30. 04. 2015

Klausur:
2. Sept. - Mo
Di; Mi; Do

Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Matrix von Typ $m \times n$

Zeilen

Spalten

a_{ij} i,j -- Element

i-te Zeile

j-te Spalte

A, B

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

Wenn $m = n$, dann heißt die Matrix quadratisch.

Def: $B = A^T$ heißt Transponierte zu A, falls

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j$$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

a_{ij} $i = 1,2,3$ $j = 1,2$

$$A^T = B = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

$a_{ij} = b_{ji}$ $\qquad a_{12} = 2 = b_{21}$

$3 = a_{21} = b_{12}$

$5 = a_{31} = b_{13}$

$6 = a_{32} = b_{23}$

Folgerung:

$$(A^T)^T = A$$

Sei A nun quadratisch

Def: Falls

$$A^T = A \quad (A \text{ quadr.}),$$

heißt A "symmetrisch"

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

symmetrisch

In symmetr. Matrizen gilt:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\forall i,j = 1, \ldots, n$$

Def: Falls A quadratisch und

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j,$$

dann heißt A Diagonalmatrix.

Def: Die Diagonalmatrix, die nur 1 auf der Diagonale hat, heißt Einheitsmatrix

Schreibweise:

$$\operatorname{diag}(\underbrace{1,2,3,0,5}_{5 \text{ Einträge}}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

Einheitsmatrix:

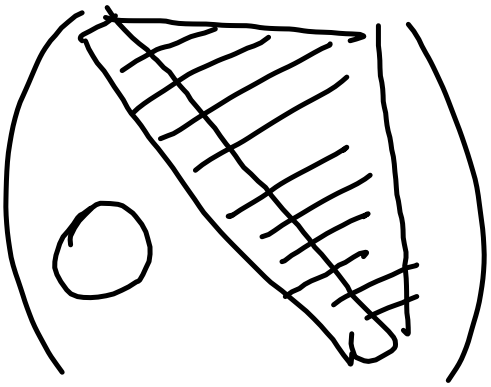
$$E_n = I_n = E = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Dimension

$$E_5 = I_5 = E = I =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

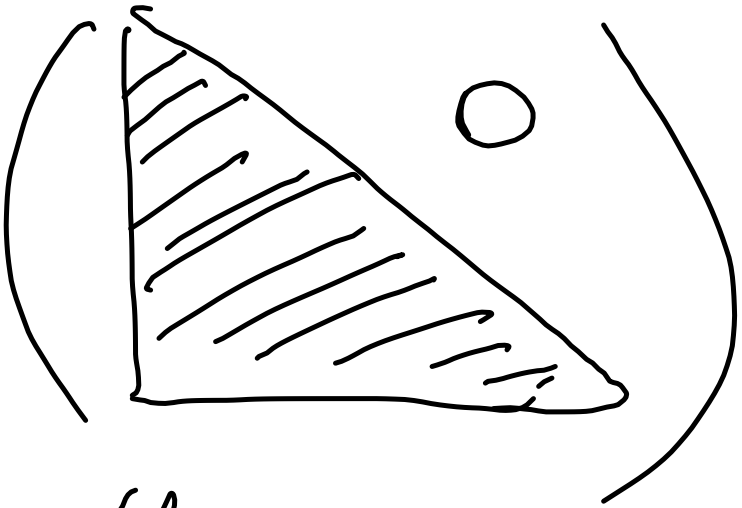
Weitere besondere Matrizen:



$a_{ij} = 0$

für $i > j$

Obere Dreiecksmatrix



$a_{ij} = 0$

für $i < j$

Untere Dreiecksmatrix

Rechenoperationen

$\pm$: $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$C = A \pm B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$\forall i = 1, \dots, m$

$\forall j = 1, \dots, n$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$A+B$ ↓ Dimension!

$A+C$ ↓

$A+D$ ↓

- - - - - - - -

- - - - - - -

Nur C + D existiert!

$$C + D =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 2+4 & 3+6 \\ 4-1 & 5-2 & 6-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(3) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

(4) $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} \; \exists B \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A + B = (0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

↑
Nullmatrix.

Denn: $B = -A$

$\forall$ "Für alle"

$\exists$ "Existiert"

$\exists!$ "Existiert genau eins..."

Def. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \left(\lambda \cdot a_{ij}\right)_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,n}}$$

z.B.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$-A = (-1)A$$

$$1 \cdot A = A$$

$$0 \cdot A = (0) \quad \begin{matrix} j = 1 \dots n \\ i = 1 \dots m \end{matrix}$$

Multiplikation einer Matrix und eines Vektors

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ Spaltenvektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\bar{c} \in \mathbb{R}^m$ Zeilenvektor

$\bar{c} = (c_1 \quad c_2 \ldots\ldots \quad c_m)$

Als Matrix:

$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$\bar{c} = (c_1 \quad c_2 \ldots\ldots c_m) \in \mathbb{R}^{1 \times m}$

Dann:

(1) Spaltenanzahl von A stimmt mit der Zeilenzahl des Vektors $\vec{b}$ überein



$A \in \mathbb{R}$ $\qquad \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

Dann geht

$$A \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} \cdot b_2 + \dots + a_{1n} \cdot b_n \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \dots + a_{2n} \cdot b_n \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \cdot b_1 + a_{m2} b_2 + \dots + a_{mn} \cdot b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_k \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$$

Spaltenvektor der Dimension m.

(2) $\bar{c}_1 \cdot A =$

$$= \begin{pmatrix} c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \dots + c_m a_{m1} \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{22} \dots + c_m a_{m2} \\ \vdots \\ c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \dots + c_m a_{mn} \end{pmatrix}^T$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{k1} \cdot c_k ; \sum_{k=1}^{m} a_{k2} \cdot c_k ; \dots ; \sum_{k=1}^{m} a_{kn} \cdot c_k \right)$$

$\in \mathbb{R}^{1 \times n}$ Zeilenvektor.

