21.06.2016

Lösung der DGL-Systeme

DGL-System,
1. Ordnung
linear

$y_1, \dots, y_n$, $n \in \mathbb{N}$
werden gesucht.

Gegeben:

$$y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n + b_1(x)$$
$$y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n + b_n(x)$$
$$\dots$$
$$y_n' = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n + b_n(x)$$

Matrix-Schreibweise

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{b}},$$

wobei

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

komponentenweise berechnete Ableitung ist.

Sind die a_{ke}, $\forall k, \ell$ Konstanten (hängen von x nicht ab!), so heißt das GS linear und konstanten Koeffizienten.

System der linearen DGl 1. Ordnung mit n Unbekannten $y_1, \dots, y_n$.

Die Koeffizienten

$a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{nn}$

hängen i.A. von x ab.

$$y_k' = \left\langle \begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \dots \\ a_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle + b_k(x);$$

$\forall k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$

Bsp: Jede lineare DGl n-ter Ordnung: "(explizit)"

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

läßt sich in ein lineares DGl-System 1. Ordnung umwandeln:

$$y = y_1 = y_1$$
$$y' = y_1' = y_2$$
$$y'' = y_2' = y_3$$
$$y''' = y_3' = y_4$$
$$\vdots$$
$$\left(y^{(n-2)}\right)' = y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n$$
$$y^{(n)} = y_n' =$$
$$= b(x) - a_{n-1} y_n - a_{n-2} y_{n-1} - \dots$$
$$\dots - a_1 y_2 - a_0 y_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_{n-1} y_n - a_{n-2} y_{n-1} - \dots \\ \quad - \dots - a_1 y_2 - a_0 y_1 + b(x) \end{cases}$$

n Gleichungen

n Unbekannte

Für $n=4$ z.B.:

$$y^{(4)} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

$y_1 = y$

$y_1' = y_2 = y'$

$y_2' = y_3 = y''$

$y_3' = y_4 = y'''$

$y^{(4)} =$ $y_4' = -a_3 y_4 - a_2 y_3 - a_1 y_2 - a_0 y_1 + b(x)$

Oder, in Matrixform:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Das DGl-System heißt homogen, falls $b(x) \equiv 0$, sonst inhomogen.

Für die Lösung des homogenen DGLSs gilt das Überlagerungsprinzip:

Seien $\bar{v}, \bar{w}$ zwei Lösungen.

Dann ist auch $(\alpha \bar{v} + \beta \bar{w})$ eine Lösung:

$$\begin{cases} \bar{v}' = A\bar{v} \\ \bar{w}' = A\bar{w} \end{cases} \Rightarrow$$

$f' + g' = (f+g)'$ Summenregel

$$\bar{v}' + \bar{w}' = (\bar{v} + \bar{w})' = A\bar{v} + A\bar{w} = A(\bar{v} + \bar{w})$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}$ oder $\forall \xi \in \mathbb{C}$:

$$\bar{v}' = A\bar{v} \Rightarrow$$

$$(\xi \bar{v})' = \xi \cdot \bar{v}' = \xi(A \cdot \bar{v}) = A(\xi \bar{v}).$$

D.h., beliebige Linearkombinationen der

Lösungen sind wieder eine Lösung

$\Rightarrow$ Die Lösungen des homogenen (!) DGLS bilden einen Vektorraum.

Def: Eine Basis $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ von n-dimensionalen Lösungsraum heißt auch **Fundamentalsystem**, bzw.

Fundamentale Basis, des DGLS.

Die **allgemeine Lösung des homogenen DGLS** lautet dann:

$$\bar{y} = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 + \ldots + c_n \bar{y}_n =$$

$$= Y \cdot \bar{c},$$

wobei $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (beliebig),

und

$$Y = Y(x) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n).$$

Spalten(vektoren)

$Y(x)$ heißt auch

Fundamentalmatrix von

dem DGLS.

