HTW DES SAARLANDES
Ing.-Wiss. Fakultät, MST/M
Numerik & Statistik
Prof. Dr. B. Grabowski
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Numerik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 *(Landau-Symbole, O & o - Relationen)*
Zeige folgende Zusammenhänge:

a) $f_i = O(g_i)$ *für* $x \to x_0$, $i = 1, 2$. *Dann gilt:*

$$f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2),$$

also

$$O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2)$$

b)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$$

c) $f_1(x) = o(g_1)(x)$, $x \to x_0$ *und* $f_2(x) = O(g_2)(x)$, $x \to x_0$. *Dann gilt:*

$$f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x)),\ x \to x_0$$

d)

$$f(x) - g(x) = o(f),\ x \to x_0 \Rightarrow f(x) - g(x) = o(g),\ x \to x_0$$

Man verwende dabei die Ergebnisse von e)

*e) **

$f = o(g)$, $x \to x_0$ *und* $g = o(H)$, $x \to x_0$. *Dann* $f(x) = o(h(x))$, $x \to x_0$. *Anders gesagt,*

$$o(O(h)) = h$$

$$O(o(H)) = o(h)$$

Aufgabe 2
Überlege, welche (und unter welchen Bedingungen) Aussagen des Satzes über Eigenschaften der ***O****-Relation umkehrbar sind. Finde Gegenbeispiele, falls eine oder andere Aussage nicht umkehrbar ist.*

Aufgabe 3 *Man bestimme die allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Systems*

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x \geq 0.$$

Weilche spezielle Lösung genügt fen Anfangsbedingungen $y_1(0) = 0.5$, $y_2(0) = 0$*?*

Lösung:

$x \geq 0$; $y_1(0) = 0.5$;
$y_2(0) = 0$;

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix};$$

Also ein Systemig von der Art:

$y' = Ay + f(x)$; mit A - konstante Matrix

$f(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$;

s. nächste Seite

(i) Löse das homogene System:

$y' = Ay$;

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2; \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2; \end{cases}$$

Es ist die Euler-Methode anwendbar.

EWe von A:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0;$$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$;
$\lambda_1 = -1$;
$\lambda_2 = 5$;

Also zwei verschiedene EWe, voller Rang.
Nun suche y_1, y_2, in der Form:

$y_1 = \alpha e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = \beta e^{\lambda x}$;

$\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} -\alpha e^{-x} = \alpha e^{-x} + 4\beta e^{-x}; \\ -\beta e^{-x} = 2\alpha e^{-x} + 3\beta e^{-x}; \end{cases} \quad \forall x: e^{-x} \neq 0$$

$$\begin{cases} -\alpha = \alpha + 4\beta; \\ -\beta = 2\alpha + 3\beta; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 0; \\ 2\alpha + 4\beta = 0; \end{cases}$$

z.B. $\alpha = -2$; $\beta = 1$;

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = EV_1;$$

$\lambda_2 = 5$:

$$\begin{cases} 5\alpha = \alpha + 4\beta; \\ 5\beta = 2\alpha + 3\beta; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 4\beta = 0; \\ 2\alpha - 2\beta = 0; \end{cases}$$

z.B. $\alpha = 1$
$\beta = 1$;

Also $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist auch EV,

und $EV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

EV_1 und EV_2 sind linear unabhängig :).

Also $\begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$ bilden ein

Fundamentalsystem, $\begin{pmatrix} -2e^{-x} & e^{5x} \\ e^{-x} & e^{5x} \end{pmatrix}$ ist die Fundamentalmatrix von hom. System, und allgem. Lösung der hom. System ist

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} & e^{5x} \\ e^{-x} & e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \\ c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} \end{pmatrix};$$

(ii) Finden wir jetzt die allgemeine Lösung nach der Methode der Variierung der Konst. „C:

$$\begin{pmatrix} -2e^{-x} & e^{5x} \\ e^{-x} & e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = f(x) = \begin{pmatrix} e^{x} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -2c_1'e^{-x} + c_2'e^{5x} = e^{x}; \\ c_1'e^{-x} + c_2'e^{5x} = 0; \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-c_1'e^{-x} = c_2'e^{5x};$$

$$\Downarrow$$

$$2c_2'e^{5x} + c_2'e^{5x} = e^{x};$$

$$(3e^{5x})c_2' = e^{x}; \quad (\Longrightarrow c_2'e^{5x} = \tfrac{1}{3}e^{x}); \; (\star\star)$$

$$c_2' = \frac{1}{3}\frac{e^{x}}{e^{5x}} = \frac{1}{3}\frac{e^{x}}{(e^{x})^5} = \frac{1}{3}e^{-4x};$$

$$\frac{dc_2}{dx} = \frac{1}{3}e^{-4x};$$

$$c_2 = \frac{1}{3}\int e^{-4x}\,dx = \frac{-1}{12}\int e^{-4x}\,d(-4x) =$$

$$= \frac{-1}{12}e^{-4x} + a; \quad \text{Const} = a \in \mathbb{R}$$

$$c_1'e^{-x} = -c_2'e^{5x};$$

$$\Downarrow (\star\star)$$

$$c_1'e^{-x} = -\frac{1}{3}e^{x};$$

$$c_1' = -\frac{1}{3}e^{2x}; \quad \text{Integriere:}$$

$$c_1 = -\frac{1}{6}e^{2x} + b, \quad b = \text{Const} \in \mathbb{R}.$$

Also:

