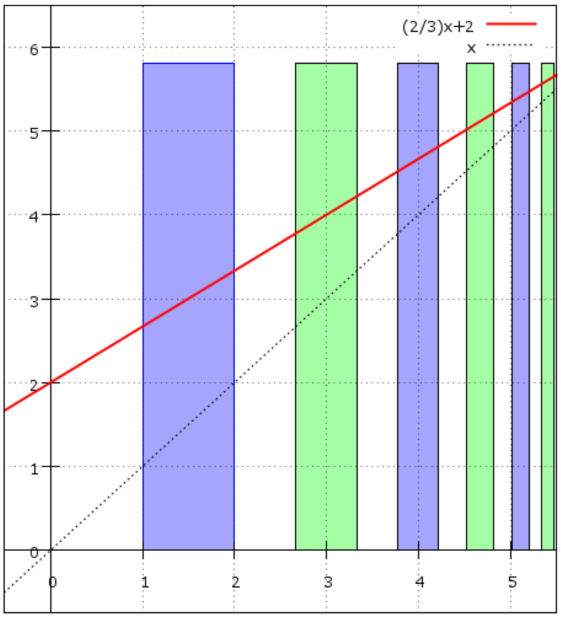
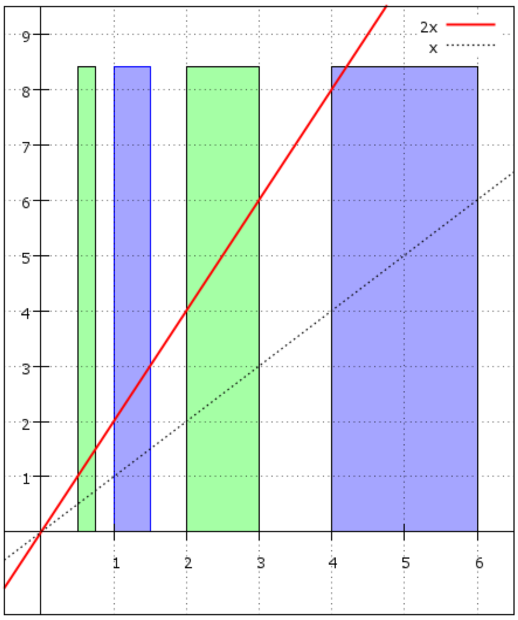
Mathematik 3 - Übung 4



Beispiel für eine kontrahierende Funktion:
$f(x) = 2/3\ x + 2$



Beispiel für eine **nicht** kontrahierende Funktion:
$g(x) = 2\ x$

Die Funktion f ist kontrahierend, denn: für zwei **beliebige** Punkte der Funktion f gilt **immer**: Die Steigung der Gerade durch zwei Punkte der Funktion liegt zwischen]-1 ; 1[(offenes Intervall!). In diesem Fall ist die Steigung nämlich immer 2/3. Punkte im Bereich [1;2] werden abgebildet auf Punkte im Bereich [2,67 ; 3,33]. Punkte aus diesem Bereich werden abgebildet auf Punkte im Bereich [3,78 ; 4,22], usw. Die Bereiche werden immer kleiner, weshalb diese Eigenschaft den Namen „kontrahierend“ (zusammenziehend) hat. Bei der Funktion g dagegen werden die Bereiche immer größer. Daher hat g **nicht** die Kontraktionseigenschaft.

Um herauszufinden, in welchem Bereich z.B. die Funktion $h(x) = x^2$ kontrahierend ist, kann man die erste Ableitung $h'(x) = 2x$ bilden. In allen zusammenhängenden Bereichen, in denen $h'(x)$ für jeweils alle x im Bereich]-1 ; 1[liegt, hat h die Kontraktionseigenschaft. Dies gilt zum Beispiel für alle x in]-0,5 ; 0,5[. Die Funktion $h:[0 ; 0{,}4] \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$ hat also die Kontraktionseigenschaft.

Obige Funktion f ist (u.A.) im Bereich [0 ; 20] kontrahierend. Egal, wo man in einem solchen kontrahierenden Bereich anfängt: wenn man jeweils das Ergebnis f(x) der Funktion als neues x benutzt, nähert man sich immer stärker einem bestimmten Wert, nämlich dem Wert x = f(x). Dies entspricht, wie sich aus obiger Abbildung erahnen lässt, dem Wert x=6, also dem Schnittpunkt der Funktion f(x) und der Identitätsfunktion i(x) = x. Bei der Funktion g dagegen entfernt man sich immer weiter vom Fixpunkt 0, wenn man einen Startwert ungleich 0 wählt.

Graph zu Aufgabe 1

Die Umkehrfunktion ist die Funktion, die entlang der 1. Winkelhalbierenden gespiegelt wurde. Funktion und die Umkehrfunktion treffen sich also an der 1. Winkelhalbierenden.

Im Gegensatz zu tan(x) ist arctan(x) im Bereich [4;5] kontrahierend.