Für das inhomogene

DGLS $\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{b}(x)$ (*)

gilt: ist $\bar{y}_0$ eine

spezielle Lösung von (*),

so gilt:

$$\bar{y}_{\text{allg}} = \bar{y}_0 + Y\bar{c}, \quad \bar{c} \in \mathbb{R}^n$$

Zwei Aufgaben:

(1) Bestimmung eines Fundamentalsystems

(2) Bestimmung einer partikulären Lösung

22.06.

Sei nun ein homogenes

DGLS gegeben:

$$\bar{y}' = A\bar{y}.$$

Ansatz:

$$\bar{y} = e^{\lambda x}\bar{v}, \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \bar{y}' = \lambda e^{\lambda x}\bar{v}$$

↳ in das GS:

$$\lambda e^{\lambda x}\bar{v} = A\left(e^{\lambda x}\bar{v}\right)$$

$e^{\lambda x} \neq 0 \quad \forall \lambda \forall x$

skalare Funktion

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda x}\bar{v} = e^{\lambda x}\left(A\bar{v}\right)$$

$$\lambda\bar{v} = A\bar{v}$$

d.h.: $\bar{v}$ ist EV zum EW λ von A

Bsp:

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

d.h. in Matrixform:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von A:

$$0 = \det(A - \lambda E)$$

$$\begin{vmatrix} (7-\lambda) & -5 \\ 4 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= -(7-\lambda)(2+\lambda) - (-20) =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 3$$

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2$: $\vec{v}_1$ - ?

$\vec{v}_1 \neq \vec{0} \wedge (A - \lambda_1 E)\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} (7-2) & -5 \\ 4 & (-2-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$

$v_1^{(1)} := \mu \Rightarrow v_1^{(2)} = +\mu$

$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ +\mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mu, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow$ z.B. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mu = 1$

$\lambda_2 = 3$: $\vec{v}_2 \neq \vec{0} \wedge (A - \lambda_2 E)\vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} (7-3) & -5 \\ 4 & (-2-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4 v_2^{(1)} - 5 v_2^{(2)} = 0$

$\Rightarrow$ z.B. $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Fundamentallösung / Fundamentalsystem:

$$\left(\bar{y}_1 = \right)\bar{b}_1 = e^{\lambda_1 x}\bar{v}_1 = e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};$$

$$\left(\bar{y}_2 = \right)\bar{b}_2 = e^{\lambda_2 x}v_2 = e^{3x}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung:

$$\bar{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = C_1\bar{b}_1 + C_2\bar{b}_2 =$$

$$= C_1 e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{3x}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} =$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{2x}\cdot 1 + C_2 e^{3x}\cdot 5 \\ C_1 e^{2x}\cdot 1 + C_2 e^{3x}\cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = C_1 e^{2x} + 5C_2 e^{3x} \\ y_2(x) = C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{3x} \end{cases}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Was macht man,

wenn man nicht

n verschiedene Eva hat?

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Ewe: $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 0 \\ 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = 10$ doppelt!

$\Rightarrow$ Eva:

$$(A - \lambda E)\,\vec{v} = \vec{0} \qquad \wedge\ \vec{v} \neq 0$$

$$0 \cdot v_1 + 0 v_2 = 0$$

$\Downarrow$

z.B. $v_1 = \lambda$

$v_2 = \mu$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bsp 2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm j$$

Reelle EV?

$$\begin{pmatrix} 1-(1+j) & -1 \\ 1 & 1-(1+j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -j & -1 \\ 1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

↯ $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ ↯

$\Rightarrow$ Hauptvektoren:

$$\lambda \vec{v} = A^k \vec{v}$$

Mehrfach $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$

die Gl:

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots$

Def: Die Gesamtheit der EWe einer Matrix A nennt man das Spektrum der Matrix A.

Satz: Sei A eine Matrix mit den EWen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Dann gilt:

(1) Die EWe der Matrix $(A + \mu E)$ sind

$\lambda_1 + \mu$; $\lambda_2 + \mu$; ....; $\lambda_n + \mu$

(2) Die Eigenwerte von der Matrix αA sind

$\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots\ldots, \alpha\lambda_n$

(3) Die Eigenwerte von A^k, $k \in \mathbb{N}$ sind

$\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \ldots, \lambda_n^k$

(4) A invertierbar

$\Updownarrow$

0 ist kein EW von A

(5) Ist A invertierbar, gilt (3) für $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Insbesondere hat A^{-1} die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$.