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = (1, 1, 0, 2)$$

$$\bar{c} = (1, 0, 1)$$

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

$A \cdot \bar{b}$, $A\bar{c}$, $A\bar{d}$, $A\bar{e}$

$\bar{b}A$, $\bar{c}A$, $\bar{d}A$, $\bar{e}A$

$A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

$\bar{b} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$

$\bar{c} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$

$\bar{d} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$

$\bar{e} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$A\bar{b}$	↯
$A\bar{c}$	↯
$A\bar{d}$	↯
$A\bar{e}$	✓
$\bar{b}A$	✓
$\bar{c}A$	↯
$\bar{d}A$	↯
$\bar{e}A$	↯

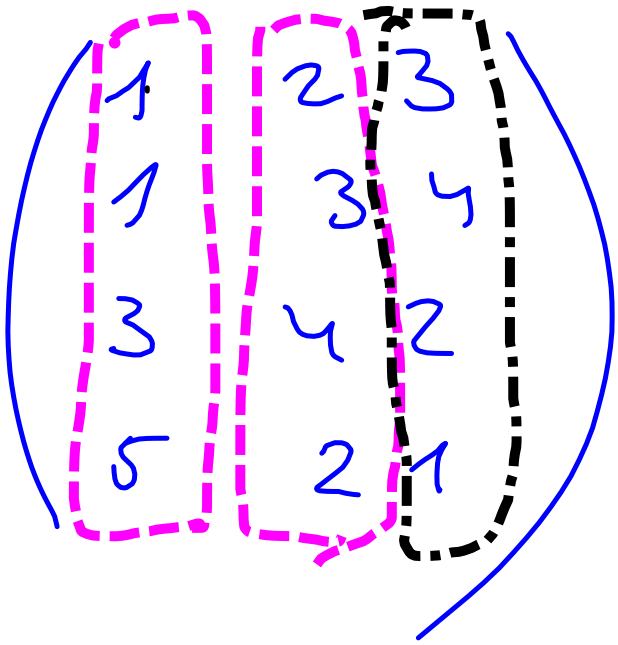
Ae ; $\exists A$

$$Ae = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ 5\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \\ 17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\overline{T}_6 A =$

$= (1102)$ 

$=$

$= (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 5 ;$

$1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 ;$

$1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1) =$

$= (12 \quad 9 \quad 8)$

Produkt von Matrizen

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$

$m, n, k, \ell \in \mathbb{N}$.

Seien $\overline{b_i}$, $i = 1, \ldots, \ell$

die Spalten von Matrix B.

Falls

$n = k$

ist, existiert das

Produkt $(A \cdot B)$, und

$C = A \cdot B$ ist eine

$m \times l$ - Matrix mit

der Spaltendarstellung

$$C = A \cdot B = \left(A\bar{b}_1 \mid A\bar{b}_2 \mid \dots \mid A\bar{b}_l \right)$$

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$A \cdot B = C$?

$A \cdot B$

$(2 \times 3) \cdot (3 \times 3) = (2 \times 3)$

$=$

$B \cdot A$

$(3 \times 3) \cdot (2 \times 3)$

$\not\exists$

Existiert nur nicht!

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$A\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$\overline{Ab_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 9 & 19 & 10 \end{pmatrix}$$

Satz:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n} = \mathbb{R}^{n \times k}$,

$B \in \mathbb{R}^{n \times k}$.

Dann ist

$A \cdot B = C \in \mathbb{R}^{m \times k}$

mit

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \cdot b_{\ell j}$$

$i = 1, \ldots, m$

$j = 1, \ldots, k$

Bsp.:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 & 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + \\ & + 3\cdot 1 & \begin{array}{l} 1\cdot 1 + \\ +1\cdot 0 + \\ \quad + 1\cdot 3 \end{array} \\ \hline 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 0\cdot 6 & \begin{array}{l} 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + \\ \quad +1\cdot 6 \end{array} & \begin{array}{l} 4\cdot 1 + \\ +0\cdot 5 + \\ +6\cdot 1 \end{array} \end{array}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 9 & 15 & 10 \end{pmatrix}$$

Satz: Eigenschaften der Matrix-Multiplikation:

(1) $A \cdot B \neq B \cdot A$ i.A.,

auch wenn beide Produkte existieren!

(2) Wenn alle Produkte existieren:

$$A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

(3) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $O \in \mathbb{R}^{n \times k}$

O - Nullmatrix;

A·0 existiert und ist wieder eine Nullmatrix der Dimension m x k.

Analog für passende Dim. Nullmatrix · A = Nullmatrix

(4) Aus $AB = AC$ folgt i.A. nicht, dass $B = C$ ist.

Bsp:

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$A \cdot B$ oder $B \cdot A$:

$(2\times 2)\cdot(2\times 2) = (2\times 2)$

$\Rightarrow$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$\neq$ $\neq$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Bsp 4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$B \neq C$

Trzeba:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\| \|$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \cdot C \wedge B \neq C$$

Eigenschaften von Einheitsvektor E_n:

(1) $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (Spaltenvektor)

$$E_n \bar{x} = \bar{x}$$

(2) $\forall\, \bar{y} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (Zeilenvektor)

$$\bar{y} E_n = \bar{y}$$

(3) $\forall\, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$E_m A = A$$

(4) $$A E_n = A$$

Eigenschaften der Transponierten Matrix

(1) $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\forall B \in \mathbb{R}^{n \times r}$

Dann existiert $(A \cdot B)$,

und

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

(2) $\forall A, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$(A + C)^T = A^T + C^T$$

Def: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadr. Matrix. Falls eine $(n \times n)$-Matrix B existiert mit

$$A \cdot B = B \cdot A = E_n,$$

so nennt man B "Inverse zu A" (Inverse Matrix zu A)

Bezeichnung:

$$B = A^{-1}$$

① Wann existiert die Inverse?

Wieviele Inverse kann eine Matrix haben?

Wenn, dann eine!!

② Wie berechnet man die Inverse?

