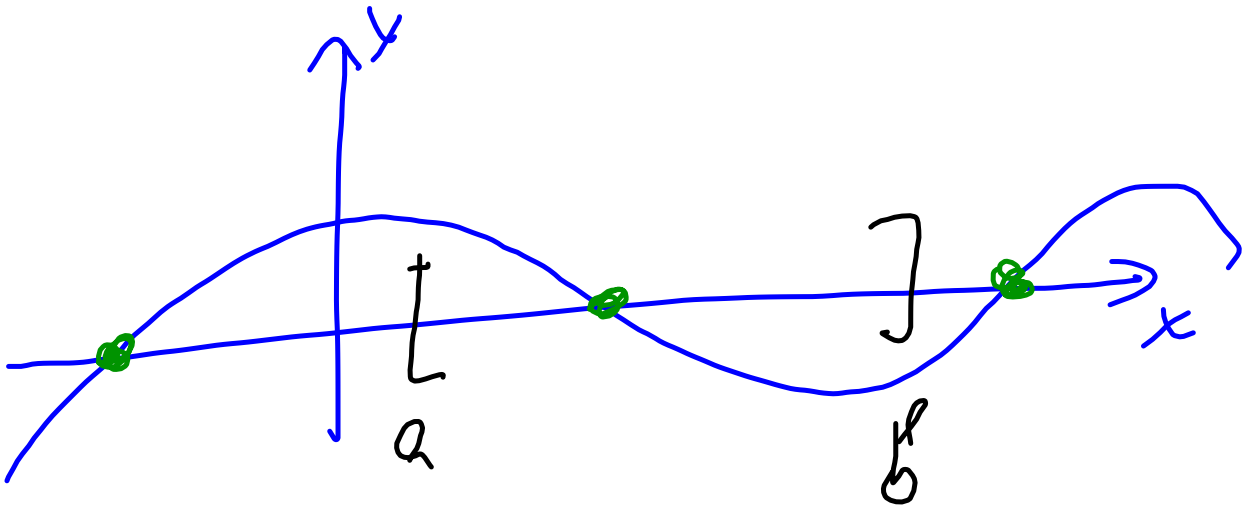
Nichtlineare Gleichungen

Nullstellensuche

$f(x)$ sei eine Funktion. Gesucht werden die Nullstellen von $f(x)$ auf $[a, b]$, d.h. die Lösungen der Gl.:

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b]$$



Bisektionsverfahren

Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ stetig und monoton.

Gelte

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

(verschiedene Vorzeichen an den Rändern des Intervalls).

Dann hat $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ genau eine Nullstelle.

Bem: Sei $f(x)$ auf $[a,b]$ stetig, $f(a) \cdot f(b) < 0$, aber nicht monoton.

Dann hat $f(x)$ in $[a,b]$ mindestens eine NS.

$\Longrightarrow$ Bisektionsverfahren

(1) Wir halbieren das Intervall:

$x_0 = a$

$x_1 = b$

$x_{1/2} = \frac{a+b}{2}$

(2) $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ wird berechnet

Ist $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow$ Aufgabe gelöst

(3) $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$

$\Downarrow$

NS liegt im $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$,

sonst liegt die NS im $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$.

Man wiederhole die Schritte 1-3 auf dem so gewählten Halbintervall.

Geschwindigkeit / Genauigkeit:

