Lineare Gleichungssysteme

Exakte Lösungsmethoden

Bsp.:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrixform eines LGSs

$$A \bar{x} = \bar{b}$$

$\bar{b}$ ← bekannt, "rechte Seite", "störvektor", "Inhomogenität"

$\bar{x}$ ↑ gesuchter Vektor der Unbekannten

A ← Koeffizientenmatrix

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^{n}$$

$$\bar{b} \in \mathbb{R}^{m}$$

m – Anzahl der Gleichungen
= Anzahl der Zeilen der Matrix A

n - Anzahl der Unbekannten
= Anzahl der Spalten von A

2 Arten von LGS:

* homogenes LGS

$\bar{b} = \bar{0}$

$A\bar{x} = \bar{0}$

* inhomogenes LGS

$\bar{b} \neq \bar{0}$

$A\bar{x} = \bar{b} \neq \bar{0}$

Homogene LGS

Zwei Fälle:

* 1 Lösung
* mehrere Lösungen
(∞ - viele Lösungen)

$\bar{0}$ ist immer eine Lösung;

$\bar{x} = \bar{0}$ nennt man die triviale Lösung.

Satz: el. lineares homogenes GS

$$A\bar{x} = \bar{0}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

ist gesamt dann eindeutig lösbar, wenn

$rg(A) = \min\{m; n\}$,

d.h. wenn A den vollen Rang hat.

Bsp:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rang(A) - ?$

$\rightarrow$ GA:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$z_3 \curvearrowleft z_3 - z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Dreiecksform

$\Downarrow$

$\operatorname{Rang} A = 3$

$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\Downarrow$

voller Rang

$\Downarrow$

$A\bar{x} = \bar{0}$ hat eine eindeutige Lösung $\bar{x} = \bar{0}$ (die triviale Lösung)

(b)

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 - z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{Rang} B = 2 < 3$

$B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\Rightarrow \infty$ - viele Lösungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2 = -x_3$

$\Rightarrow x_1 = -x_2 = x_3$

Mit $x_3 = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x_2 = -\mu$

$x_1 = \mu$

Lösungsraum:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ -\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mu, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Inhomogenes GS

$A\bar{x} = \bar{b}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$

3 Fälle:

- keine Lösung
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen

$(A \mid \bar{b})$ erweiterte (System-) Matrix

Bsp:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Rang A - ?

Rang (A|b) - ?

GA auf $(A|b)$:

nur Zeilenoperationen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 - z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$\text{Rang } A = 3$

$\text{Rang } (A|b) = 3$

A hat volle Rang!

Lösung:

$x_3 = 1$

$x_2 = 0$

$x_1 = -1$

Keine weitere Lösung!

Satz: Sei $A\bar{x} = \bar{b}$ (*)

ein inhomogenes LGS mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$.

Dann gilt:

(1) $\text{Rang}(A) < \text{Rang}(A \mid \bar{b})$

$\Rightarrow$ (*) hat keine Lösung

(2) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A \mid \bar{b}) = \min\{m, n\}$

(voller Rang)

$\Rightarrow$ (*) ist eindeutig lösbar

(3) $\text{Rang}\, A = \text{Rang}(A \mid \bar{b}) < \min\{m, n\}$

(Rang ist nicht voll)

$\Rightarrow \infty$-viele Lösungen.

Bsp: Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das GS

$$\begin{cases} a x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + a x_3 = 1 \end{cases}$$

(1) genau eine Lösung?

(2) keine Lösung?

(3) ∞-viele Lösungen?

Lösung:

LGS $\longrightarrow$ Matrixform:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A\bar{x} = \bar{b}$

inhomogen!

$$(A\,|\,\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Rang A - ?

Rang $(A\,|\,\bar{b})$ - ?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} q & 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & 1 & 0 \\ 1 & 1 & q & 1 \end{array}\right)$$

$z_1 \Longleftrightarrow z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & q & 1 & 0 \\ q & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & q & 1 \end{array}\right)$$

$z_2 \longleftarrow z_2 - q \cdot z_1$

$z_3 \longleftarrow z_3 - z_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & q & 1 & 0 \\ 0 & (1-q^2) & (1-q) & 1 \\ 0 & (1-q) & (q-1) & 1 \end{array}\right)$$

$(1-q^2) = (1-q)(1+q)$

$z_2 \Longleftrightarrow z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & q & 1 & 0 \\ 0 & (1-q) & (q-1) & 1 \\ 0 & (1-q^2) & (1-q) & 1 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 - (a+1) z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & (1-a) & (a-1) & 1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & -a \end{array}\right)$$

$$(1-a) - (a-1)(a+1) =$$

$$= 1 - a - a^2 + 1 =$$

$$= (1-a)(1 + a + 1) =$$

$$= (1-a)(a+2)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & (1-a) & (a-1) & 1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & -a \end{array}\right)$$

