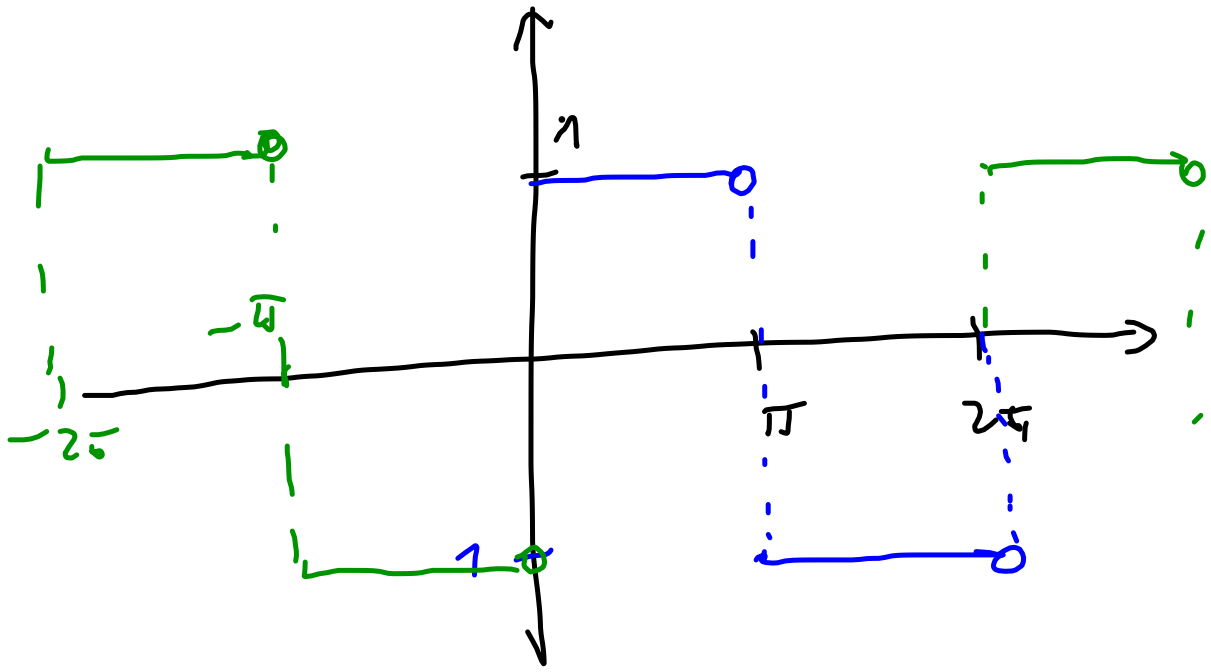
28. 11. 2013

Bsp:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi \\ -1, & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi k) = f(t), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Periode $T = 2\pi$



① $D_1, D_2 - ?$

D_1: Endliche Anzahl der Teilintervalle eines Periodenintervalls, in denen die Funktion stetig und monoton ist

$I = [0, 2\pi]$

Auf I ist $f(x)$

stetig auf

$I_1 = [0, \pi)$ konstant, also monoton (sogar streng monoton)

$I_2 = [\pi, 2\pi)$

Auf I_2 ist $f(x) = -1$

$\Rightarrow$ konstant $\Rightarrow$ monoton

Damit ist D1 erfüllt

D2: An den Unstetigkeitsstellen (laut D1 haben wir davon nur endlich viele) existieren sowohl rechts- als auch linksseitige GWe

⇓

Keine Polstelle!

Unstetigkeitsstelle: $0, \pi, 2\pi$

$\lim_{t \to 0-} f(t) = -1 < \infty$

$\lim_{t \to 0+} f(t) = 1 < \infty$

In $t=0$ ist ① 2 erfüllt.

$t=\pi$:

$\lim_{t \to \pi-} f(t) = 1 < \infty$

$\lim_{t \to \pi+} f(t) = -1 < \infty$

① 2: ✓

$t=2\pi$:

$\lim_{t \to 2\pi-} f(t) = -1 < \infty$ ① 2: ✓

$\lim_{t \to 2\pi+} f(t) = +1 < \infty$

Also: Fourier-Reihe existiert.