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{|b-a|}{2^k}$$

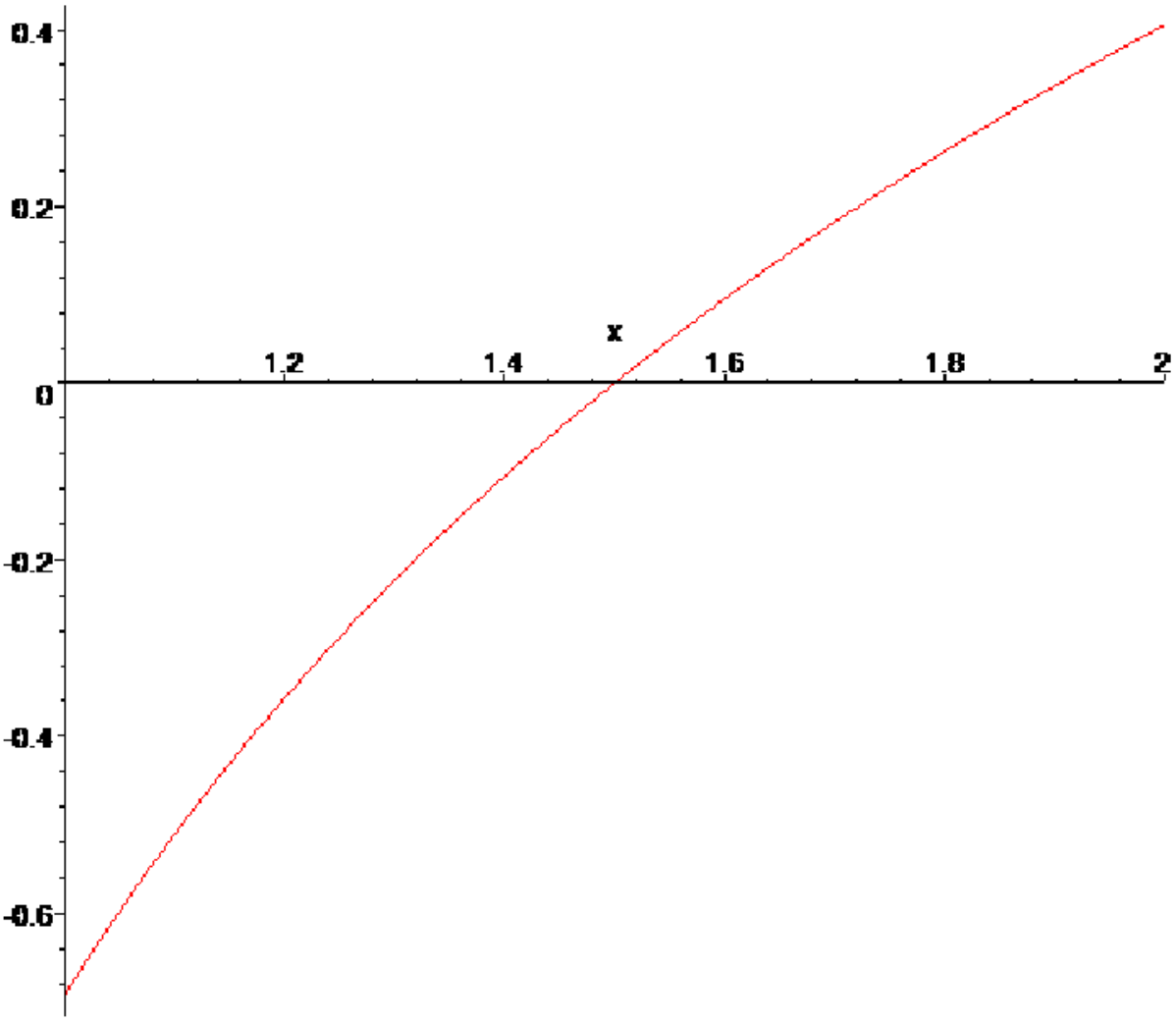
ist der größte mögliche Fehler nach k Schritten.

Bsp:

$$f(x) = \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$(x = 1{,}5)$

$$x \in [1{,}2\ ;\ 2]$$



$$D\left(\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)=$$

$$=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$$

$$[1{,}2;2]\subset D$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist auf $[1{,}2;2]$ stetig und streng monoton wachsend.

$$\ln\left(1{,}2 - \frac{1}{2}\right) \approx -0{,}3566$$

$$\ln\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}405$$

$$f(1{,}2) \cdot f(2) < 0$$

$$f\left(\frac{1{,}2+2}{2}\right) = f(1{,}6) =$$

$$= \ln(1{,}6 - 0{,}5) = \ln(1{,}1) =$$

$$= 0{,}853 > 0$$



$f(a) < 0 \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0 \quad f(b) > 0$