Unser inhomogenes System hat allgemeine Lösung:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} & e^{5x} \\ e^{-x} & e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}e^{2x} + b \\ -\frac{1}{12}e^{-4x} + a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Jetzt löse endlich :) AWP:

$$y_1(0) = 0.5;$$
$$y_2(0) = 0;$$

$$y_1 = \frac{2}{6}e^{-x}\cdot e^{2x} - 2be^{-x} - \frac{1}{12}e^{5x}\cdot e^{-4x} + ae^{5x} =$$

$$= \frac{1}{3}e^{x} - \frac{1}{12}e^{x} - 2be^{-x} + ae^{5x} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{x} - 2be^{-x} + ae^{5x};$$

$$y_2 = -\frac{1}{6}e^{x} + be^{-x} - \frac{1}{12}e^{x} + ae^{5x} = -\frac{1}{4}e^{x} + be^{-x} + ae^{5x};$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{4}e^{x} - 2be^{-x} + ae^{5x}; \\ y_2 = -\frac{1}{4}e^{x} + be^{-x} + ae^{5x}; \end{cases} \wedge \begin{cases} y_1(0) = \frac{1}{2}; \\ y_2(0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - 2b + a; \\ 0 = -\frac{1}{4} + b + a; \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = -8b + 4a; \\ 1 = 4b + 4a; \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = 4b; \qquad b = 0;$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{1}{4};$$

also die Lösung des AWPs ist:

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{x} + \frac{1}{4} e^{5x} \\ -\frac{1}{4} e^{x} + \frac{1}{4} e^{5x} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{5x} + e^{x} \\ e^{5x} - e^{x} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 *Man diskutiere die Lösbarkeit des Anwangswertproblems*

$$y' = \sqrt{y}, \; y \geq 0$$

$$y(0) = 0.$$

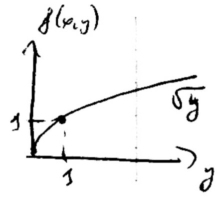
Man gebe eine Lösung an, die zusätzlich $y(5) = 4$ *erfüllt.*

<u>Lösung:</u>
s. nächste Seite

(*) $y' = \sqrt{y}$, $y \geq 0$

$y(0) = 0$.

$\sqrt{y}$ ist stetig, also es existiert mindestens eine Lösung; um Eindeutigkeit zu erzwingen, muß $\sqrt{y}$ Lipschitz-Bedingung in y erfüllen;



für $y \geq 1$ ist die L.-Bedingung schon mit $L = 1$ erfüllt auf $[1, \infty)$:

$$|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq |(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})\underbrace{(\underset{\geq 1}{\sqrt{y_1}} + \underset{\geq 1}{\sqrt{y_2}})}_{\geq 1}| = 1 \cdot |y_1 - y_2|$$

Wenn man aber Konstante L als obere Schranke zur Ableitung von $f(x,y)$, in unserem Fall $f(x,y) = \sqrt{y}$, ansieht, so für $\sqrt{y}$ ergibt sich Existenz einer $L < \infty$ für jede $\varepsilon > 0$, so daß $|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq L\,|y_1 - y_2|$ auf $[0+\varepsilon, +\infty)$.

$(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ – monoton stetig fallend auf $(0, +\infty)$, also $\forall \varepsilon$ auf $[0+\varepsilon, \infty)$.

$\Downarrow$

(*) erfüllt eine globale L.-Bedingung auf $y \in (0, +\infty)$ (oder $[0+\varepsilon, \infty)$ für beliebig kleine $\varepsilon > 0$) und somit AWP eindeutig lösbar.

In 0 ist aber Eindeutigkeit zerstört.

Wirklich, die Triviallösung $y \equiv 0$ erfüllt AB und die Gleichung (*) auch.

Und nichttriviallösung ist:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{y} = x + C,$$

$$y = \frac{x^2}{4} + C;$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} + 0, \; C = 0;$$

Also für $y \geq 0$ $\exists$ es 2 Lösungen der AWP

$$\left[\begin{array}{l} y \equiv 0; \\ y = \frac{x^2}{4}; \end{array}\right.$$

Wäre $y > 0$ vorausgesetzt, so wäre die Lösung eindeutig ($y = x^2/4$).

