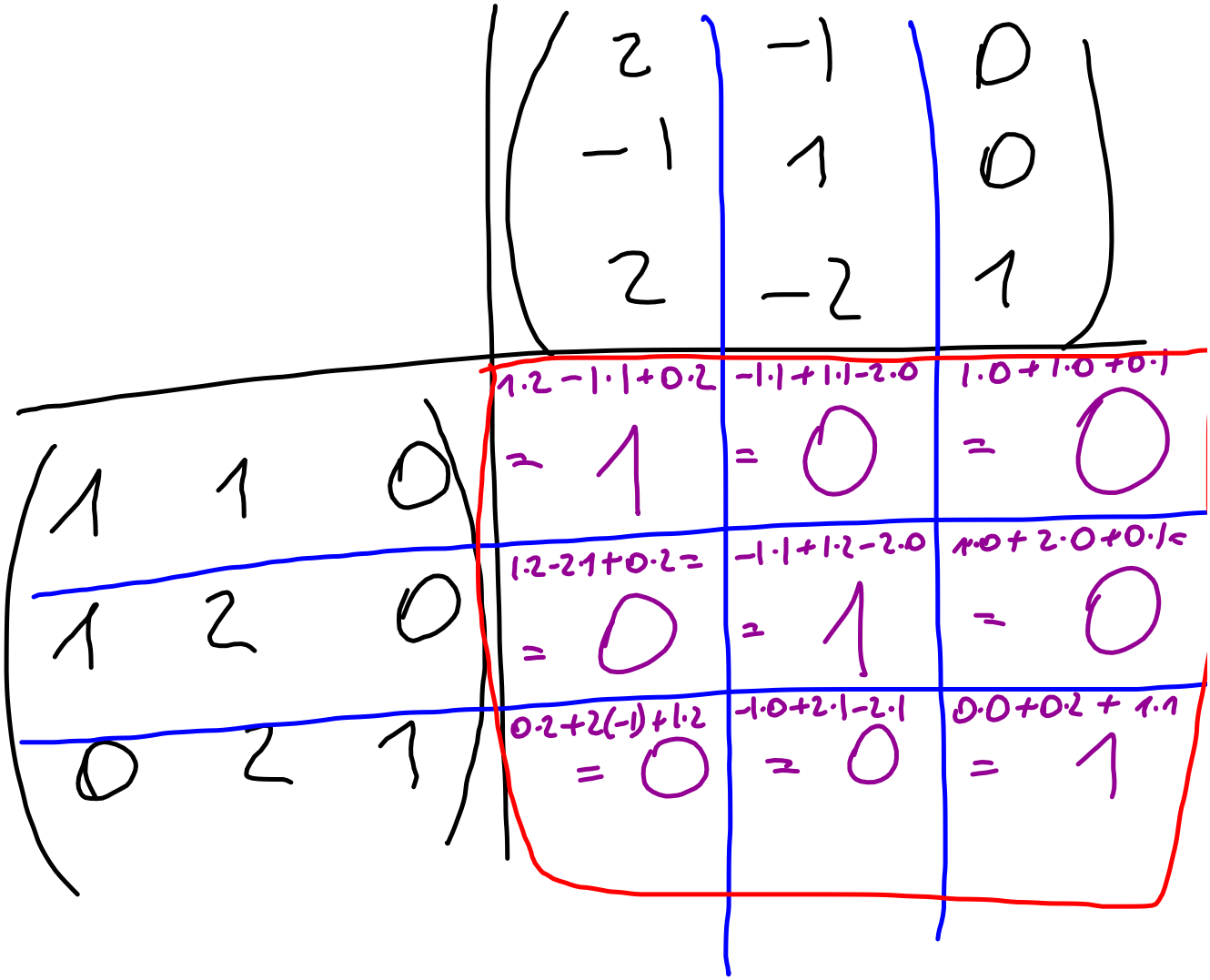
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \overset{?}{=} B \cdot A \overset{?}{=} E$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$