Weder für $A \pm B$ noch für $A \cdot B$ gilt es die einfache Regel!

Bsp: $y' = Ay$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

(1) Matrix - Scarefaweise:

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

③ EWe:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = 5$

③ EVen:

$\lambda_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 5$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = 0$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{y} = C_1 e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} \vec{v}_2 =$$

$$= C_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} \cdot 2 + C_2 e^{5x} \\ y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \end{cases}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Hinweis: Jordan'sche Normalform

Wenn man nicht

n Verschiedene Eigenvektoren

findet (wenn in Fall,

wenn die charakteristische

Gl. vielfache reelle Nullstelle

hat (und in den Fall

auch nicht immer!) (wenn

algebraische Vielfachheit größer

als geometrische Vielfachheit

eines Eigenwerts ist):

Die fehlende Basis-

vektoren ergänzt man durch

die Hauptvektoren:

① Der Hauptvektor der

Ordnung 0 ist der Eigenvektor

Sei μ ein Eigenwert

der Vielfachheit m, d.h.

die LFZ des charakteristischen Polynoms

$\det(A - \lambda E)$

beinhaltet den Faktor

$(\lambda - \mu)^m$.

Und es gäbe

$l < m$ linear unabhängige

Eigenvektoren zum EW μ.

Dann heißt Vektor $\bar{v}_{l+k}$

der k-te verallgemeinerte

Lösung des GS:

$(A - \mu E)^k \bar{v}_{l+k} = \bar{0}$ gilt,

der Hauptvektor der

Ordnung k der Matrix

A zum Eigenwert μ,

falls $\bar{v}_{l+k}$ nicht in

der linearen Hülle

der Hauptvektoren der

Ordnung $0, 1, \ldots, k-1$ liegt.

(Das geht, weil

A quadratisch ist!)

Und das wiederholt man so oft, bis die Anzahl der linear Lösbare der Eigenvektoren und Hauptvektoren der Vielfachheit n des Eigenwerts μ gleich wird.

Dann: ein homogenes DGLS

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

mit konstanten Koeffizienten hat die allgemeine Lösung:

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} \bar{v}_k, \quad c_k \in \mathbb{R}$$

wobei n die Ordnung des GS ist und die λ_k Eigenwerte mit

entspr. Eige- und
Hauptvektoren v_{ik} sind.

Lösg der inhomogenen DGl-Systeme

Sei das DGlS nun
linear mit konst. Koeffizienten
Matrix

① Variation der Konstanten

② Zerlegungssatz:

$\bar{y}_{\text{allg. inhom}} = \bar{y}_{\text{allg. homog}} +$

$+ \bar{y}_{\text{part. Lös. inh.}}$;

(Ansatz gemäß der Tabelle aus Kapitel 3, verallg. für Vektorfunktionen)

Bsp:

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \bar{y} + \begin{pmatrix} -2e^x \\ -36x \end{pmatrix}$$

Zug. hom. LA DGLS:

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \bar{y}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Char. Gl:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3$$

sind die Eigenwerte von A.

Even:

$\lambda_1 = 2$: $(A - \lambda_1 E)\bar{v}_1 = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} (1-2) & -2 \\ 1 & (4-2) \end{pmatrix} \bar{v}_1 = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

z.B.: $v_1^{(1)} = 2 \wedge v_1^{(2)} = -1$

bzw. $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} (1-3) & -2 \\ 1 & (4-3) \end{pmatrix} \bar{v}_2 = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{v}_2 = \bar{0}$$

z.B. $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \bar{y}_{\text{allhom}} = c_1 e^{2x}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + c_2 e^{3x}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Setze nun $c_1 = c_1(x)$, $c_2 = c_2(x)$ (VdK):

$$\bar{y} = c_1(x)\, e^{2x}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + c_2(x) e^{3x}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};$$

$$\bar{y}' = \left(c_1' e^{2x} + c_1 e^{2x}\cdot 2\right)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} +$$

$$+\left(c_2' e^{3x} + 3c_2 e^{3x}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix};$$

