$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Wieviele Lösungen hat das GS $(*)$?

Wie sehen diese aus?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{x} = \bar{b};$$

Gauß - Alg. zur Bestimmung von Rang A (und gleichzeitig der Lösung)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 - z_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$z_4 \leftarrow z_4 - z_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$z_4 \leftarrow z_4 - z_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$\text{Rang } A = 4 \; ; \; A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$\Downarrow$

voller Rang

$\Downarrow$

eindeutige Lösbarkeit

$\Downarrow$

eine Lösung

$x_4 = 1$
$x_3 = 0$
$x_2 = 0$
$x_1 = 0$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

x_2 - ?

Wieviele Lösungs hat das GS?

Cramer'sche Regel!

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

Entwicklung nach der 3. Spalte:

$$= 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} =$$

$$= -\big[1 \cdot 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-3)\big] =$$

$$= -\big[-1 - 2 + 3\big] =$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ Das System ist nicht eindeutig lösbar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

(1) Ist A invertierbar?

(2) $A^{-1} = ?$

(3) Lösen Sie $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Entw. nach 1. Zeile:

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 1 = 0$$

A ist nicht invertierbar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$A^{-1} - ?$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Entw. nach 1. Zeile

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 1$$

$$\Rightarrow \det A = 1 + 1 = 2$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ inverterbar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z_3 \longleftarrow z_3 - z_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$z_4 \leftarrow z_4 - z_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$z_4 \leftarrow z_4 - z_3$$

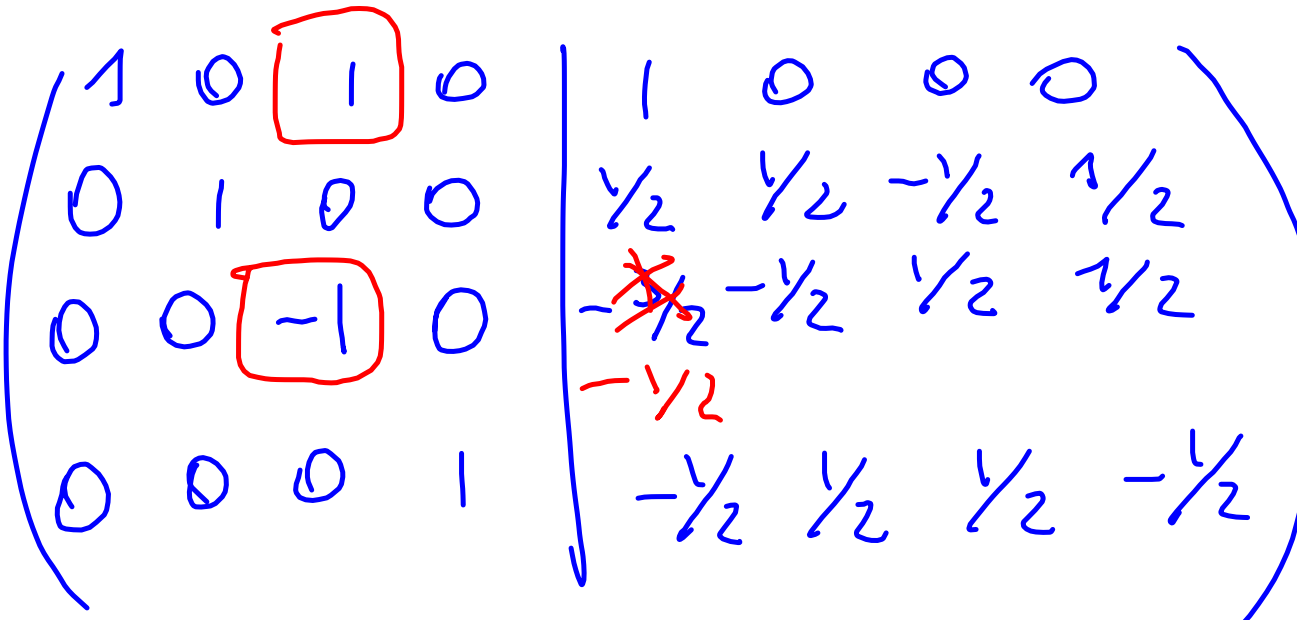
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$z_4 \leftarrow z_4 / (-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$z_3 \leftarrow z_3 - z_4$$

$$z_2 \leftarrow z_2 - z_4$$



$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$z_1 \leftarrow z_1 + z_3$$

$$z_3 \leftarrow -z_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{x} = \bar{b} \qquad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$A^{-1}A = E$$

$$\Rightarrow A^{-1}A\,\bar{x} = E\bar{x} = \bar{x}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$$

$$\widehat{X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nicht lineare Gl.

x/3

$f(x) = \frac{1}{2} e$;

$I = [0,1] \subseteq [c,\delta]$.