$\Rightarrow$ NS in $[1,2 ; 1,6]$

$$f\left(\frac{1,2+1,6}{2}\right) = f(1,4) =$$

$$= \ln(1,4 - 0,5) = \ln(0,9)$$

$$< 0$$

x	$1,2$		$1,4$		$1,6$
$f(x)$	< 0		< 0		> 0

$\Rightarrow$ NS in $[1,4 ; 1,6]$

$$f\left(\frac{1,4+1,6}{2}\right) = f(1,5) =$$

$$= \ln(1,5-0,5) = \ln(1)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow f(1,5) = 0 \text{ ist}$$

die gesuchte Nullstelle.

es gibt keine weitere

NSe im Intervall $[1,2;2]$

Glück gehabt! Die Nullstelle

muß NICHT notwendigerweise

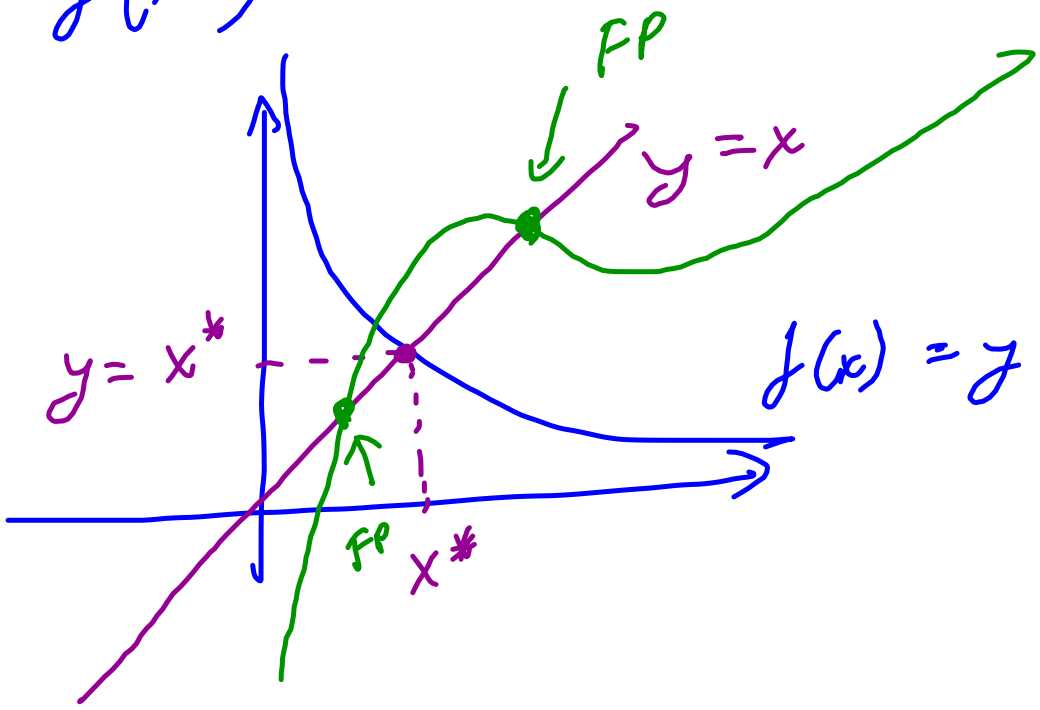
erreicht werden!

Fixpunktsuche

Was ist Fixpunkt?

Ein Punkt x^* heißt Fixpunkt von $f(x)$, wenn

$$f(x^*) = x^*$$



Fixpunktgleichung für $f(x)$:

$$f(x) = x$$

ist mit

$$f(x) = f(x) - x$$

äquivalent zur Nullstellengleichung für $f(x)$:

$$g(x) = 0.$$

Def: Man sagt, dass $f(x)$ eine Kontraktion, bzw. kontrahierende Funktion, ist, falls es eine (reelle) Konstante L mit $0 < L < 1$ existiert, so dass

$\forall x \in [a,b] \quad \forall y \in [a,b]:$

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad (1)$$

Die Bedingung / Ungleichung (1) heißt "Lipschitz-Bedingung";

L heißt (unabhängig von dem Wert) "Lipschitz-Konstante".