$\rightsquigarrow$ in die GL:

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\bar{y} + \begin{pmatrix}-2e^x\\ -36x\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}2c_1' e^{2x} + 4c_1 e^{2x} - c_2' e^{3x} - 3c_2 e^{3x}\\ -c_1' e^{2x} - 2c_1 e^{2x} + c_2' e^{3x} + 3c_2 e^{3x}\end{pmatrix}}_{\bar{y}'}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x}\\ -c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}\end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix}-2e^x\\ -36x\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2c_1'e^{2x}+4c_1e^{2x}-c_2'e^{3x}-3c_2e^{3x} \\ -c_1'e^{2x}-2c_1e^{2x}+c_2'e^{3x}+3c_2e^{3x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2c_1e^{2x}-c_2e^{3x}+2c_1e^{2x}-2c_2e^{3x} \\ 2c_1e^{2x}-c_2e^{3x}-4c_1e^{2x}+4c_2e^{3x} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -2e^{x} \\ -36x \end{pmatrix};$$

$$2c_1'e^{2x}+4c_1e^{2x}-4c_1e^{2x}-$$

$$-c_2'e^{3x}-3c_2e^{3x}+3c_2e^{3x}+2e^{x}=0$$

$$-c_1'e^{2x}-2c_1e^{2x}+2c_1e^{2x}+$$

$$+c_2'e^{3x}+2c_2e^{3x}-3e^{3x}c_2+36x=0$$

$$\begin{cases} 2c_1'e^{2x}-c_2'e^{3x}=-2e^{x} \\ -c_1'e^{2x}+c_2'e^{3x}=-36x \end{cases}$$

$u := c_1'e^{2x}$

$v := c_2'e^{3x}$

$$\begin{cases} 2u-v=-2e^{x} \\ -u+v=-36x \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad u = -2e^{x} - 36x$

$v = -36x + 4 = -2e^{x} - 72x$

$C_1' = e^{-2x}(-2e^{x} - 36x) =$

$= -2e^{-x} - 36x e^{-2x};$

$C_2' = e^{-3x}(-2e^{x} - 72x) =$

$= -2e^{-2x} - 72x e^{-3x};$

28.6.

$C_1'(x) = -2e^{-3x} - 36x e^{-2x}$

$C_1(x) = \int (-2e^{-3x} - 36x e^{-2x})\,dx =$

$= -2\int e^{-3x}\,dx - 36\int x e^{-2x}\,dx;$

$\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}$

$\int x e^{-2x}\,dx =$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{-2x} \qquad g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

P.I. $= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx =$

$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + K_2,$

$K_2 \in \mathbb{R}$

$$C_1(x) = \frac{2}{3}e^{-3x} + 18xe^{-2x} + 9e^{-2x} + \tilde{K}_1,$$

$\tilde{K}_1 \in \mathbb{R}$

$C_2' = -2e^{-2x} - 72xe^{-3x}$

$C_2(x) = -2\int e^{-2x}dx - 72\int xe^{-3x}dx$

$\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + K_3,$

$K_3 \in \mathbb{R}$

$\int xe^{-3x}dx =$

$f(x) = x, \quad f'(x) = 1$

$g(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}, \quad g'(x) = e^{-3x}$