Aufgabe 5 *Vorgelegt sei ein Anfangswertproblem*

$$y'(x) = x^2 + y(x), \ x \geq 0$$

$$y(0) = 1.$$

Verifizieren Sie, daß es von $y(x) = 3e^x - x^2 - 2x - 2, \ x \geq 0$ *gelöst wird und bestimmen sie vermöge des **Eulerischen Polygonzugverfahrens** mit Schrittweite* 0.2 *einen Näherungswert* $E(1)$ *für* $y(1)$. *Wie groß ist der prozentuale Fehler?*

Lösung:

$y' = x^2 + y, \quad x \geq 0$

$y(0) = 1;$

y diffbar

a) $(3e^x - x^2 - 2x - 2)_x = 3e^x - 2x - 2;$

$3e^x - 2x - 2 \equiv x^2 + (3e^x - x^2 - 2x - 2)$

$y(0) = 1 \ : \quad 3e^0 - 0^2 - 0 - 2 = 1 \Rightarrow$ löst AWP.

b) $y(1) = 3e - 1 - 2 - 2 = 3e - 5 = 3.1548454;$

– exakter Wert;

c) Euler

$y(0) = 1;$

$h = 0.2;$

$y' = f(x, y);$

$y_h(x) = y_i + (x - x_i) f(x_i, y_i);$

Also berechne:

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 1$

$x_1 = 0.2; \quad y_1 = 1 + 0.2\,(0^2 + 1) = 1.2;$

$x_2 = 0.4; \quad y_2 = 1.2 + 0.2\,(0.2^2 + 1.2) = 1.2 + 0.248 = 1.448;$

$x_3 = 0.6; \quad y_3 = 1.448 + 0.2\,(0.4^2 + 1.448) = 1.7696;$

$x_4 = 0.8; \quad y_4 = 1.7696 + 0.2\,(0.6^2 + 1.7696) = 2.19552;$

$x_5 = 1; \quad y_5 = 2.19552 + 0.2\,(0.8^2 + 2.19552) = 2.762624;$

also $y_h(1) = 2.762624;$

d) $r = |y(1) - y_h(1)| = 0.3922214;$

und $\left(\frac{r}{y(1)}\right)_{\%} = 12{,}4(32348)\,\%.$

Aufgabe 6 *Bestimmen Sie unter Verwendung des* ***Eulerischen Polygonzugverfahrens*** *die exakte Lösung des Anfangswertproblems*

$$y''(x) + y(x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 0$$

$$y(0) = y'(0) = 1.$$

Hinweis: Überführen Sie das Problem zunähst in ein System 1. Ordnung.

Lösung:
s. nächste Seite

$y''(x) + y(x) = 0, \qquad y'' + y = 0; \qquad y'' = -y;$

$t_1(x) := y(x); \qquad y(0) = 1$

$t_2(x) := y'(x); \qquad y'(0) = 1$

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix};$$ vektorwertige Fktn.

Euler:

$$y_{k+1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}_k + h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}_k =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}_k \underset{\text{Induktion}}{=} \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}_0 \checkmark \text{ AWP} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Berechne die EWe: (für Diagonalisierung)

$\lambda_1 = 1 + hi;$
$\lambda_2 = 1 - hi;$

EVen: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix};$

$A \cdot v_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2;$

$\underset{R}{A(v_i)_{i=1,2}} = (\lambda_i v_i)_{i=1,2} = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};$

$\Downarrow$

$A = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} R^{-1};$

$\Downarrow$

$A^k = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k R^{-1} = R \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} R^{-1};$

Sei $x \in [0,1]$, k die Anzahl der Eulerschritte bei h,
d.h. $x = kh - \delta h, \quad \delta \in [0,1);$

$\Downarrow$

$k = \frac{x}{h} + \delta;$

Dann $\lim_{h \to 0} \lambda_1^k = \lim_{h \to 0} (1 + ih)^k = \lim_{h \to 0} (1+ih)^{\frac{x}{h}} (1+ih)^{\delta} =$
$= e^{ix}$
bzw. $\lim_{h \to 0} \lambda_2^k = e^{-ix}$, (weil $\lim_{h \to 0} (1+ih)^{\frac{1}{h}} = e^{i}$)

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ x\in[x_k,x_{k+1}]}} y_h(x) = \lim_{h\to 0} y_k + \overbrace{(x-x_k)}^{\nearrow 0,\ h\to 0}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y^2 =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{y_h(x) - y_{k+1}}_{\substack{\to 0\\ h\to 0}} + y_{k+1} =$$

$$= \lim_{h\to 0} A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = R\begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} R^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$ nach Konstruktion

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i(e^{ix}+e^{-ix}) & e^{ix}-e^{-ix} \\ -(e^{ix}-e^{-ix}) & i(e^{ix}+e^{-ix}) \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} & \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \\ -\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} & \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

Euler'schen Formeln:

$$= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \cos x + \sin x$$