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$ (Also $f'(x)$ existiert $\forall x \in [a,b]$ und stetig auf $[a,b]$), dann gilt nun den Mittelwertsatz:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$$

für ein ξ zwischen x und y; $\forall\, x, y \in [a,b]$

$x \neq y$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} =$$

$$= |f'(\xi)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \leq$$

$$\leq L$$

$$\Rightarrow L = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

$\max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$

wird zur Bestimmung von L wird IMMER Aufgerundet!

Satz (Fixpunktsatz von Banach):

Ist $\varphi(x)$ auf $[a,b]$:

(i) stetig

(ii) φ b.Tdet $[a,b]$ in sich selbst ab:

$$\varphi([a,b]) \subseteq [a,b]$$

(iii) φ ist auf $[a,b]$ eine Kontraktion mit der Lipschitz-Konstante L

$$(0 < L < 1)$$

Denn gilt:

(1) (Banach): es exist. genau ein Fixpunkt

$x^* \in [a,b]$:

$x^* = \varphi(x^*)$

(2) Die Zahlenfolge

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$

konvergiert gegen x^*

für beliebige Wahl

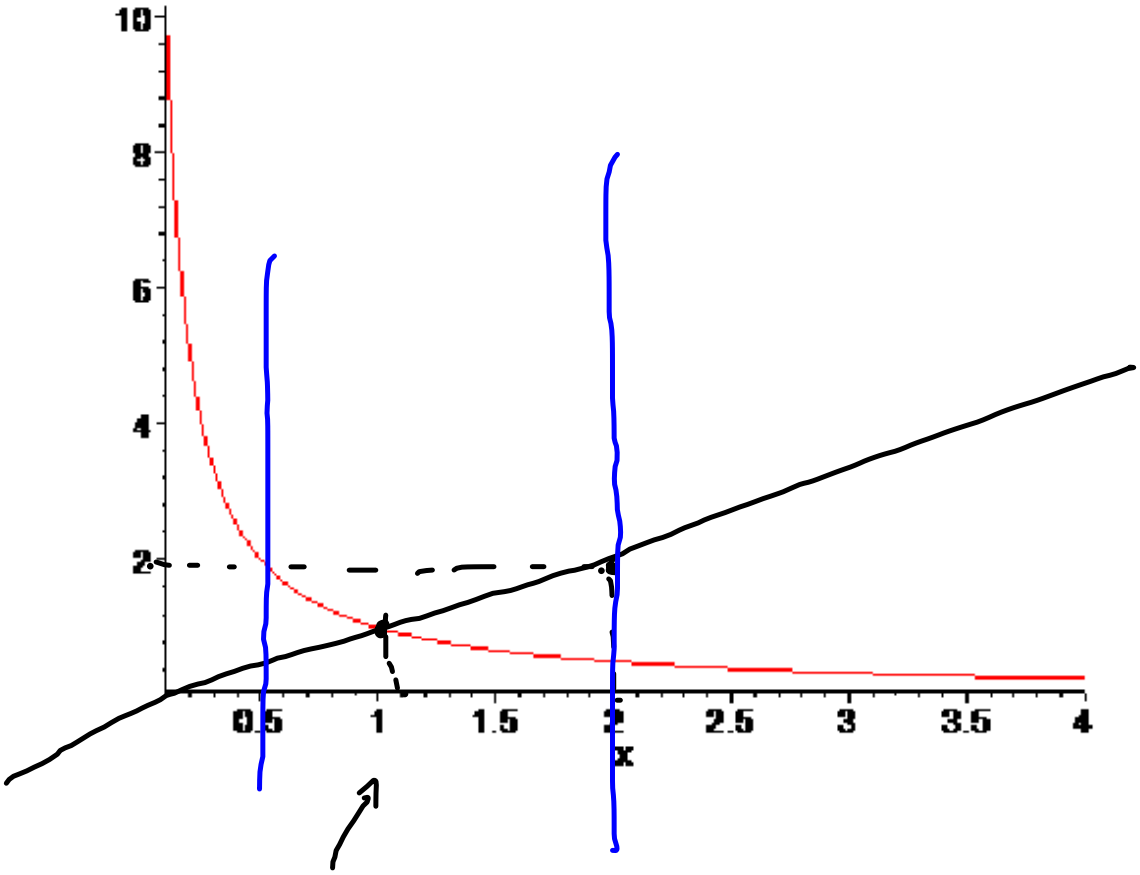
des Startwerts $x_0 \in [a,b]$

(3) Es gilt:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

mit der Lipschitz-Konstante L $(0 < L < 1)$.

Bsp.: $\varphi(x) = \frac{1}{x}$



Fixpunkt.

Exakte Lösg: $\frac{1}{x} = x$

$x^2 = 1$; $x^* = 1 \in [\frac{1}{2}, 2]$

$[a,b] = [\frac{1}{2}; 2]$

