Interpolation

(und Approximation)

IP: Interpolationsaufgabe

Gegeben seien die sog. Stützstellen

$x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n$ mit

$x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ mit

den Stützwerten

$y_0, y_1, \ldots\ldots, y_n$; $n \in \mathbb{N}$.

Insgesamt $(n+1)$ Paare (x_i, y_i)

Ges.: ein Polynom $P(x)$

mit $P(x_k) = y_k$

$\forall k = 0, 1, \ldots\ldots, n.$

- Gibt es so ein Poly?
- Unter welchen Bed.?
- Falls P existiert, wie wird gerechnet?
- Wie groß ist die Differenz zwischen der unbek. Original-Funktion und $P(x)$?

Satz: Es gibt genau ein Polynom vom Höchstgrad n, welches IP löst.

(Ohne Beweis)

$\forall k: P(x_k) = y_k$

$P(x)$ sei Polynom vom Grad n!

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

n – Grad, Ordnung

$$y_0 = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0$$

$$y_1 = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0$$

$$\dots$$

$$y_n = a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0$$

a_k sind zu bestimmen

$\Downarrow$

LGS

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & & & & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$A\bar{a} = \bar{y}$$

A hat spezielle Struktur $\Rightarrow$ A heißt eine Van-der-Monde-Matrix.

Bekannt: $\det A \neq 0$ (Van-der-Monde-Det).

Also:

(1) Der Satz gilt.

(2) Die erste Lösungsmethode: Lösung von LGS.

Nachteile:

- Aufwand
- Schwere Genauigkeitsabschätzung

⇒ Interpolation nach Lagrange (1783)

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$P(x_k) = y_0 L_0(x_k) + y_1 L_1(x_k) + \ldots\ldots + y_n \cdot L_n(x_k) = y_k$$

⇒ $P(x)$ erfüllt IP!

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)}$$

Bsp!

$x_0 = 1$	$y_0 = 2$
$x_1 = 2$	$y_1 = 4$
$x_2 = 5$	$y_2 = 0$
$x_3 = 6$	$y_3 = 1$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^{3} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} =$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-5)(x-6)}{(1-2)(1-5)(1-6)} =$$

$$= -\frac{1}{20}(x-2)(x^2 - 11x + 30) =$$

$$= -\frac{1}{20}(x^3 - 13x^2 + 52x - 60);$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-5)(x-6)}{(2-1)(2-5)(2-6)} =$$

$$= \frac{1}{12}(x-1)(x^2-11x+30) =$$

$$= \frac{1}{12}(x^3-12x^2+41x-30);$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(5-1)(5-2)(5-6)} =$$

$$= -\frac{1}{12}(x-1)(x^2-8x+12) =$$

$$= -\frac{1}{12}(x^3-9x^2+20x-12)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(6-1)(6-2)(6-5)} =$$

$$= \frac{1}{20}(x-1)(x^2-7x+10) =$$

$$= \frac{1}{20}(x^3-8x^2+17x-10)$$

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) +$$

$$+ y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{20}\left(x^3 - 13x^2 + 52x - 60\right)\right)$$

$$+ 4 \cdot \frac{1}{12}\left(x^3 - 12x^2 - 41x - 30\right)$$

$$+ 0 \cdot L_2(x) +$$

$$+ 1 \cdot \frac{1}{20}\left(x^3 - 8x^2 + 17x - 10\right) =$$

$$= \frac{17}{60}x^3 - \frac{31}{10}x^2 + \frac{559}{60}x - \frac{9}{2};$$

__Nachteile:__ - Aufwendig

- bei Hinzunahme weitere Punkte führt zur Neuberechnung __aller__ $L_k(x)$ und $P(x)$.

__Satz!__ __Fehlerabschätzung bei Interpolation__:

__Geg:__ (1) eine $(n+1)$-mal stetig diff'bare Funktion $f(x)$

(2) die Stützstellen $\underbrace{x_0, x_1, \dots, x_n}_{\in [a,b]}$

(3) Sei $P(x)$ das (eindeutig bestimmte) Interpolationspolynom vom Höchstgrad n mit

$$P(x_k) = y_k \quad , k = 0, 1, \dots, n$$

Ist $R(x) = f(x) - P(x)$

und $\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$,

so gilt: $\forall x \in [a, b]$

$$|R(x)| = |f(x) - P(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \cdot |\omega(x)|.$$