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$(A^{-1}A)\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$E_n\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

21.05.15

Rang der Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Def:

(1) Die Zahl der linear unabhängigen Zeilen der Matrix A (als Vektoren) heißt Zeilenrang der Matrix A:

$\operatorname{zrg}(A)$

(2) Die Zahl der linear unabhängige Spalten von A heißt Spaltenrang von A: $\operatorname{srg}(A)$.

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ beliebig. Dann gilt:

$$\operatorname{zrg}(A) = \operatorname{srg}(A) \leq \min(n, m)$$

Def: $\operatorname{zrg}(A) = \operatorname{srg}(A)$ heißt man $\operatorname{Rang}(A)$

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rang}(A) = \operatorname{Rang}(A)$$

z.B.:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3$$

Eigenschaften von Rang einer Matrix

Satz: Es gilt:

(1) wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

obere Dreiecksmatrix von Typ $n \times n$ ist, und $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$, so gilt:

$$rg(A) = n$$

(2)

Wenn $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

die $m \times n$ Matrix mit

$m > n$; $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$;

ist, so gilt:

$$rg(A) = n$$

(3) Wenn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine $m \times n$ Matrix mit $m < n$ und $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, m$ ist, so gilt:

$$rg(A) = m$$

(4) Wenn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

eine $m \times n$ Matrix ist mit $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, r$ $(r \leq \min\{m, n\})$, so gilt:

$$\operatorname{rg}(A) = r$$

Вар:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 4$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(B) = 3$

(3)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(C) = 3$$

(4)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(D) = 2$$

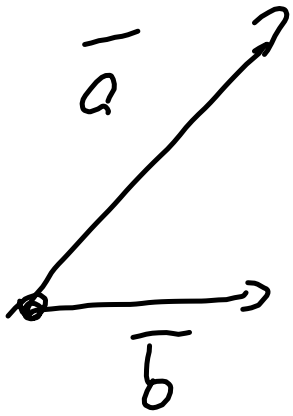
Def: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $rg(A) = \min\{m; n\}$

Dann sagt man:

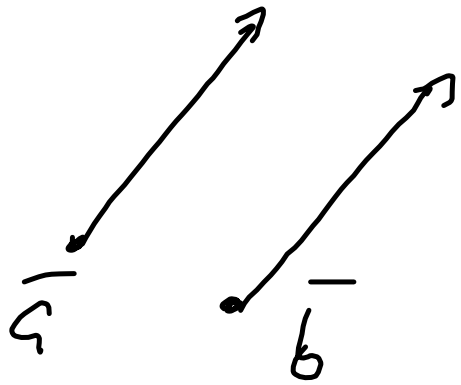
"A hat den volen Rang."

D.h.: Eine Matrix hat stets volen Rang.

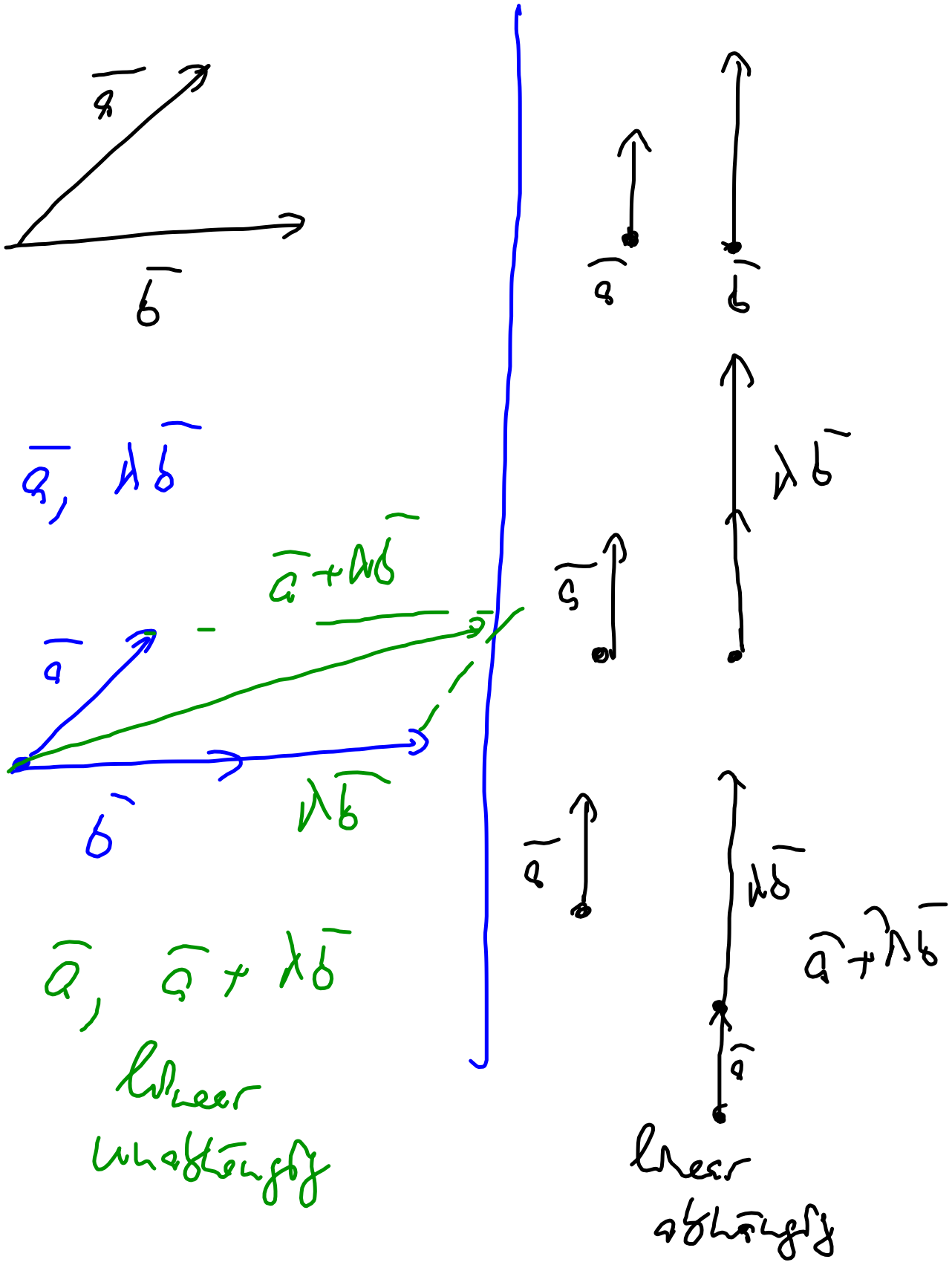
Die Operation
die den Rang einer
Matrix nicht verändert.