Voraussetz.!

(1) $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ auf $[\frac{1}{2}, 2]$ stetig;

(2) "$\varphi(x)$ bildet auf $[\frac{1}{2}, 2]$ ab" Selbstabbildg"

bedeutet, dass das Wertebereich von $\varphi(x)$ auf $[\frac{1}{2}, 2]$:

$$\left[\min_{x \in [\frac{1}{2}, 2]} \varphi(x) ; \max_{x \in [\frac{1}{2}, 2]} \varphi(x) \right]$$

$$\cap$$

$$[\tfrac{1}{2}, 2]$$

im $[\frac{1}{2}, 2]$ liegt:

$\varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist

auf $[\frac{1}{2}, 2]$ streng

monoton fallend;

$\Downarrow$

$\min\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$;

$x \in [\frac{1}{2}, 2]$

$\max\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/2} = 2$;

$x \in [\frac{1}{2}, 2]$

$\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subseteq \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

Also selbstabbildend!

(...) ist $\varphi(x)$ kontraktiv?

$\varphi(x)$ ist auf $[\frac{1}{2}, 2]$

diff'bar:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' =$$

$$= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$\varphi'(x)$ ist auf $[\frac{1}{2}, 2]$

streng monoton wachsend

und negativ

$\Rightarrow |\varphi'(x)|$ ist (positiv) streng monoton fallend auf $[\frac{1}{2}, 2]$

$\Rightarrow \max_{x \in [\frac{1}{2}, 2]} |\varphi'(x)| =$

$= |\varphi'(\frac{1}{2})| = \frac{1}{(1/2)^2} =$

$= 4 > 1$

$\Rightarrow$ $\varphi(x)$ ist nicht kontrahiert!