$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx =$

$= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + K_4,$

$K_4 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow C_2(x) = e^{-2x} + 24xe^{-3x} + 8e^{-3x} + \tilde{K}_2, \quad \tilde{K}_2 \in \mathbb{R}$$

$$C_1(x) = \frac{2}{3}e^{-3x} + 18xe^{-2x} + 9e^{-2x} + \tilde{K}_1, \quad \tilde{K}_1 \in \mathbb{R}$$

$$\bar{y} = C_1(x)\, e^{2x}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2(x) e^{3x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \bar{y}_{\text{allg. inh.}} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}e^{-3x} + 18e^{-2x}x + 9e^{-2x} + \tilde{K}_1\right)e^{2x}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(e^{-2x} + 24xe^{-3x} + 8e^{-3x} + \tilde{K}_2\right)e^{3x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}e^{-x} + 18x + 9 + e^{2x}\cdot\tilde{K}_1\right)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(e^{x} + 24x + 8 + \tilde{K}_2 e^{3x}\right)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\tilde{k}_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \tilde{k}_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} e^{-x} + 36x + 18 - e^{x} - 24x - 8 \\ -\frac{2}{3} e^{-x} - 18x - 9 + e^{x} + 24x + 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \bar{y}_{allg} + \bar{y}_{sp} =$$

$$= \left[\tilde{k}_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \tilde{k}_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} e^{-x} - e^{x} + 12x + 10 \\ -\frac{2}{3} e^{-x} + e^{x} + 6x - 1 \end{pmatrix}$$

Ansatz für spezielle Lösung:

$$\bar{r}(x) = \begin{pmatrix} -2e^{x} \\ -36x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ -36x \end{pmatrix} e^{0};$$

↓ 1 hier EW — ↓ 0 hier EW

$$\Rightarrow \bar{y}_{part} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} cx + d \\ fx + g \end{pmatrix}$$

Analog zu DGL

$$\vec{y}_{part} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a e^x + c \\ b e^x + d \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ in die DGl

$$\begin{pmatrix} a e^x + c \\ b e^x + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a e^x + cx + d \\ b e^x + dx + g \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -2e^x \\ -36x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a e^x + cx + d - 2b e^x - 2dx - 2g - 2e^x \\ a e^x + cx + d + 4b e^x + 4dx + 4g - 36x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^x(a - 2b - 2) + x(c - 2d) + (d - 2g) \\ e^x(a + 4b) + x(c + 4d - 36) + (d + 4g) \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{cases} a = a - 2b - 2 \\ b = a + 4b \end{cases} \quad | \; e^x$$

$$\begin{cases} 0 = c - 2d \\ 0 = c + 4d - 36 \\ c = d - 2g \\ d = d + 4g \end{cases} \quad \begin{array}{|l} | \; x \\ \hline | \; x^0 \end{array}$$

1. System:

$$\begin{cases} 0 = -2b - 2 \\ 0 = a + 3b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad b = -1$$
$$a = 3$$

2. System:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \\ g \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 36 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$z_2 \leftarrow z_2 - z_1$

$z_3 \leftarrow z_3 - z_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 36 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad /:6$$

$z_2 \leftrightarrow z_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 + z_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 - z_4$

$z_3 \leftrightarrow z_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow g = -1$

$f = 6$

$d = f - 4g = 6 + 4 = 10$

$c = 2f = 12$

und

$a = 3$

$b = -1$

$$\Rightarrow \overline{y_{part}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} Cx+d \\ fx+g \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} 12x+10 \\ 6x-1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y_{allg.inh.}} = \overline{y_{allhom}} + \overline{y_{part}} =$$

$$= \left[C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] +$$

$$+ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{x} + \begin{pmatrix} 12x+10 \\ 6x-1 \end{pmatrix}.$$

Bsp / HA:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 3y + 4z - 3t$$

$$\frac{dy}{dt} = -6x + 7y + 6z + 1 - 7t$$

$$\frac{dt}{dt} = x - y + z + t$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} =: \bar{w}(t)$$

$$\Downarrow$$

Matrixform:

$$\bar{w}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{w} + \begin{pmatrix} -3t \\ 1-7t \\ t \end{pmatrix}$$

Lineares DGLS mit konstanten Koeff., inhomog

① Allg. Lösung des homogen. Systems:

$$\bar{w}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \bar{w}$$

Konst. Koeff. $\Rightarrow$ EW $\wedge$ EV

Char. Polynom:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 3 & 4 \\ -6 & 7-\lambda & 6 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)(7-\lambda)(1-\lambda) + 3 \cdot 6 \cdot 1 + (-6)(-1)4 -$$

$$- 4(7-\lambda)1 - (-1)6(-2-\lambda) - 3(-6)(1-\lambda)$$

$= (-2-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 7) + 18 + 24 - 28 + 4\lambda$