(a) Zeige die: die Folge $f(x)$ hat in $I = [0,1]$ genau einen Fixpunkt, indem sie zeige, dass:

(1) f bildet I in sich selbst ab;

(2) f ist auf I kontrahierend.

(b) Wieviele Fixpunktiterationen sind höchstens notwendig, wenn der Fixpunkt aus (a) mit gerundeter Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-3}$ berechnet werden soll? $x_0 = 0$

Fixpunktsatz:

$f(x) = x$ auf I

Falls: (1) f auf I stetig

(2) $f(I) \subset I$ (f bildet I auf sich selbst ab);

(3) $\exists L < 1$:

$\forall x, y \in I$:

$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$

(f Kontraktion auf I);

dann:

(1) $\exists!\, x^* \in I$ mit

$$f(x^*) = x^*$$

(2) Die Iteration

$$x_k = f(x_{k-1})$$

konvergiert gegen x^* für beliebige Startwerte $x_0 \in I$.

(3) $$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

a-priori - Fehlerabschätzung.

Zurück zur Aufgabe:

$f(x) = \frac{1}{2} e^{x/3}$;

$I = [0, 1]$

(1) $f(x)$ stetig auf I, weil $f(x)$ die Hintereinanderausführung der stetigen Funktionen auf I ist;

Superposition der stetigen Funktionen

(2) $f(x) = \frac{1}{2} e^{x/3}$ ist

monoton steigend auf I

$\Downarrow$

$\min_I f$ und $\max_I f$

werden an den

Intervallrandpunkten erreicht:

$f(0) = \frac{1}{2} e^{\frac{0}{3}} = \frac{1}{2}$

$f(1) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{3}} = 0{,}698$

Immer aufrunden

An der unteren Grenze immer aufrunden.

$\Rightarrow f([0,1]) \subset [0,5;\ 0,7] \subset$

$\subset [0,1]$

$\longrightarrow$ selbstabbildend.

(3) Kontraktionseigenschaft:

Falls $f(x)$ auf differenzierbar:

$$L = \max_{x \in I} |f'(x)|$$

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{x/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{x/3} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{6} e^{x/3};$$

$f'(x)$ ist auf $[0,1]$ monoton wachsend

$\Downarrow$

$\max |f'(x)|$ wird am Rand von Intervall erreicht:

$$|f'(0)| = \frac{1}{6}$$

$$|f'(1)| = \frac{1}{6} e^{\frac{1}{3}} \leq 0{,}24$$

$$\Rightarrow \max_I |f'(x)| \leq \frac{1}{4} < 1$$

Setze wir $L = \frac{1}{4}$.

$\Downarrow$

Fixpunktsatz gilt.

$\Downarrow$

$\exists! \, x^* \in I$ mit

$f(x^*) = x^*$;

(2) $\varepsilon = 10^{-3}$; $x_0 = 0$

$$|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \le \varepsilon$$

$$L = \frac{1}{4};$$

$$x_0 = 0$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - 1/4} |x_1 - 0| =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3/4} |f(0) - 0| =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{4}{3} \cdot \left| \frac{1}{2} e^{0/3} - 0 \right| =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \overset{!}{\leq} 10^{-3}$$

$$4^n \geq \frac{2}{3} \cdot 10^3 ;$$

$$\log_4(4^n) \geq \log_4\left(\frac{2}{3} \cdot 10^3\right)$$

$$n \geq \log_4\left(\frac{2}{3} \cdot 10^3\right) = \frac{\ln\left(\frac{2}{3} \cdot 10^3\right)}{\ln(4)} = 4{,}98\ldots$$

$\Rightarrow$ Man braucht 5 Iterationen

Bisektionsverfahren

$f(x)$ ist auf $I=[a,b]$ stetig und streng monoton;

$$f(a)\cdot f(b)\leq 0$$