$\Rightarrow$ Fixpunktiteration aus dem Satz konvergiert

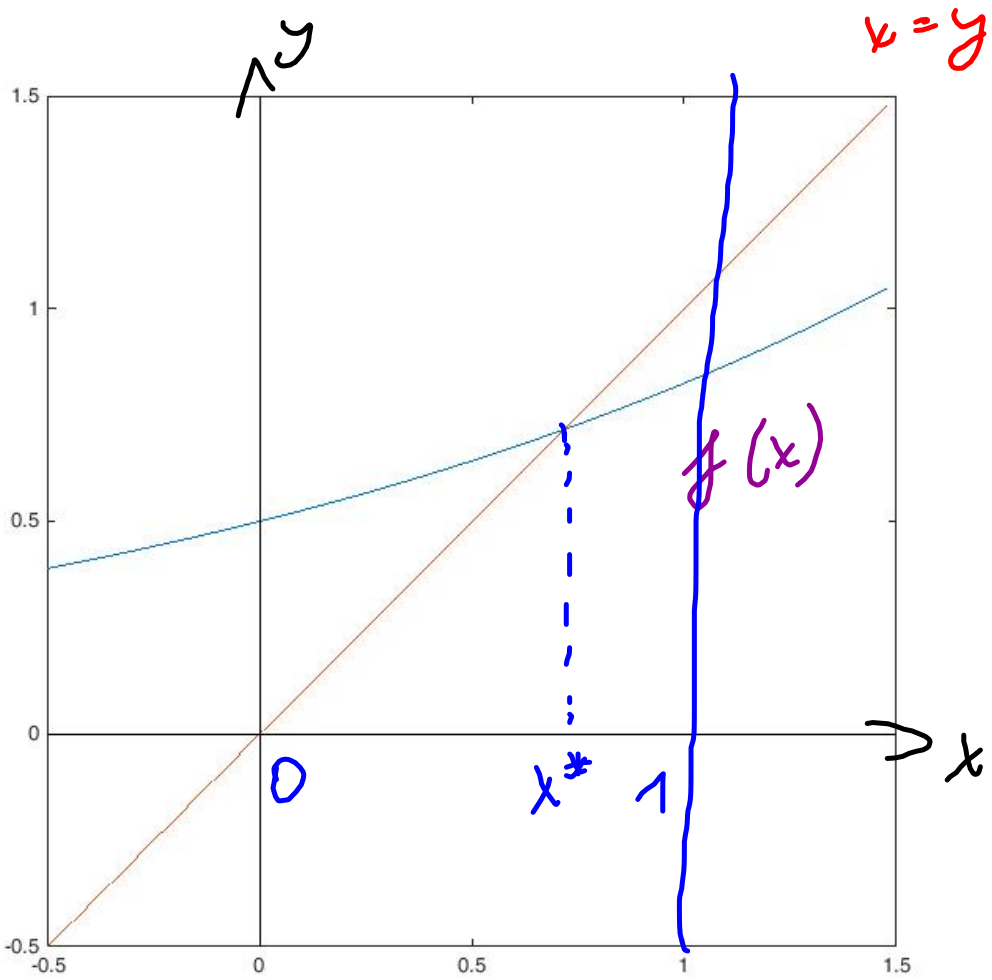
Wird obwohl es

ein Fixpunkt im Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ gibt!

Bsp 2 : x/2

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$I = [0, 1]$$



(i) $f(x)$ stetig auf $[0;1]$;

(ii) $f(x)$ auf $[0,1]$:

ist streng monoton wachsend:

$$f(0) = \frac{1}{2} e^{0} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} = 0,825$$

(Aufrunden!)

$$\Rightarrow W(f) = \left[\frac{1}{2}, 0,825\right] \subset [0,1]$$

$\Rightarrow$ Selbstabbildung;

(...) $f(x)$ ist diff'bar:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}x}$$

ist streng monoton wachsend und positiv

$$\Rightarrow \max |f'(x)| =$$

$$= \max_{x \in [0,1]} f'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2} \cdot 1} =$$

$$\approx 0{,}42 \quad \text{(Aufrunden!)}$$

$0{,}42 < 1$

$\Downarrow$

$L = 0{,}42$ z.B.

(Man hätte auch $L = 0{,}5$ wählen können, oder bel. Zahl größer 0.42, aber kleiner 1 !)

$\Longrightarrow f(x)$ kontrahiert

$\Rightarrow$ Fixpunktsatz (Banach)

Frage: Wieviele Iterationsschritte, ausgehend von $x_0 = 0$, höchstens nötig, um den Fixpunkt mit der Genauigkeit $\varepsilon = 10^{-3}$ zu approximieren?

$$|x^* - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

$x_0 = 0$

$x_1 = f(x_0) = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}$

$L = 0{,}42$

$\tilde{L} = \frac{1}{2} > L = 0{,}42$

$\tilde{L} < 1$

$$\frac{\tilde{L}^n}{1-\tilde{L}} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon = 10^{-3}$$

Die kleinste Zahl n, für die die Ungleichung erfüllt ist, wird gesucht.

$$\frac{(0,5)^n}{1-0,5}\left|\frac{1}{2}-0\right| \leq 10^{-3}$$

$$(0,5)^n \leq 10^{-3}$$

$$\ln\left((0,5)^n\right) \geq \ln\left(10^{-3}\right)$$

$$n \cdot \ln(0,5) \geq \ln\left(10^{-3}\right)$$

$$n \geq \frac{\ln 10^{-3}}{\ln 0,5} = 9,968$$

Also! nach Ersucht höchstes 10 Iterationen!