$-12 - 6\lambda + 18 - 18\lambda =$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 8\lambda - 14 + 14 - 20\lambda + 6 =$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 ;$

Die char. Gl:

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

$\lambda_1 = 1$ ist eine NS:

$(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) : (\lambda - 1) =$

$\lambda^3 - \lambda^2 \qquad = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$-5\lambda^2 + 11\lambda$

$-5\lambda^2 + 5\lambda$

$6\lambda - 6$

0

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 3$

$\Rightarrow$ 3 versch. reelle EWe:

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 3$

Weiter: HA !

2. HA: Die Masse m ist mit einer Anfangsgesch. v. 0 so geworfen, dass v. Horizont

α ist. Wenn Luftwiderstand proportional zu Geschwindigkeit ist, wie lautet das Bewegungsgesetz dieser Masse und wie sieht die Trajektorie aus?

4.7.

Vorb. Übg:

12.09.

Vorrus.

Raum & Zeit: s. Vorlesungsseite

$$\vec{w}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{w} + \begin{pmatrix} -3t \\ 1-7t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

EWe von A:

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 3$

Eigenvektoren:

$(A - \lambda_k E)\vec{v}_k = \vec{0} \wedge \vec{v}_k \neq \vec{0}$

$\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -2-1 & 3 & 4 \\ -6 & 7-1 & 6 \\ 1 & -1 & 1-1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 6 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$z_2 \leftarrow 6 \cdot z_1 + z_2$

$z_3 \leftarrow 3 \cdot z_1 + z_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} v_{13} = 0 \\ v_{11} = v_{12} \\ \text{z.B. } v_{11} = v_{12} = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1D EV zum EW $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$:

$(A - \lambda_2 E)\vec{v}_2 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -2-2 & 3 & 4 \\ -6 & 7-2 & 6 \\ 1 & -1 & 1-2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -6 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -6 & 5 & 6 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$z_2 \leftarrow z_2 + 6 z_1$

$\rightsquigarrow$ $z_3 \leftarrow 4 \cdot z_1 + z_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow$ $v_{22} = 0$, $v_{21} = v_{23}$

z.B. $v_{21} = 1$, $v_{23} = 1$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 3$

$(A - \lambda_3 E)\,\vec{v}_3 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -2-3 & 3 & 4 \\ -6 & 7-3 & 6 \\ 1 & -1 & 1-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ -6 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad z_1 \leftrightarrow z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -6 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} z_2 \leftarrow z_2 + 6z_1 \\ z_3 \leftarrow 5z_1 + z_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{32} = -3 v_{33}$$

$$v_{31} = v_{32} + 2 v_{33} = -v_{33}$$

mit z.B. $v_{33} := 1$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

Fundamentallsystem bzw.

Fundamentalbasis ist:

$$b_1(x) = e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1 = e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2(x) = e^{\lambda_2 x}\vec{v}_2 = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_3(x) = e^{\lambda_3 x}\vec{v}_3 = e^{3x}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{y}_{allhom}(x) = c_1 b_1(x) + c_2 b_2(x) + c_3 b_3(x) =$$

$$= c_1 e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3x}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\bar{w}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{w} + \begin{pmatrix} -3t \\ 1-7t \\ t \end{pmatrix}$$

Zwei Lösungswege:

(1) VdK

(2) Zerlegungssatz

Ansatz: $\bar{y}_p = \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \\ A_3 t + B_3 \end{pmatrix}$

$$y(t) \equiv w(t)$$

$$y_p'(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \\ A_3 t + B_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t \\ 1-7t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 + 3t \\ 7t - 1 + A_2 \\ A_3 - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(-2A_1 + 3A_2 + 4A_3) + \\ \quad + (-2B_1 + B_2 \cdot 3 + 4B_3 \\ t(-6A_1 + 7A_2 + 6A_3) + \\ \quad + (-6B_1 + 7B_2 + 6B_3) \\ t(A_1 - A_2 + A_3) + (B_1 - B_2 + B_3) \end{pmatrix}$$