⇓

Man kann Fourier-Koeff. berechnen: $a_0/2$, a_n, b_n

Vermutung: $\frac{a_0}{2} = 0$

$T = 2\pi$

Offset:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-1)\,dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(t\Big|_0^{\pi} - t\Big|_{\pi}^{2\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\pi - 0 - 2\pi + \pi \right) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$T = 2\pi$; $(T) = [0, 2\pi)$

$\omega_0 = 1 = \frac{2\pi}{T}$ $[0, 2\pi]$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(n \cdot 1 \cdot t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cdot \cos(nt)\, dt + \right.$$

$$+\int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cos(nt)\,dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[+\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{-\sin(nt)}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{+0}{n} + \frac{-0}{n} + \frac{-0}{n} + \frac{0}{n}\right) =$$

$$= 0.$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(n\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(nt)\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\underbrace{\frac{\cos(nt)}{n}}_{t=0}^{\pi} + \underbrace{\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]}_{\pi}^{2\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left(-\cos(n\pi) + \cos 0 + \cos(2\pi n) - \cos(\pi n) \right)$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left[-2\cos(\pi n) + 1 + 1 \right] =$$

$$= \frac{-2}{\pi n} \left((-1)^n + 1 \right)$$

$$= \frac{-2}{\pi n}\left[\cos(\pi n) - 1\right] = \frac{-2}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$\cos(\pi n) = (-1)^n$$

$\frac{a_0}{2} = 0$ offset

$a_n = 0 \quad \forall n$ cos - Anteile

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\left[1 - (-1)^n\right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi n}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

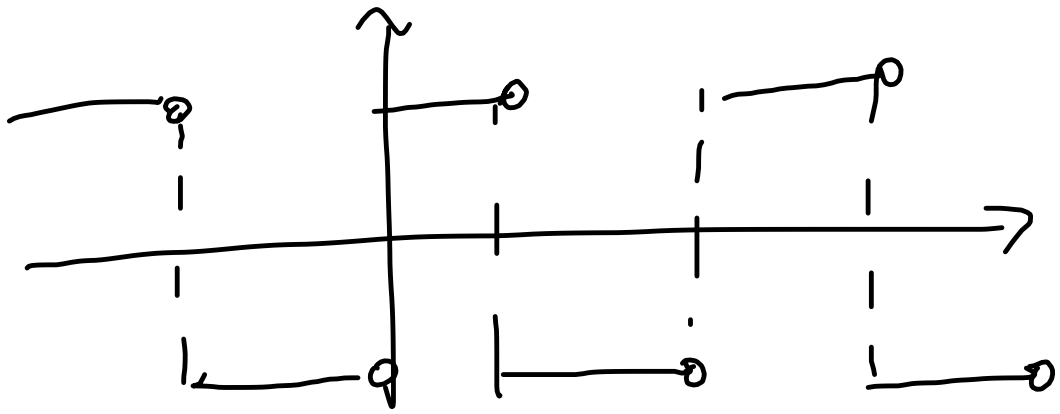
$$f(t) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[0 \cdot \cos(kt) + \right.$$

$$\left. + (-1)^{k+1} \frac{2}{\pi k} \sin(kt) \right] =$$

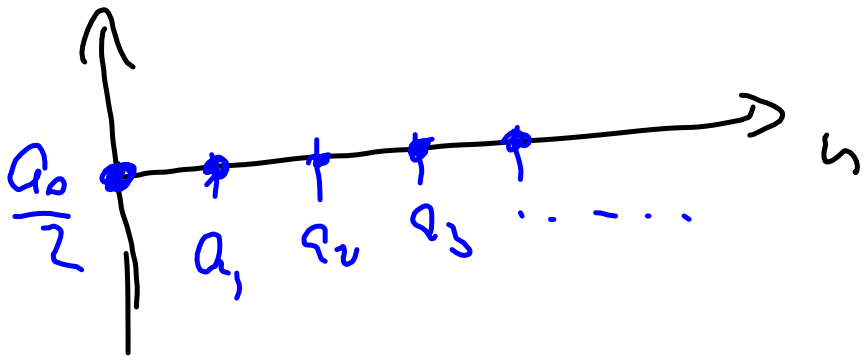
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin(kt).$$