Newton – Tangenten – Methode: $f(x) = 0$

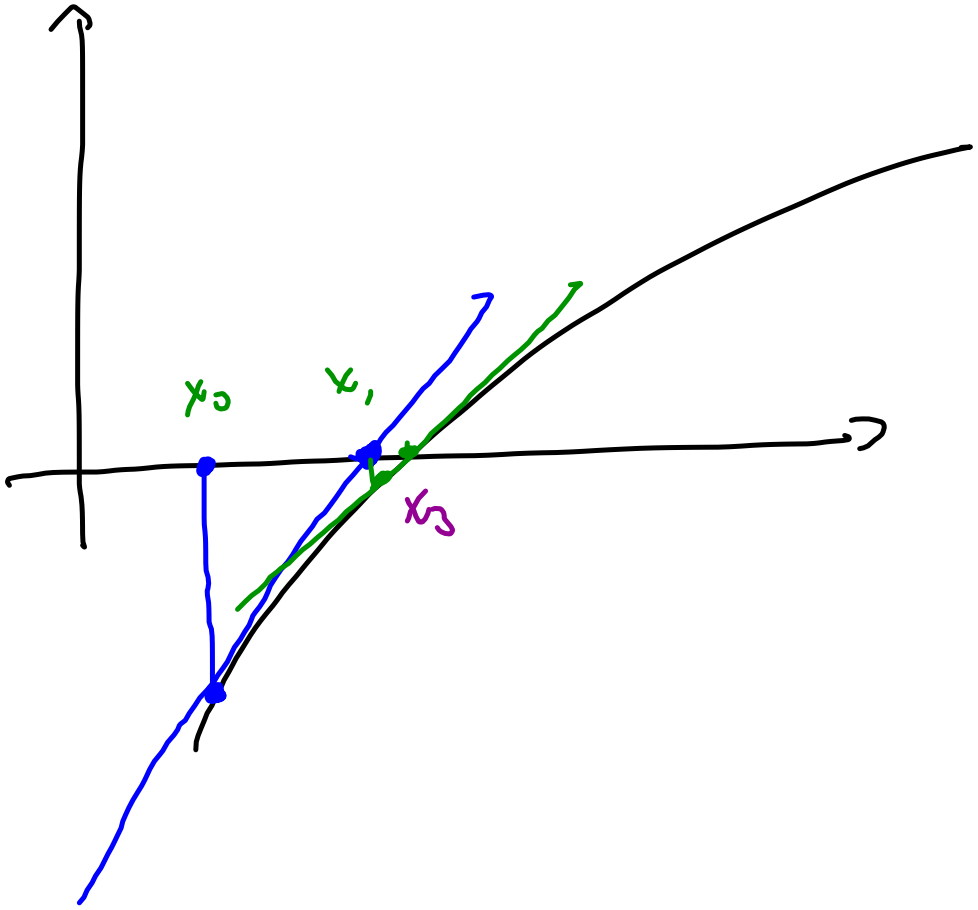
$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei

differenzierbar ($\forall x \in [a,b] \; \exists f'(x)$).

in x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Tangente $y(x)$ in $(x_0, f(x_0))$



x_0 - Startwert;

Vorschr:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Einschränkung: $f'(x_n) \neq 0 \; \forall n$

Als Fixpunktgl.:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\varphi(x_n) = x_{n+1};$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$|\varphi'(x)| = \left| 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right|$$

$$= \left| \frac{(f'(x))^2 - (f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right|$$

$$< 1$$

(Notw. für Konvergenz von FP-Verfahren)

$$0 < \left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

mit $f'(x) \neq 0$

ist die notwendige Konvergenzbedingung