Koeff.-Vergleich

(weil t^n und t^m für $n \neq m$ linear unabhängig sind):

$$\begin{cases} 3 = -2A_1 + 3A_2 + 4A_3 \\ A_1 = -2B_1 + 3B_2 + 4B_3 \end{cases} \text{1. Gl.}$$

$$\begin{cases} 7 = -6A_1 + 7A_2 + 6A_3 \\ A_2 - 1 = -6B_1 + 7B_2 + 6B_3 \end{cases} \text{2. Gl}$$

$$\begin{cases} -1 = A_1 - A_2 + A_3 \\ A_3 = B_1 - B_2 + B_3 \end{cases} \text{3. Gl.}$$

6 Gl., 6 Unbek., lin. GS

$\Rightarrow$ Matrixform:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ -6 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -6 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

z.B. GA
(oder Matlab)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also

$$\bar{y}_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine spezielle Lösung von dem inhomogenen System der DGL.

Dann lautet der Zerlegungssatz:

$$\bar{y}_{\text{allg. inh.}} = \bar{y}_{\text{allg. h.}} + \bar{y}_p$$

In unserem Fall

$$\bar{y}_{\text{allg.inh}}(t) = \bar{w}(t) =$$

$$= C_1 e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{3x}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Lösungsmöglichkeit:

Vdk:

$$\bar{y}_{\text{allg.inh}} =$$

$$= \cancel{C_1(x)} e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \cancel{C_2(x)} e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \cancel{C_3(x)} e^{3x}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

wobei $C_1(x)$, $C_2(x)$ und $C_3(x)$ unbekannte zu bestimmende Funktionen sind.

Dann muss $\bar{y}_{\text{allg.inh}}$ das inhomogene DGLS erfüllen:

$$\overline{y_{\text{inh}}}' = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overline{y_{\text{inh}}} + \begin{pmatrix} -3t \\ 1-7t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\overline{y_{\text{inh}}}' = \left[c_1(x) e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2(x) e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3(x) e^{3x} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]' =$$

$$= \left(c_1(x) e^{x}\right)' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(c_2(x) e^{2x}\right)' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(c_3(x) e^{3x}\right)' \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(c_1' e^{x} + c_1 e^{x}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(c_2' e^{2x} + 2c_2 e^{2x}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(c_3' e^{3x} + 3c_3 e^{3x}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1' e^{x} + c_1 e^{x} + c_2' e^{2x} + 2c_2 e^{2x} - c_3' e^{3x} - 3c_3 e^{3x} \\ c_1' e^{x} + c_1 e^{x} - 3c_3' e^{3x} - 9c_3 e^{3x} \\ c_2' e^{2x} + 2c_2 e^{2x} + c_3' e^{3x} + 3c_3 e^{3x} \end{pmatrix} =$$

$$= \overline{y_{\text{inh}}}' ;$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overline{y_{\text{allg.}}} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x} \\ C_1 e^x - 3 C_3 e^{3x} \\ C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\left(C_1 e^x + C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x}\right) + 3\left(C_1 e^x - 3C_3 e^{3x}\right) + \\ \quad + 4\left(C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}\right) \\ -6\left(C_1 e^x + C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x}\right) + 7\left(C_1 e^x - 3C_3 e^{3x}\right) + \\ \quad + 6\left(C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}\right) \\ \left(C_1 e^x + C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x}\right) - \left(C_1 e^x - 3C_3 e^{3x}\right) + \\ \quad + \left(C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1\left(-2e^x + 3e^x\right) + C_2\left(-2e^{2x} + 4e^{2x}\right) + \\ \quad + C_3\left(2e^{3x} - 9e^{3x} + 4e^{3x}\right) \\ C_1\left(6e^x + 7e^x\right) + C_2\left(-6e^{2x} + 6e^{2x}\right) + \\ \quad + C_3\left(6e^{3x} - 21e^{3x} + 6e^{3x}\right) \\ C_1\left(e^x - e^x\right) + C_2\left(e^{2x} + e^{2x}\right) + \\ \quad + C_3\left(-e^{3x} + 3e^{3x} + e^{3x}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 2e^{2x} - 3e^{3x} C_3 \\ C_1 e^x - 9 e^{3x} C_3 \\ 2e^{2x} C_2 + 3e^{3x} C_3 \end{pmatrix}$$