"Verdächtig":

$a_1 = 1$

$a_2 = -2$

$a_3 = 0$

Sonst:

$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}(A|\vec{b}) = 3$

$\Rightarrow$ voller Rang $\Rightarrow$ eindeutig Lösbar

(1) $a_1 = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\text{Rang}\,(A\,|\,\vec{b}) = 2$

$\text{Rang}\,(A) = 1$

$2 \neq 1$

$\Rightarrow$ keine Lösung

(2) $a_2 = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & +2 \end{array}\right)$$

$\text{Rang}\,(A\,|\,\vec{b}) = 3$

$\text{Rang}\,(A) = 2$

$2 \neq 3$

$\Rightarrow$ keine Lösung

(3) $a_3 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Rang } A = 3$

$\text{Rang}(A|\vec{b}) = 3$

voller Rang

$\Rightarrow$ eine eindeutige Lösung.

Satz: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(1) $\det A = 0$

$\Downarrow$

Rang(A) ist nicht voll

(2) Ist $\det(A) \neq 0$

$\Uparrow$

Rang (A) ist voll

Satz: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$ (d.h. A regulär), so ist das LGS

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

für alle $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

8.6.16

Lösungsmethode zur Lösung eines LGS $A\bar{x} = \bar{b}$.

(1) Sei A regulär, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\det A \neq 0$ (und $\operatorname{Rang} A = n$).

Eine reguläre Matrix A hat immer eine Inverse A^{-1}.

Idee:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\left(A^{-1} \cdot A\right)\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

$$E\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

$$E\bar{x} = \bar{x} \qquad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b}$$

A^{-1} können wir berechnen mit Hilfe von (z.B.) GA

Pros: Vorteile:

① Für verschiedene "rechte Seiten" $\bar{b}$ muß die Inverse A^{-1} nur einmal berechnet werden.

(2) $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ ist die vollständige Lösung von dem LGS.

Nachteile: Cons:

(1) A muß regulär, also quadratisch und von vollem Rang sein (det $A \neq 0$)

(2) Berechnung von A^{-1} oft aufwendig.

(3) Manchmal wird nicht die vollständige Lösung, sondern nur einige einzelne Komponenten von Bedeutung.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A\bar{x} = \bar{b}$, $\bar{x}$ - ?

① $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ – quadratisch

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Entw.} \\ \text{1. Spalte} \\ = \end{matrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 1 - 0 = 1 \neq 0$$

$\Downarrow$

A regulär, also invertierbar.

② $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$z_3 \leftarrow z_3 - z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$z_1 \leftarrow z_1 - z_3 \cdot 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$z_1 \leftarrow z_1 - z_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$E_3 \Longrightarrow A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

$\Rightarrow$ Wirklich eine Inverse zu A.

(13) $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow \bar{x} = A^{-1}\bar{b}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 - 2\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 - 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ bzw. } \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

② GA mit nur Zeilen-Operationen

$A\bar{x} = \bar{b}$

Kurze Schreibweise

$(A|\bar{b})$

GA mit Zeilen-Ops wird auf $(A|\bar{b})$ angewendet!

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Dreiecksform von A in $(A|\vec{b})$:

$$z_3 \leftarrow z_3 - z_1$$
$$z_4 \leftarrow z_4 - z_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$z_2 \leftrightarrow z_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$z_3 \leftarrow z_3 + 2 \cdot z_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$z_4 \leftarrow z_4 + z_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Obere Dreiecksmatrix

$\text{Rang } A = \text{Rang } (A|\vec{b}) = 4$

voller Rang

⇓

eindeutige Lösbarkeit

Z.4 Bedeutet als Gleichung:

$$3x_4 = -2$$

bzw. $\Rightarrow x_4 = -\frac{2}{3}$

Z.3:

$$-4x_3 - 2x_4 = -2$$

$$x_3 = \frac{-2 + 2x_4}{-4} =$$

$$= \frac{-2 + 2\left(-\frac{2}{3}\right)}{-4} = \frac{5}{6}$$

2 Zeile:

$$x_2 - x_3 - x_4 = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = -1 + x_3 + x_4 =$$

schon berechnet!

$$= -1 + \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{6}$$

1. Zeile:

$$x_1 + x_2 \cdot 2 + 3 \cdot x_3 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 =$$

$$= 1 - 2\left(-\frac{5}{6}\right) - 3\left(\frac{5}{6}\right) =$$

$$= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \overline{x} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -5/6 \\ 5/6 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

(1) Die Matrix muss weder quadratisch sein noch vollen Rang haben!