kh. vektorok



kh. oszlopok


a
b
a, λb
a+λb
a
b
λb
a, a + λb
linear unabhängig
a
b
a
λb
a+λb
linear abhängig

Operationen, die den Rang einer Matrix nicht verändern

(1) Die Vertauschung von Zeilen (oder Spalten) einer Matrix ändert ihren Rang nicht

(2) Die Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ ändert den Rang nicht

(3) Ray eher
method findet sich nicht,
wenn man zu einer
Zelle (bzw. Spalte) des
Vielfachen einer anderen
Zelle (bzw. Spalte) von
A dazu addiert.

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$z_2 - 2 \cdot z_3 \longrightarrow z_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$z_2 \longleftrightarrow z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 \leftrightarrow S_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg\ A = rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Bsp:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Unbekannte: x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 5 \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Das führt zur Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

Unbekannten Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und der sog.
"rechten Seite"

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

LGS:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

i. A. hat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\bar{x}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$

n – Anzahl der Zeilen
$\equiv$ Anzahl der Gl'en

n – Anzahl der Spalten
$\equiv$ Anzahl der Variablen

Fragen:

(1) Ist das LGS lösbar?

(2) Falls ja – Ist das LGS eindeutig oder mehrdeutig (wieviele Lösungen?) lösbar?

(3) Wie sieht die Lösg aus?

Gauß-Algorithmus zur Bestimmung von Rang der Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix. Diese wird unter Vorrang der Op's, die den Rang nicht verändern!

(1Z) Vertauschung zweier Zeilen
(1S) Vertauschung zweier Spalten

(2Z) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$
(2S) —"— Spalte —"—.

(3Z) Addition zu einer Zeile eines Vielfachen der anderen Zeile
(3S) —"— Spalte —"— Spalte.

auf Dreiecksgestalt gebracht:

Man geht wie folgt vor:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(1) Wenn $a_{11} = 0$, dann vertausche die Zeilen von A so, dass an der Stelle (1,1) keine 0 ist.

Wenn gilt $a_{11}^{*} \neq 0$.

Die erste Zeile des ersten Schritts nennt man Pivot-Zeile, und Element $a_{11}^{*} \neq 0$ heißt Pivot-Element.

Zu lässige Operationen: (1.5), (1.7)

(2)

$$A_1^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix}$$

$$\tilde{z}_2 \leftarrow z_2 - \frac{a_{21}^*}{a_{11}^*} \cdot z_1$$

$$\tilde{z}_3 \leftarrow z_3 - \frac{a_{31}^*}{a_{11}^*} \cdot z_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tilde{z}_m \leftarrow z_m - \frac{a_{m1}^*}{a_{11}^*} \cdot z_1$$

(3z)

(3)

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}^{*} & a_{12}^{*} & a_{13}^{*} & \cdots & a_{1n}^{*} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \cdots & \tilde{a}_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

Man wiederholt jetzt die Schritte (1)-(3) mit der Pivot-Zeile 2 und dem Pivot-Element $\tilde{a}_{22}^{*}$; u. s. w.)

bis eine Dreiecksform erreicht ist.

Dann kann man Rang der Matrix einfach ablesen.

Bem.: Zur Bestimmung von Rang darf man auch Operationen (1S), (2S), (3S) (Spaltenoperationen) anwenden! Diese sind

jedoch für die weitere (später!) GA-modifikationen (zur Lösung von LGS!) nicht zugelassen!

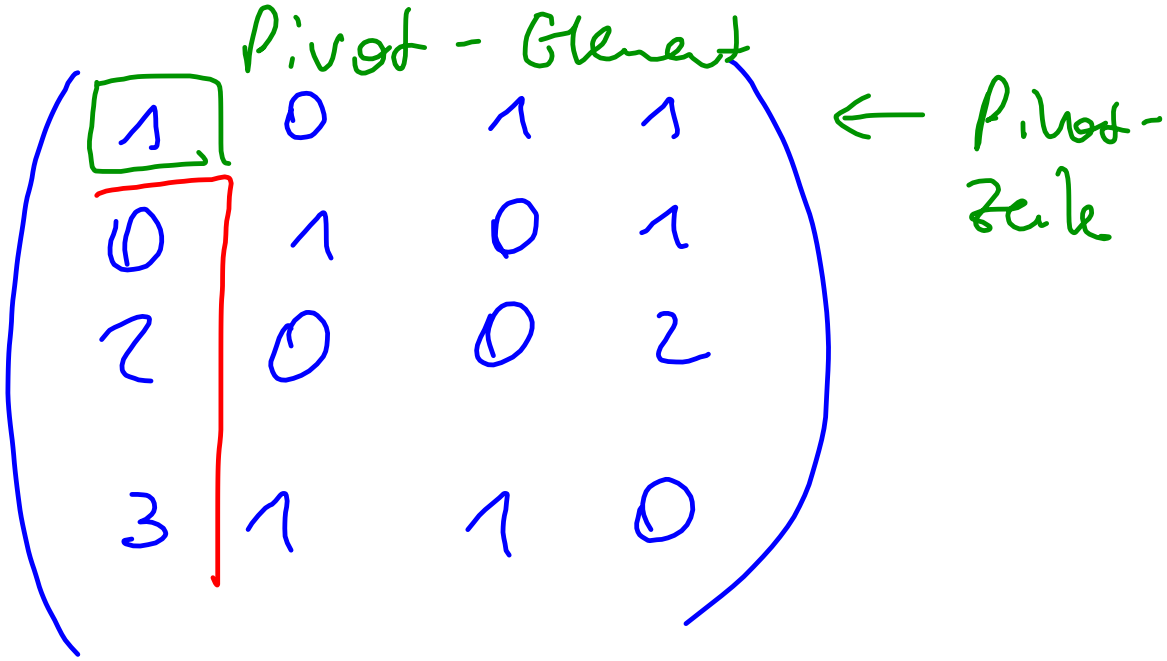
Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(A)$ - ?