Also: $(x \equiv t)$

$$\begin{pmatrix} c_1'e^x + c_1e^x + c_2'e^{2x} + 2c_2e^{2x} - c_3'e^{3x} - 3c_3e^{3x} \\ c_1'e^x + c_1e^x - 3c_3'e^{3x} - 9c_3e^{3x} \\ c_2'e^{2x} + 2c_2e^{2x} + c_3'e^{3x} + 3c_3e^{3x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1e^x + 2c_2e^{2x} - 3e^{3x}c_3 \\ c_1e^x - 9e^{3x}c_3 \\ 2e^{2x}c_2 + 3e^{3x}c_3 \end{pmatrix} + \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'e^x + c_2'e^{2x} - c_3'e^{3x} \\ c_1'e^x - 3c_3'e^{3x} \\ c_2'e^{2x} + c_3'e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ 1-7x \\ x \end{pmatrix}$$

$u = c_1'e^x$

$v = c_2'e^{2x}$

$w = c_3'e^{3x}$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u + v - w = -3x \\ u - 3w = 1 - 7x \\ v + w = x \end{cases}$$

Lineares GS, 3 Gl., 3 Var.: x, 3d, en / Parameter!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3x \\ 1 & 0 & -3 & 1-7x \\ 0 & 1 & 1 & x \end{array}\right)$$

$z_2 \leftarrow z_1 - z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3x \\ 0 & 1 & 2 & 4x-1 \\ 0 & 1 & 1 & x \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_2 - z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3x \\ 0 & 1 & 2 & 4x-1 \\ 0 & 0 & 1 & 3x-1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad w = 3x-1$

$v = 4x-1-2(3x-1) = -2x+1$

$u = -3x+w-v = -3x+3x-1+2x-1 =$

$= 2x-2$

bzw.

$$\begin{cases} c_1' e^x = 2x-2 \\ c_2' e^{2x} = -2x+1 \\ c_3' e^{3x} = 3x-1 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} c_1'(x) = (2x-2)e^{-x} \\ c_2'(x) = (1-2x)e^{-2x} \\ c_3'(x) = (3x-1)e^{-3x} \end{cases}$$

$$C_1(x) = \int (2x-2)\, e^{-x}\, dx =$$

$$= 2\int x e^{-x}\, dx - 2\int e^{-x}\, dx \quad (=)$$

$$\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + k_{11}, \quad k_{11} \in \mathbb{R}$$

$$\int x e^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx \quad [=]$$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g(x) = -e^{-x} \qquad g'(x) = e^{-x}$

$$[=] \; -xe^{-x} - e^{-x} + k_{12}, \quad k_{12} \in \mathbb{R}$$

$$(=) \; -2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2e^{-x} + k_1 =$$

$$= -2xe^{-x} + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$C_2(x)$ analog

$C_3(x)$ analog

(HA)

und dann

Ansatz rückeinsetzen

und ausmultiplizieren:

$\overline{y_{\text{allg.hom}}} =$

$$c_1(x)\, e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_2(x)\, e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3(x)\, e^{3x}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \left(-2x e^{-x} + K_1\right) e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} +$$

$$+ c_2(x)\, e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3(x)\, e^{3x}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{-2x\, e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{von der spez. Lösg des inhom. DGS.}} + \underbrace{K_1\, e^{x}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{von der allg. hom.}} +$$

$$+ c_2(x)\, e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c_3(x)\, e^{3x}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}$$