$\Rightarrow$ GA ist IMMER anwendbar!

② GA muss für verschiedene $\vec{b}$-Vektoren auf neu durchgeführt werden.

③ Die Lösg wird vollständig berechnet!

③ GA und $A^{-1}\vec{b}$

↓

vollständige Lösg

Gibt es eine exakte Methode, die uns erlaubt einzelne Unbekannte Werte zu berechnen, ohne die komplette Lösg zu bestimmen?

Ja, die Cramer'sche Regel.

Nur für reguläre Matrizen (quadr. mit vollem Rang) $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Zu Lösen: $A\bar{x} = \bar{b}$,

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{x}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$,

$\det A \neq 0$.

Satz (Cramer'sche Regel):

Um x_k $(k = 1, \ldots, n)$ zu bestimmen, muss man folgendes berechnen:

$$x_k = \frac{D_k}{\det A}, \quad \det A \neq 0, \text{ weil } A \text{ regulär}$$

wobei D_k die Determinante der Matrix ist, die entsteht, wenn man

in der Matrix A die k-te Spalte durch den Vektor $\bar{b}$ ersetzt.

$$\left(A\bar{x} = \bar{b} \right)$$

Bsp: $A\bar{x} = \bar{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$x_3 - ?$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{b}} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$- 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 =$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{1} = 1$$

Bsp. 2)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$= A$, $= \bar{b}$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$x_2 - ?$

$$x_2 = \frac{D_2}{\det A} ;$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Entwicke. nach 3. Zeile

$$= 1\,(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+0+1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2&0\\0&0&5\\1&3&-1\end{vmatrix}+$$

$+0$ (=)

$$\begin{vmatrix}2&3&0\\0&4&5\\3&2&-1\end{vmatrix} = -1\cdot2\cdot4+3\cdot5\cdot3+$$

$$+0\cdot0\cdot2-3\cdot4\cdot0-$$

$$-2\cdot5\cdot2-(-1)\cdot0\cdot3$$

$$= -8+45-20 = 17;$$

$$\begin{vmatrix}1&2&0\\0&0&5\\1&3&-1\end{vmatrix} \cdot 5\,(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix} =$$

$$= -5$$

(=) $17 - 5 = \boxed{12 = \det A}$

$$D_2 = \begin{vmatrix}1&1&3&0\\0&0&4&5\\1&1&1&0\\1&0&2&-1\end{vmatrix} =$$

$-b$ ↗ ↑ Entwicklungsspalte

$$= 1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\Big[0 + 0 + 5 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 1 - 0 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)\Big] - \Big[-4 + 15 + 0 - 0 - 10 - 0\Big] =$$

$$= -8 - 1 = -10$$

$$x_2 = \frac{D_2}{\det A} = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Exakte Methode

$A\vec{x} = \vec{b}$

(1) Gauß → A-Matrix

Lösung von wenden wie oben

A – regulär:

(2) $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$

(3) Cramersche Regel

$$x_{ii} = \frac{D_{ii}}{\det A}$$

Alle drei Methoden berechnen die exakte Lösung. Oft wird die Näherung ausreichen → approximative Lösung;

vor allem, wenn Rechenaufwand drastisch reduziert wird, z.B. wenn die approximative Verfahren leichter zu implementieren ist.

Ethisch diese approx. Methoden sind die

Klassische iterative Verfahren.

Gegeben seien:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\bar{b} \in \mathbb{R}^n$$

Gesucht $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$A\bar{x} = \bar{b}.$$

Wir werden die Matrix A "vernünftig" zerlegen:

$$A = S - T,$$

wobei S eine leicht invertierbare Matrix ist

(z.B. Diagonalmatrix, Dreiecksmatrix)

Daraus lassen sich

das GS

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

umformen:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$(S - T)\bar{x} = \bar{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$S\bar{x} - T\bar{x} = \bar{b}$$

$$S\bar{x} = T\bar{x} + \bar{b}$$

S ist leicht zu invertieren!