$A \cdot B = E$

Analog $B \cdot A = E$,

also $B = A^{-1}$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

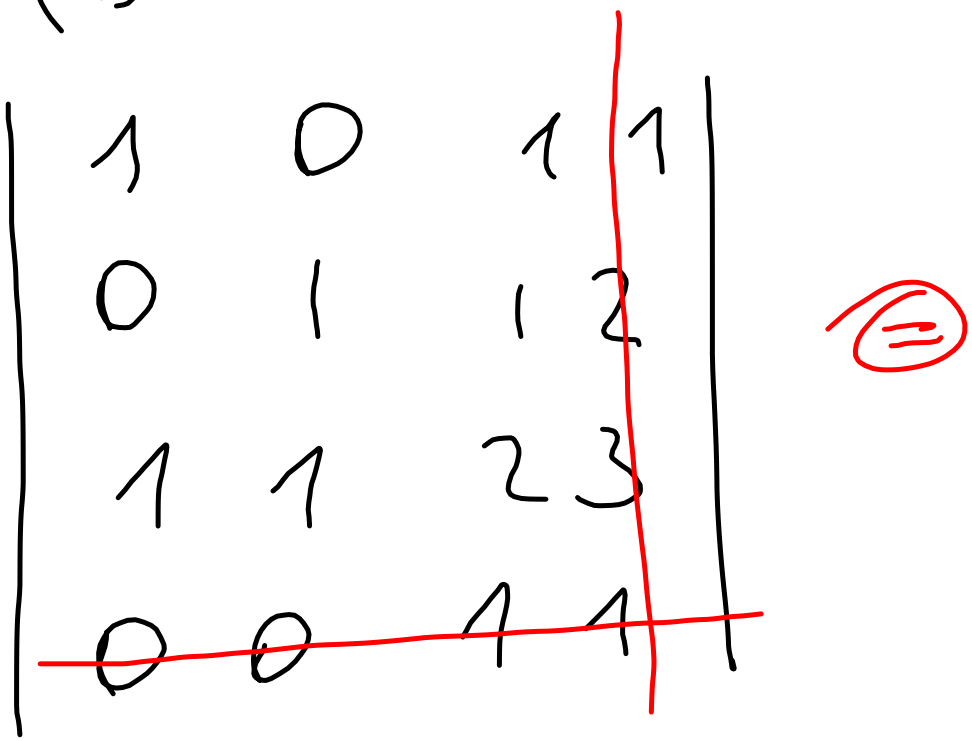
(1) $\det A$?

Ist $\det A \neq 0$

$\Downarrow$

2) A^{-1} ?

(1)



$4 \times 4 \rightarrow$ Laplace'sche Entwicklung nach 1. Spalte oder nach 4. Zeile

$$= 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$+ \; 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -[3 + 0 + 0 - 1 - 2 - 0]$$

$$+ [2 + 0 + 0 - 1 - 1 - 2 \cdot 0] = 0$$

$\Rightarrow$ singuläre Matrix, keine Inverse!

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

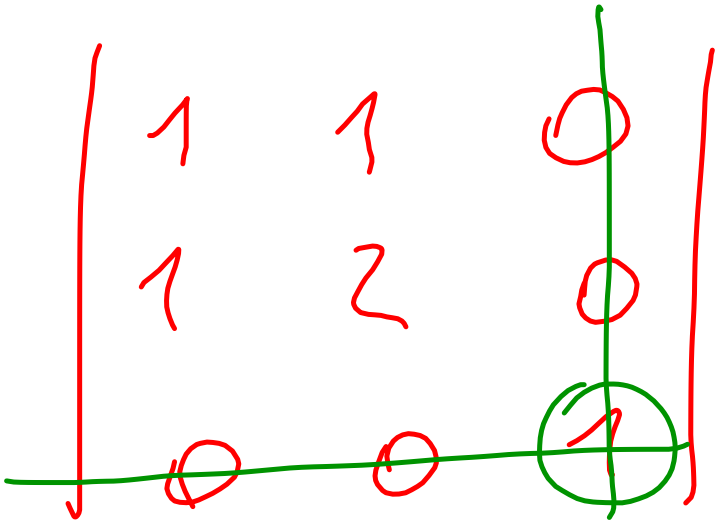
4×4

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Spalte 4

$$= 1 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

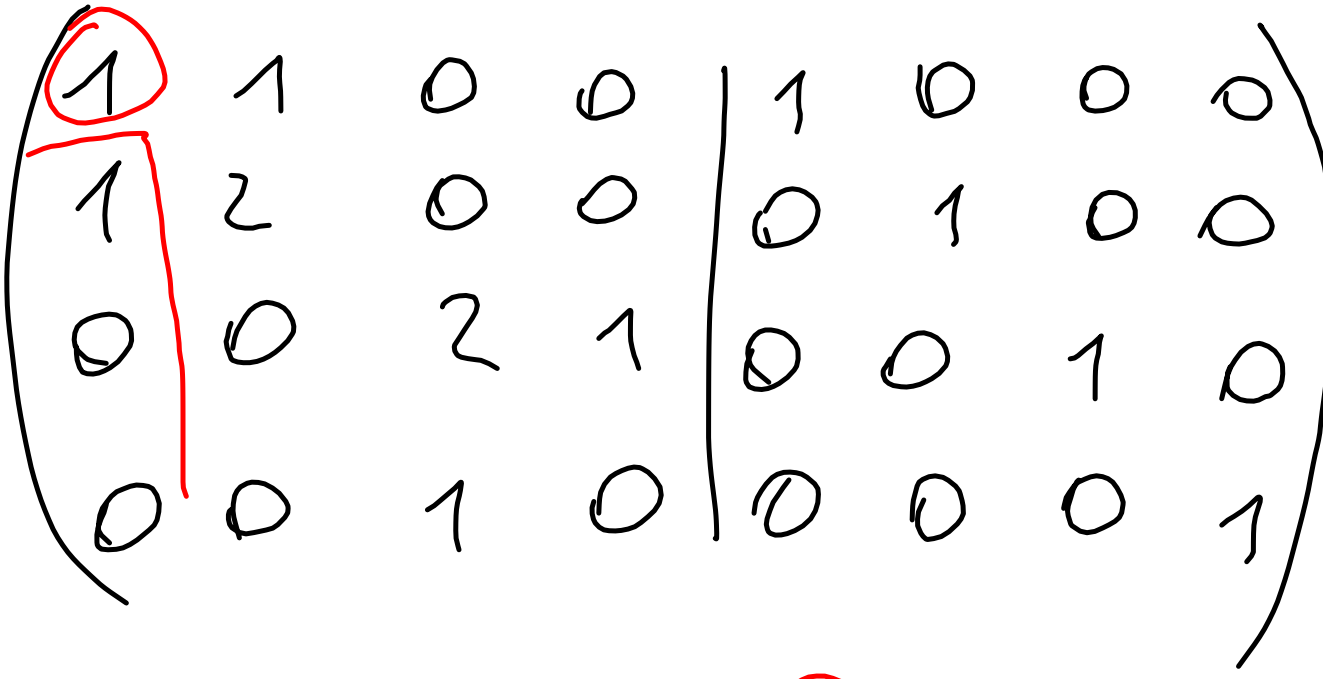
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$