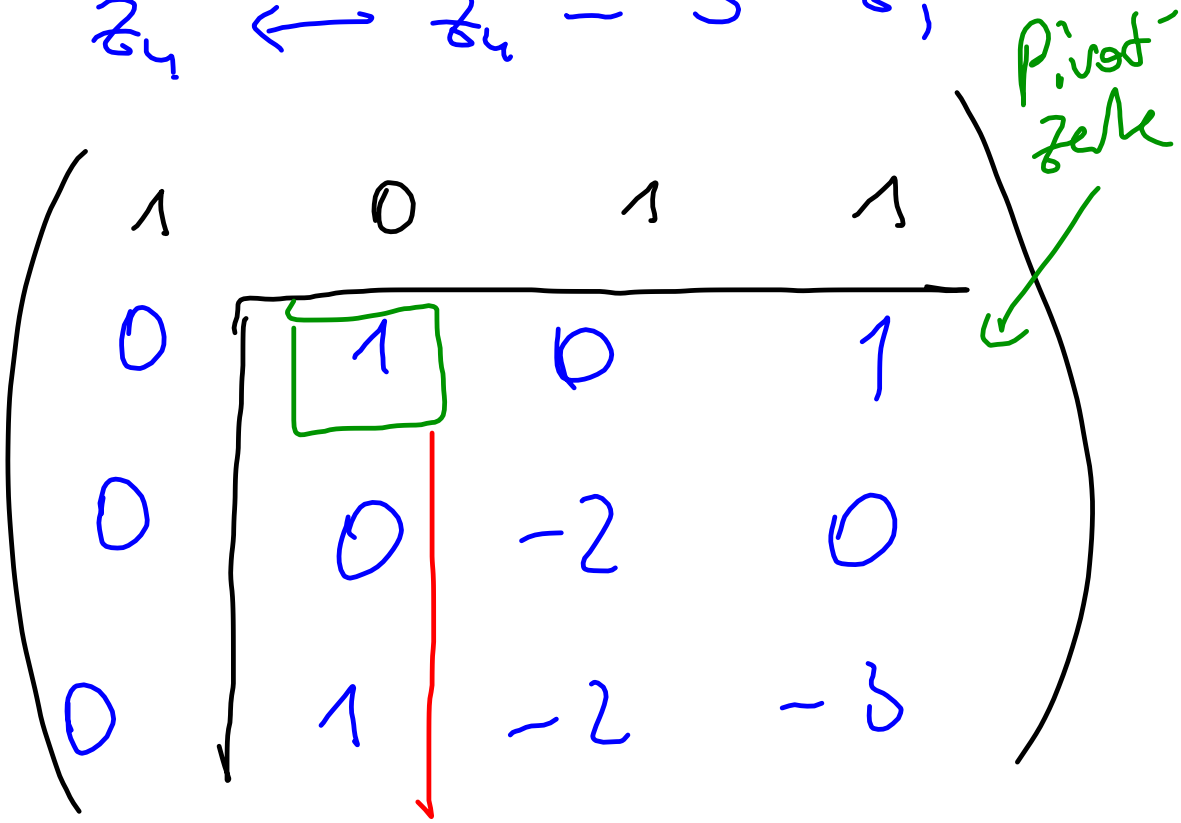
① $a_{41} = 0$

$z_1 \longleftrightarrow z_2$



$$z_3 \leftarrow z_3 - 2 \cdot z_1$$

$$z_4 \leftarrow z_4 - 3 \cdot z_1$$



$\widetilde{G}_{22} = 1 \neq 0$

$z_4 \longleftarrow z_4 - z_2$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$-2 \neq 0$

$z_4 \longleftarrow z_4 - z_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 4$

A hat vollen Rang!

Def: Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit vollem Rang (d.h. $\operatorname{rg}(A) = n$) heißt **regulär**; sonst heißt A **singulär**.

Satz: Eine reelle $n \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar

$\Updownarrow$

A ist regulär

Determinante

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadrat.

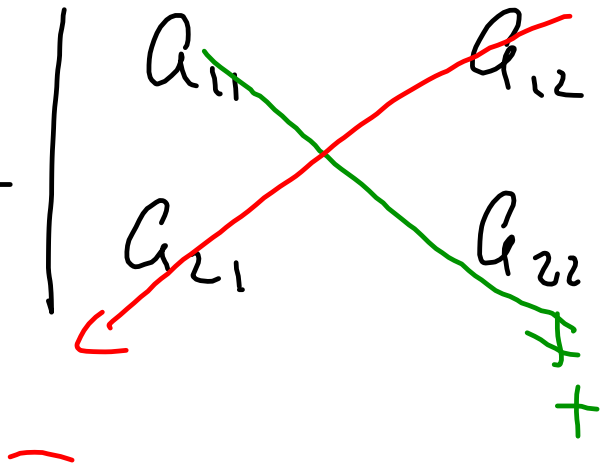
Def!