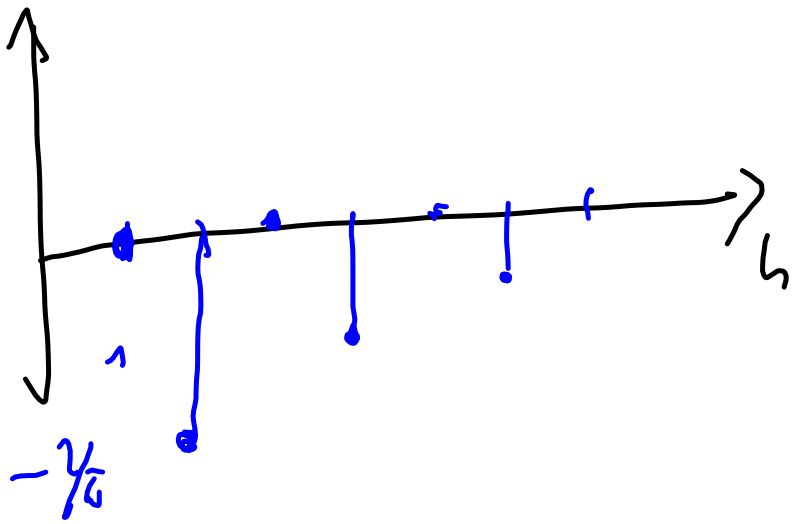
Darstellungsmöglichkeiten:

1) Zeitbereichsdarstellung:



2) Spektrumdarstellung im Frequenzbereich:





Satz (Eigenschaften des Spektrums):

Vor.: $f(t)$ periodisch und der Periode T und D1, D2 sind erfüllt.

Dann gilt:

Ist $g(t) = \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

- achsensymmetrisch

$\Rightarrow \quad b_n = 0 \quad \forall\, n \geq 1$

(kein sin-Anteil in der FR)

- punktsymm. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall\, n \geq 1$

(kein cos-Anteil in der FR)

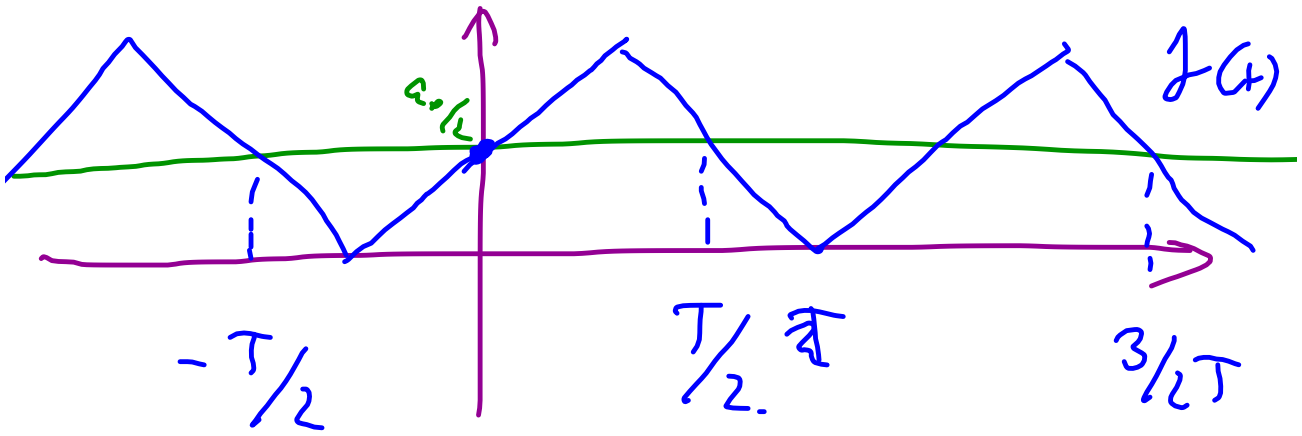
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(n\omega_0 t)\, dt$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)\, dt$$

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} f(t) \underbrace{\sin(0 \cdot \omega_0 t)}_{\sin 0 = 0}\, dt = \frac{2}{T} \int_{(T)} 0\, dt = 0$$



$$f(t) \rightsquigarrow \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) = g(t)$$

Ist $g(t)$ achsensym.