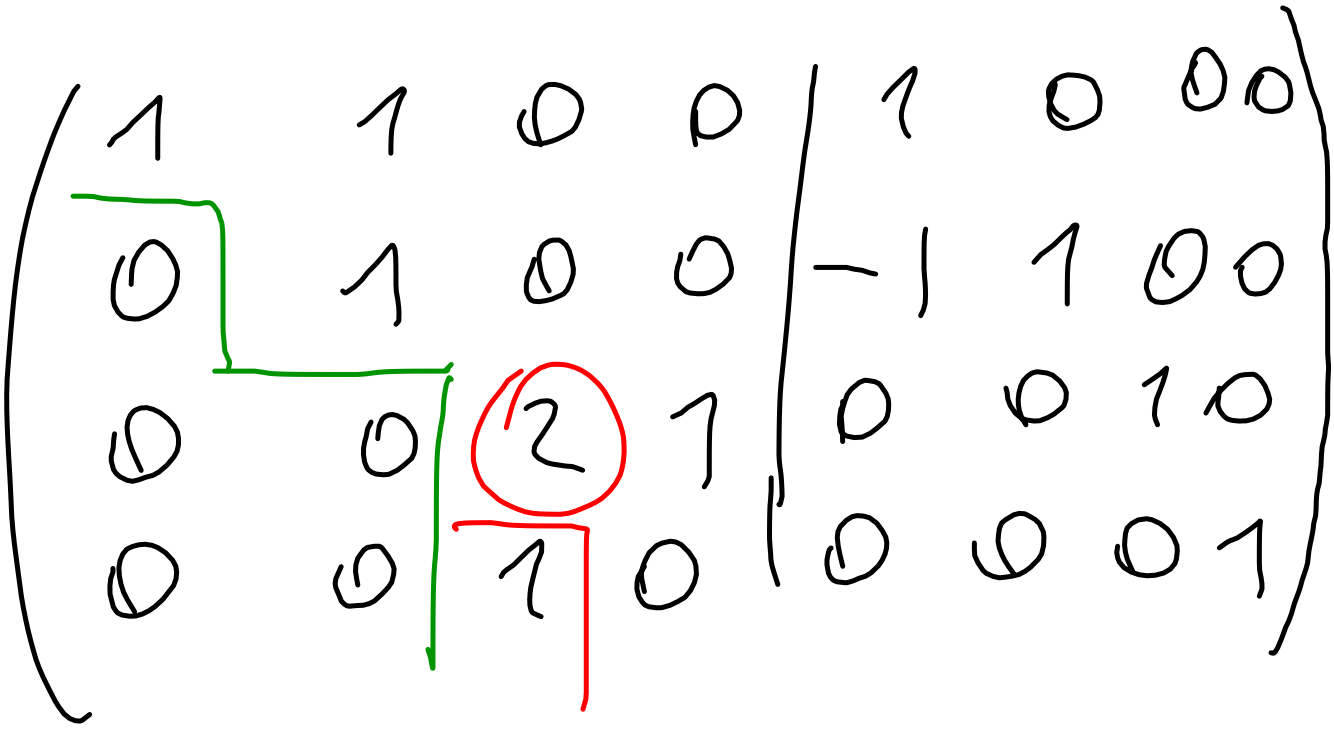
$$= - \cdot 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= - [1 \cdot 2 - 1 \cdot 1] = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists B^{-1}$$



$$z_2 \leftarrow z_2 - z_1$$



$z_3 \leftrightarrow z_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$z_4 \leftarrow z_4 - 2 \cdot z_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$Z1 \leftarrow Z1 - Z2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Satz: Eigenschaften der Determinante:

(1) $\det(A \cdot B) =$

$= \det A \cdot \det B$

(2) $\det\left(\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn})\right) =$

$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

(3) A sei eine obere (untere) Dreiecks-matrix (d.h. $a_{ij} = 0$, $i > j$) (bzw. $a_{ij} = 0$, $i < j$).

(1) Dann:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

(4) A regulär;

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

(5) $\det(A^T) = \det A$