(1) $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$



$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

(eine Zahl $\in \mathbb{R}$)

hilft die

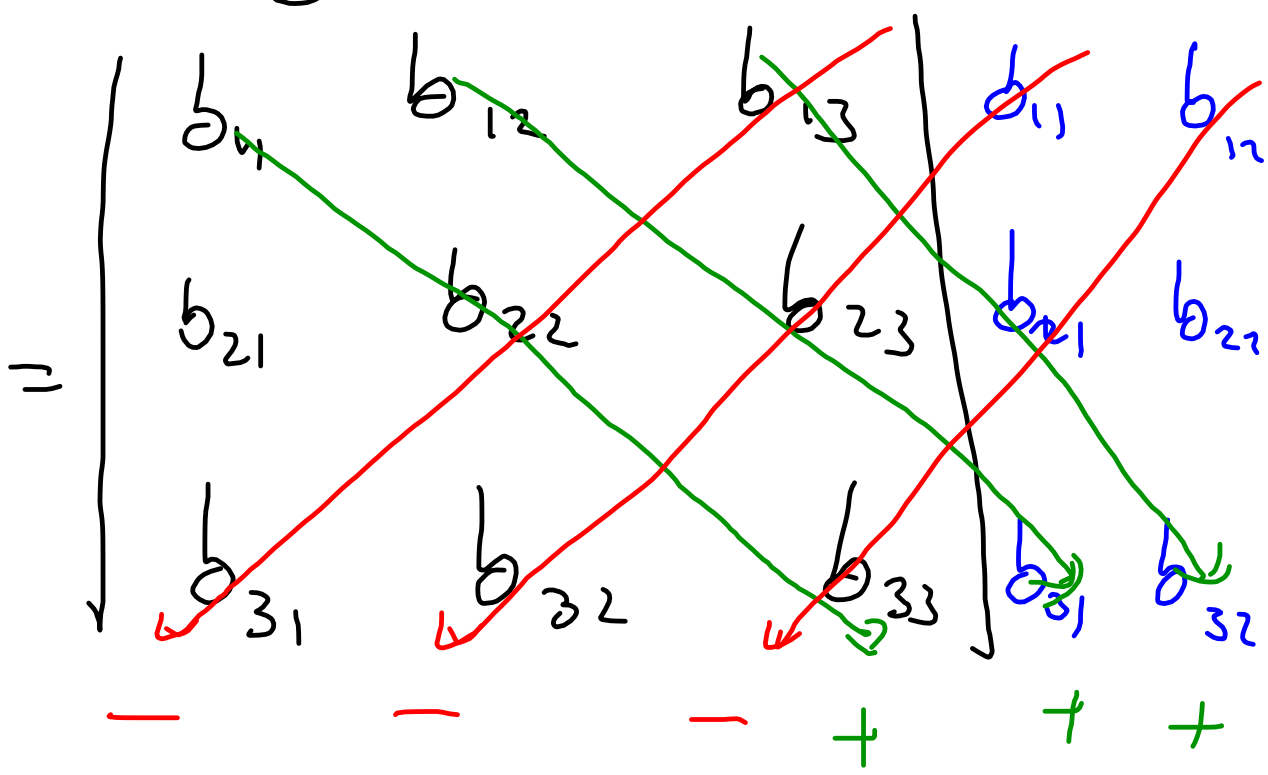
Determinante einer

2×2 Matrix A.

(2) $\underline{n = 3}$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det B =$$



$$= b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} +$$

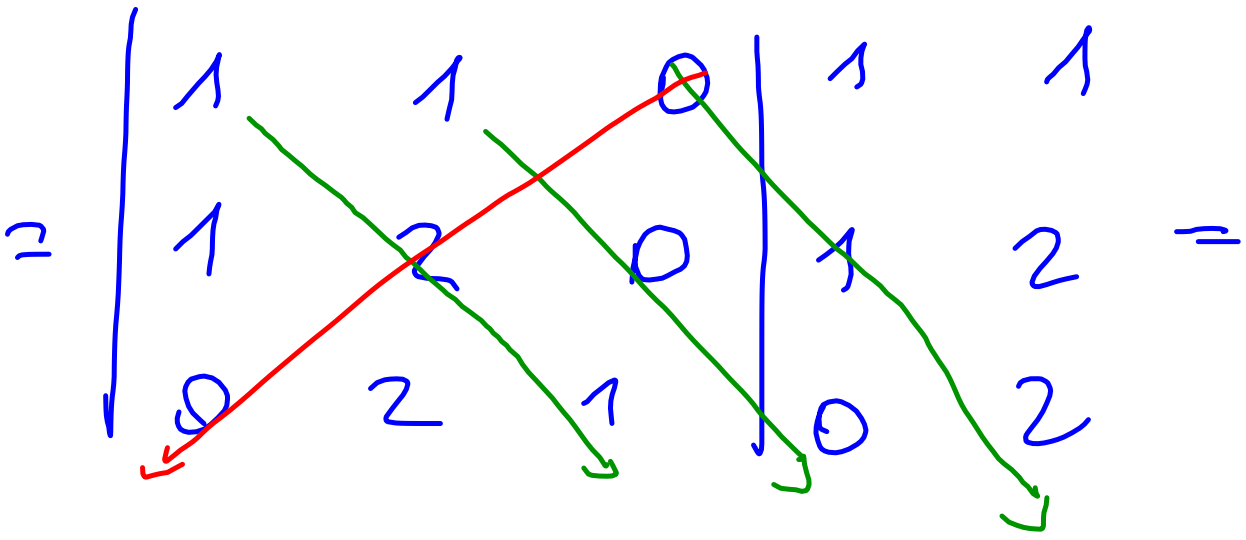
$$+ b_{13} b_{21} b_{32} - b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{31} -$$

$$- b_{11} \cdot b_{23} \cdot b_{32} - b_{21} \cdot b_{12} \cdot b_{33}$$

(1), (2) nennt man Regel von Sarrus

Bsp.:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$



$=$

$= 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 +$

$+ 0 - 1 \cdot 2 - 0 \cdot 2 \cdot 0 -$

$- 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$

$= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 =$

$= 1$

Def: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Dann heißt die folgende Zahl die

Determinante von A:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} (-1)^{1+1} D_{11} +$$

$$+ a_{12} (-1)^{1+2} D_{12} + \cdots +$$

$$+ a_{1k} (-1)^{1+k} D_{1k} + \cdots +$$

$$+ a_{1n} (-1)^{1+n} D_{1n},$$

Wobei D_{ik} die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Matrix ist, die entsteht, wenn man in A die i-te Zeile und die k-te Spalte wegstreicht.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4x4 – metoda