$\Updownarrow$

$b_n(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

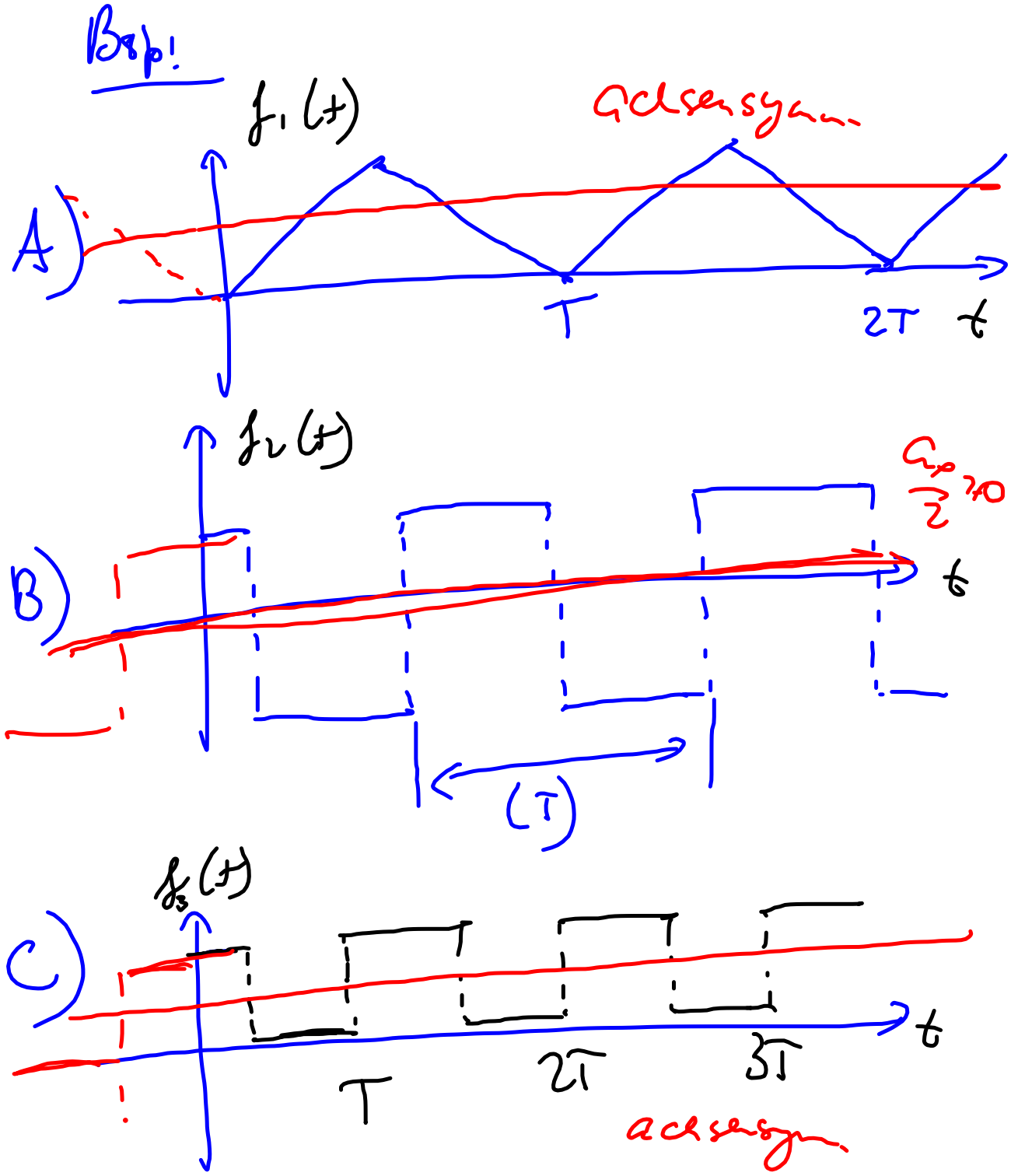
$$g(-t) - \frac{a_0}{2} = g(t) - \frac{a_0}{2}$$