Mit einem Startvektor $\bar{x}^{(0)}$ bekommt man:

$$S\bar{x}^{(k+1)} = T\bar{x}^{(k)} + \bar{b},$$

$$k = 0, 1, \ldots\ldots$$

Weil S leicht zu invertieren ist der Inverse S^{-1} ist:

$$\underbrace{S^{-1}S}_{=E}\bar{x}^{(k+1)} = S^{-1}\left(T\bar{x}^{(k)} + \bar{b}\right)$$

$$x^{(k+1)} = S^{-1}\left(T\bar{x}^{(k)} + \bar{b}\right),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

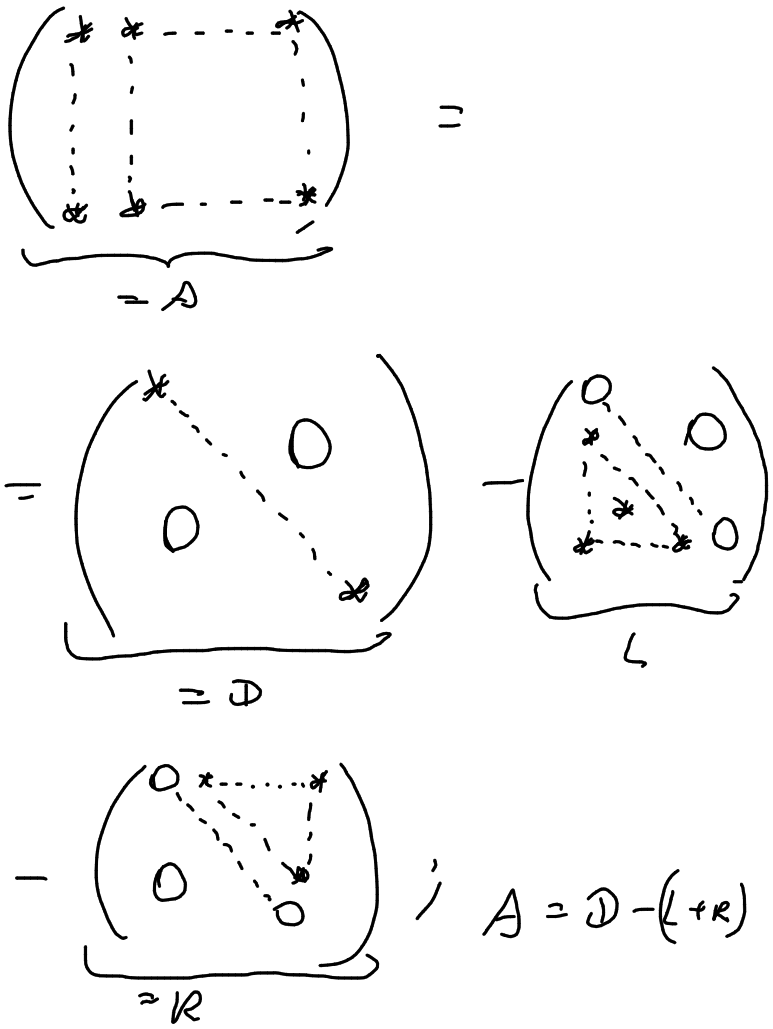
mit dem gegebenen / gewählten Startvektor $\bar{x}^{(0)}$.

Wir zerlegen die Matrix A wie folgt:

$$A = D - L - R =$$

$$= D - (L + R),$$

wobei D die Diagonale von A ist, L eine echte untere Dreiecksmatrix (mit nur 0 auf der Diagonale) und R eine echte obere Dreiecksmatrix ist.



Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}}_{= D} -$$

$$- \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -10 & 0 & 0 \\ -13 & -14 & -16 & 0 \end{pmatrix}}_{= L} -$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren)

$$S = D$$

$$T = L + R$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1}\left((L+R)\vec{x}^{(k)} + \vec{b}\right)$$

Oder, in der Komponentenform:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} + b_i\right)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T = (L+R) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A = S - T).$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = S^{-1}\left(T\,\bar{x}^{(k)} + \bar{b}\right)$$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\bar{x}^{(k)} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$$

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x_2^{(k)} \\ x_1^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^{(k)} + 3 \\ x_1^{(k)} + 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \left(x_2^{(k)} + 3 \right) \\ 1/2 \left(x_1^{(k)} + 4 \right) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_2^{(k)} + 3 \\ x_1^{(k)} + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0	0
1	1,5	2
2	2,5	2,75
3	2,875	3,25
4	3,125	3,438
5	3,219	3,563
6	3,281	3,610
7	3,305	3,641
8	3,320	3,652
9	3,326	3,660
10	3,330	3,663
11	3,332	3,665
12	3,333	3,666
13	3,333	3,666

Exakte Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$z_2 \leftarrow z_2 + \frac{1}{2} z_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3/2 & 11/2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{11}{3} = 3{,}6667$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(3 + x_2) \quad (=)$$

$$(2x_1 - x_2 = 3)$$

$$(=) \quad \frac{1}{2}\left(3 + \frac{11}{3}\right) = \frac{20}{3 \cdot 2} =$$

$$= \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} = 3{,}\overline{3}$$