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \, (-1)^{1+3} D_{13} +$$

$$+ 1 \, (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Zwischenrechnung!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 -$$

$$- 1 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 0 =$$

$$= 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 0\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 0\cdot 1 - 0\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= 2$$

$$= -1\cdot 6 - 1\cdot 2 = -8$$

$$\det A = -8.$$

Satz: Laplace'scher Entwicklungssatz:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (quadr. Matrix, $n \in \mathbb{N}$)

Dann gilt:

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} (-1)^{(k+l)} \cdot D_{kl} =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pq} (-1)^{p+q} D_{pq},$$

wobei

D_{xy} die Determinante

der $(n-1) \times (n-1)$ Matrix

ist, die entsteht,

wenn man in A

die x-te Zeile und

die y-te Spalte wegstreicht

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} (-1)^{k+l} D_{kl} =$$

"Entwicklung nach der k-ten Zeile"

$$= \sum_{p=1}^{n} a_{pq} (-1)^{(p+q)} D_{pq}$$

"Entwicklung nach der q-ten Spalte"

Bem: Für die Entwicklungszeile bzw. Entwicklungsspalte wird die Zeile bzw. Spalte gewählt, die die meisten Nullen hat.

Bsp:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \leftarrow$$

Det B - ?

$B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

Die 3. und 5. Zeile

haben je 3 Nullen.

z.B. die 5. Zeile:

$$\det B = \sum_{k=1}^{5=n} a_{5k} (-1)^{5+k} D_{5k} =$$

$$= 0 \cdot (-1)^{5+1} D_{51} +$$

$$+ 1 (-1)^{5+2} D_{52} +$$

$$+ 0 (-1)^{5+3} D_{53} +$$

$$+ 1 (-1)^{5+4} D_{54} +$$

$$+ 0 (-1)^{5+5} D_{55} =$$

$$= -D_{52} - D_{54}$$

$$D_{52} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_{54} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_{52} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

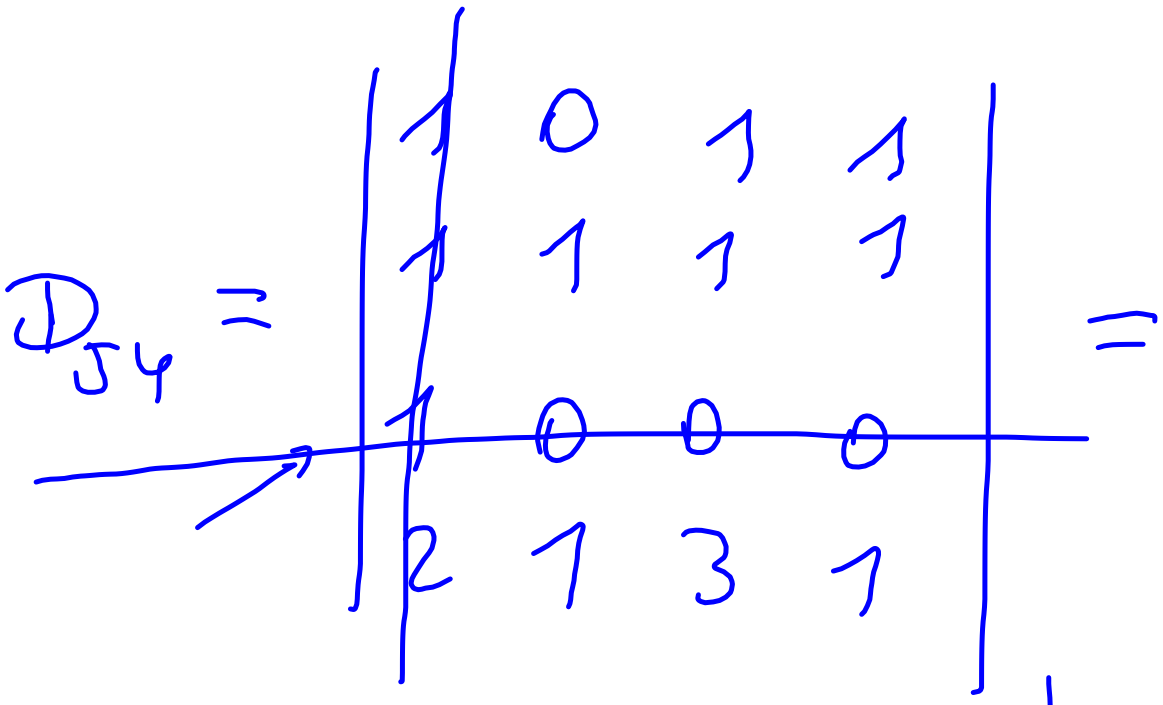
$$+ 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 + \cancel{1 \cdot 1 \cdot 1} + \cancel{1 \cdot 1 \cdot 2} + \cancel{1 \cdot 1 \cdot 3} -$$

$$- \cancel{1 \cdot 1 \cdot 2} - \cancel{1 \cdot 1 \cdot 3} - \cancel{1 \cdot 1 \cdot 1} = 2$$



$$= 1(-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$= 0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 -$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$= 3 - 1 = 2$;

$= -2 - 2 = -4 =$

$= \det B$;

28.05.2015

$$\det(A^T) = \det A$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\operatorname{Rang}(A) = n \overset{df}{\Leftrightarrow}$ A regulär

$\Updownarrow$

$\det A \neq 0$

$\operatorname{Rang}(A) < n \overset{df}{\Leftrightarrow}$ A singulär

$\Updownarrow$

$\det A = 0$

Sei A aus $(n \times n)$.

Wann gibt es $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

so dass

$A \cdot B = B \cdot A = E_n$,

$B = A^{-1}$ inverse Matrix zu A?