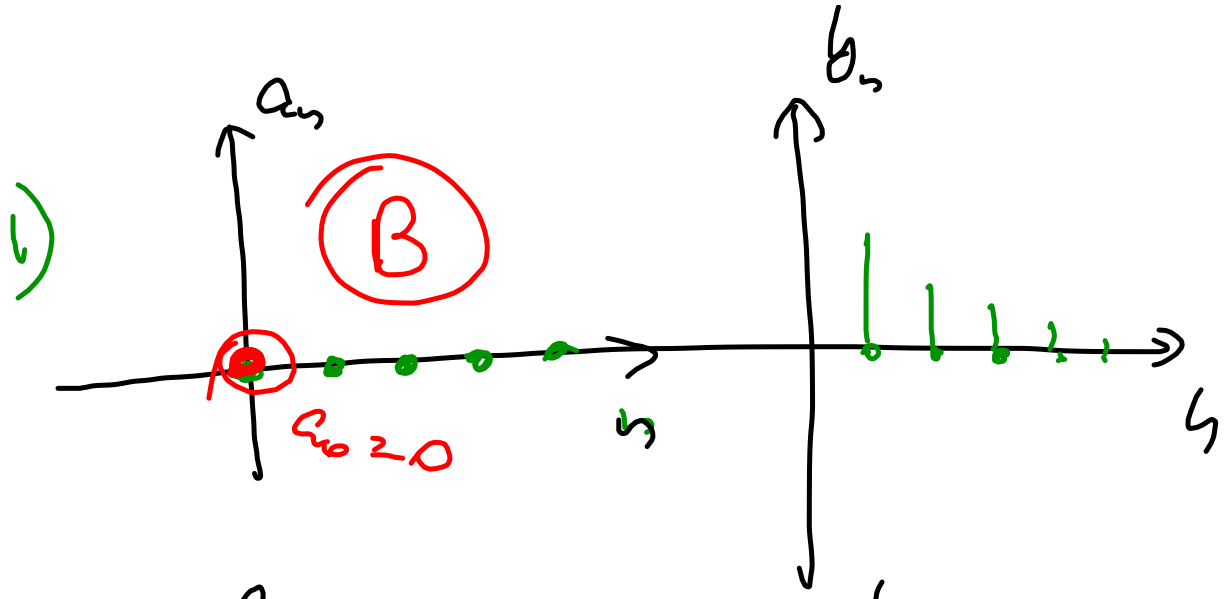
Ist $g(t)$ punktsym

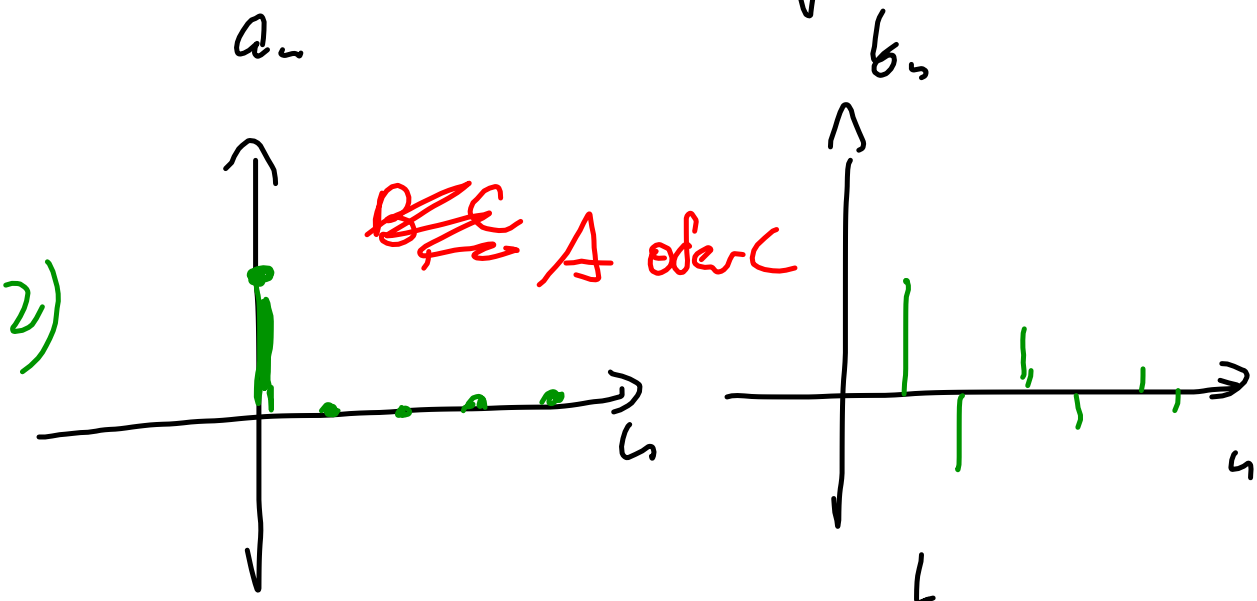
$\Updownarrow$

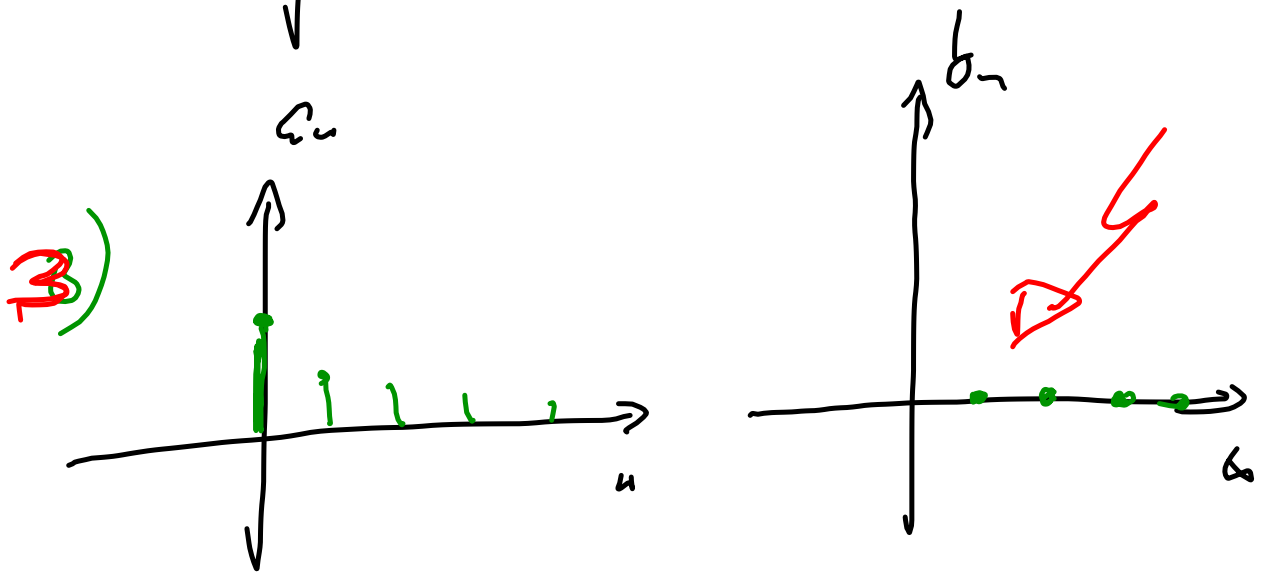