$\rightsquigarrow$ Interpolation nach Newton

Ansatz von Newton

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) +$$
$$+ a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots (x - x_{n-1})$$

Ziel: $a_0, a_1, \ldots, a_n$ so

zu bestimmen, dass

$$p(x_k) = y_k \quad \forall k = 0, 1, \ldots$$

$$\Longrightarrow$$

$$p(x_0) = y_0 = a_0$$

$$p(x_1) = y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$p(x_2) = y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p(x_n) = y_n = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots\ldots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})$$

$(n+1)$ Gl

$(n+1)$ Unbekannte

$a_0 = y_0$

$y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$

$\Longrightarrow \quad a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = [x_1; x_0]$

dividierte Differenz

$a_2 = \dfrac{1}{x_2 - x_0}\left([x_2, x_1] - [x_1, x_0]\right)$

$= [x_2, x_1, x_0]$

. . . .

Def:

$$[x_{k+1}, x_k] := \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

heißt dividierte Differenz 1. Ordnung

Induktiv:

$$[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] =$$

$$= \frac{[x_n, \ldots, x_1] - [x_{n-1}, \ldots, x_0]}{x_n - x_0}$$

bzw.

$$[x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots, x_k] :=$$

$$= \frac{[x_n, \ldots\ldots, x_{k+1}] - [x_{n-1}, \ldots\ldots, x_k]}{x_n - x_k}$$

Mit Div. Dif.:

$$P(x) = y_0 +$$

$$+ [x_1, x_0](x - x_0) +$$

$$+ [x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ [x_n, \ldots\ldots, x_0](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Schema zur Berechnung der div. Differenzen:

x	y	1. Ord.	2. Ord.		
x_0	$y_0 = a_0$	$[x_1,x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a_1$	$[x_2,x_1,x_0] = \frac{[x_2,x_1] - [x_1,x_0]}{x_2 - x_0} = a_2$		
x_1	y_1				
x_2	y_2	$[x_2,x_1] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$			$= a_n$ $[x_n, x_{n-1}, \ldots\ldots, x_0]$
$\vdots$					
x_{n-1}	y_{n-1}				
x_n	y_n	$[x_n,x_{n-1}] = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$			

Die Koeffizienten a_0, a_1, ……, a_n bilden die „obere Kante" an den „Dreieck"

Bsp.:

$(1,2)$; $(2;4)$; $(5,0)$; $(6,1)$

(Wie bei Lagrange $\exists!$)

x	y
1	2
2	4
5	0
6	1

$$\frac{4-2}{2-1} = 2$$

$$\frac{0-4}{5-2} = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{1-0}{6-5} = 1$$

$$\frac{-\frac{4}{3}-2}{5-1} = -\frac{5}{6}$$

$$\frac{1-(-4/3)}{6-2} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{\frac{7}{12}+\frac{5}{6}}{6-1} = \frac{17}{60}$$

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = -5/6$$

$$a_3 = \frac{17}{60}$$

$$P(x) = 2 + 2(x-1) - \frac{5}{6}(x-1)(x-2) + \frac{17}{60}(x-1)(x-2)(x-5) =$$

$$= 2 + 2x - 2 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{3}$$

$$+ \frac{17}{60}\underbrace{(x^2 - 3x + 2)(x - 5)}_{= x^3 - 8x^2 + 17x - 10} =$$

$$= \frac{17}{60}x^3 + x^2\left(-\frac{34}{15} - \frac{5}{6}\right) + \ldots\ldots$$

Normalform des Polynom

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

Bei Hinzunahme einer
weiteren Stützstelle kann
das bereits berechnete Schema
weiterverwendet werden!
Die Reihenfolge der
Stützstellen spielt für
Newton-Schema keine Rolle,
d.h. die Stützstellen
nicht ab- bzw.
aufsteigend sortiert
werden müssen!

Z.B. Zusatzpunkt (3, 0):

x	y			
1	2	2	−5/6	17/60
2	4	−4/3	7/12	
5	0	1		
6	1			
3	0	$\frac{1}{3}$		

$\frac{1/3 - 1}{3-5} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{1/3 - 7/12}{3-2} = -1/4$

$$\frac{-1/4 - 17/60}{3-1} = \frac{-32}{60 \cdot 2} = -\frac{4}{15}$$

Also! Das schon berech. Poly

$$Q(x) = P(x) + \left(-\frac{4}{15}\right)(x-1)(x-2)(x-5)(x-6)$$

7. 09. 10^{00} – Vorber. Übg

R. 1303