Mathematiques appliquées
DFHI WS 09/10
Dipl.-Math. Dm. Ovrutskiy

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Betrachten Sie die reguläre Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ *mit*

$$a_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ b_i & i = j-1 \\ c_{i-1} & i = j+1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

mit Zahlen $d_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, ..., n\}$ *und* $b_i, c_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, ..., n-1\}$. *Leiten Sie für diese Klasse von Matrizen ein Verfahren her, das mit höhstens* $O(4n)$ *wesentlichen Operationen (Multiplikationen bzw. Divisionen) das lineare Gleichungssystem* $Ax = b$ *löst.*

Hinweis: *Überlegen Sie sich zunächst, warum in der unteren Dreiecksmatrix* L *nur die Hauptdiagonale bzw. die untere Nebendiagonale besetzt ist. Ähnliches gilt für die Matrix* R *der LR-Zerlegung* $A = LR$.

Aufgabe 2

Bei grewissen Problemstellungen ist es nötig, Integrale der Form

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$$

auszuwerten. Zeigen Sie, daß man beie diesen Integralen noch ohne numerische Verfahren auskommt, indem Sie zuerst die Rekursionsformel

$$I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

beweisen. Betrachten Sie allgemein die Rekursionsformel $a_{n+1} = 1 - (n+1)a_n$ *und untersuchen Sie die Folge* $\{a_n\}$ *auf Konvergenz. Was ergibt sich aus der Untersuchung für die Anhängigkeit des Grenzverhaltens vom Startwert* a_0*?*

Aufgabe 3

Eine Abbildung $||\cdot|| : \mathbb{K}^{m\times m} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C})$ *wird* ***Matrixnorm*** *genannt, wenn sie die üblichen Normeigenschaften besitzt:*

$$i)||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0,\ \ ii)||\alpha A|| = |\alpha|\ ||A||,\ \ iii)||A+B|| \le ||A|| + ||B||.$$

a) *Weisen sie nach, daß folgende Abbildungen tatsächlich Matrixnormen sind:*

   1) *Die* ***Zeilen-*** *bzw.* ***Spaltensummennorm***

   $$||A||_r := \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\ ,\quad ||A||_c := \max_{1\le i\le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

   2) *Die* ***Schurnorm*** *$(A \in \mathbb{K}^{n\times n})$*

   $$||A||_S := \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

   3) *Die* ***Gesamtnorm***

   $$||A||_G := \max_{i,j} |a_{ij}|$$

   4) *und die (wohldefinierte?)* ***Spektralnorm***

   $$||A||_\sigma := \max\{\sqrt{\lambda}\ :\ \lambda \textit{ ist Eigenwert von } A^*A\}$$

   $(A^* = \bar{A}^T)$

b) *Eine Matrixnorm heißt* ***submultiplikativ****, wenn für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ stets gilt:*

   $$||AB|| \le ||A||\ ||B||.$$

   Überprüfen Sie die oben angegebenen Matrixnormen auf diese Eigenschaft.

c) *Sei $||\cdot||_V$ eine Vektornorm auf $\mathbb{K}^n$. Die der Vektornorm $||\cdot||_V$* ***zugeordnete Matrixnorm*** *ist definiert durch*

   $$||A|| := \max_{x\ne 0} \frac{||Ax||_V}{||x||_v}.$$

   Zeigen Sie, daß hierdurch wirklich eine Matrixnorm definiert ist und daß die Spektralnorm der euklidischen Vektornorm zugeordnet ist. Ist die zugeordnete Norm stets submultiplikativ? Bestimmen Sie die zugeordneten Normane zu den Vektornormen

   $$||x||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \textit{und} \quad ||x||_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$