Satz: (Wenn $\det A \neq 0$,)

so gilt:

(1) A regulär

(2) $\det A \neq 0$

(3) A hat vollen Rang

(4) A invertierbar

sind die äquivalente Aussagen.

(Später: LGS $A\bar{x} = \bar{b}$ ist eindeutig lösbar für alle Vektoren $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$)

Berechnung von inverser Matrix zu regulärer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Gauß-Algorithmus

Man berechnet die Inverse zu der regulären quadratischen Matrix A wie folgt:

Man erweitere die Matrix A mit der Einheitsmatrix der gleichen Dimension:

$n \times 2n$

$$(A \mid E) \in \mathbb{R}$$

Mit dem Gauß-Algorithmus und nur Zeilenoperationen (1z), (2z), (3z) wandelt man die Matrix $(A|E)$ so um, dass an der Stelle von A (LHS) die Einheits-

Matrix entsteht.
Dann steht in der
anderen Hälfte der
erweiterten Matrix die
Inverse von A:

$$(E \mid A^{-1})$$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ A regulär

$\Downarrow$

A invertierbar.

$(A \mid E) =$ Pivot-Element $\neq 0$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z_2 \leftarrow z_2 - z_1$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 + 2z_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$z_2 \leftarrow z_2/(-1)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$z_1 \leftarrow z_1 - 2z_2$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} \overset{?}{=} A^{-1} \cdot A \overset{?}{=} E$$

$$A \cdot A^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

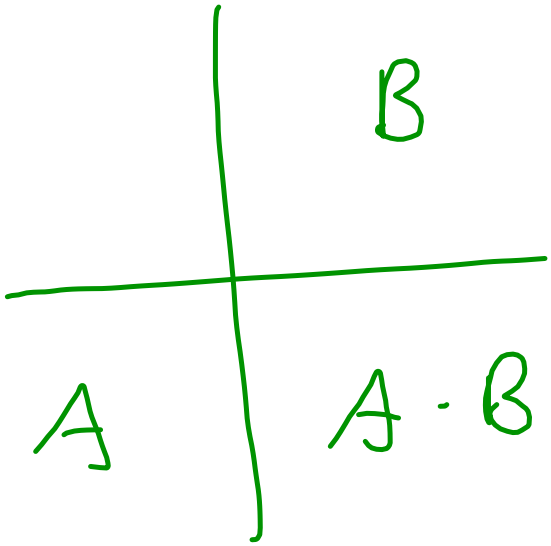
$$A \cdot A^{-1} = E_3$$

$$A^{-1} \cdot A = E_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Die berechnete Matrix ist wirklich die Inverse zu A.



Die Determinante

der Einheitsmatrix

$E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

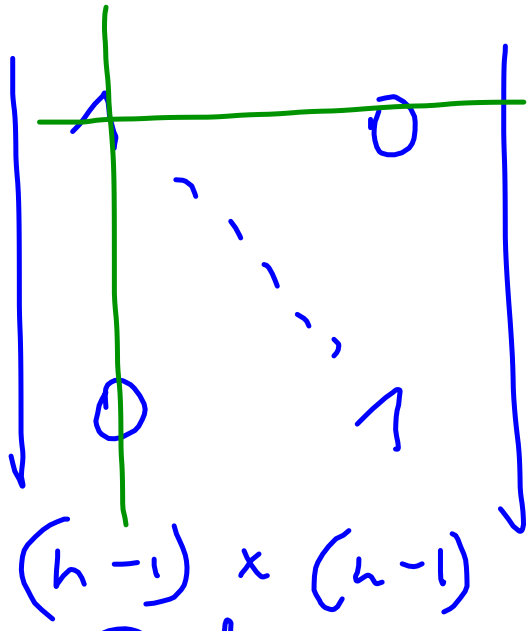
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Entw. nach der 1. Zeile

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$\in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$

$=$

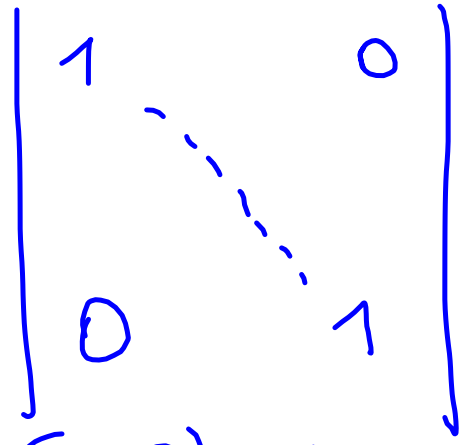


$(n-1) \times (n-1)$

Def.

Entw. nach 1. Zeile $=$

$= 1(-1)^{1+1}$



$(n-2) \times (n-2)$

$+0$

$=$ ..... $=$

$$\ldots\ldots = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 =$$

$$= 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\det E_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Außerdem:

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}:$$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

D.h.

$$\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det(E_n) = 1$$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}}$$

und $\det A \neq 0$, weil

A invertierbar.

Bsp:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4x4

(1) Ist B invertierbar?

(2) Wenn ja: Berechnen Sie die Inverse B^{-1}.

(1) Invertierbar

⇓

regulär

⇕

⇓

$\det B \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Entw. nach der 4. Zeile

$$= 1\,(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Entw. nach 3. Spalte

$$= -1\,(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow \exists B^{-1}$

(2) $(B|E)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z_2 \leftarrow z_2 - z_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftrightarrow z_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$z_4 \leftarrow z_4 - 2 \cdot z_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$z_1 \leftarrow z_1 - z_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Satz: Eigenschaften (Rechenregel) der Det'en

(1) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

(2) $\det\left(\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right) =$

$= a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

(3) $\det E_n = 1$

(4) $\det(A^T) = \det(A)$

(5) Sei A eine obere ~~(untere)~~ Dreiecksmatrix

(d.h. $a_{ii} \neq 0 \quad \forall i \leq n$;
$a_{ij} = 0, \quad i > j$)

Dann:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Analog für untere Dreiecksmatrix B:

$$\det B = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{nn}$$

(6) Si A regulär:

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$