$a_n(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

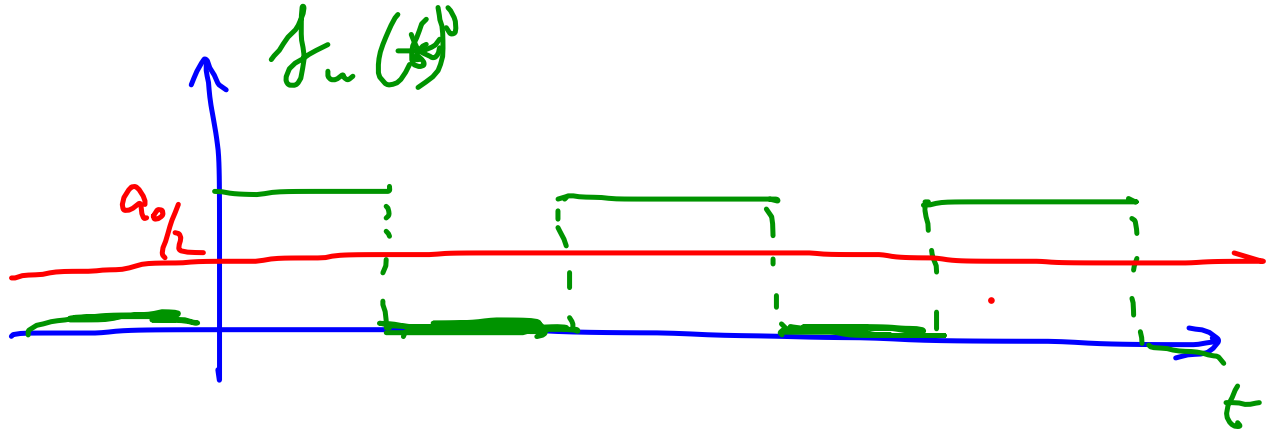
$$\left(g(+t) - \frac{a_0}{2}\right) = -\left(g(-t) - \frac{a_0}{2}\right)$$

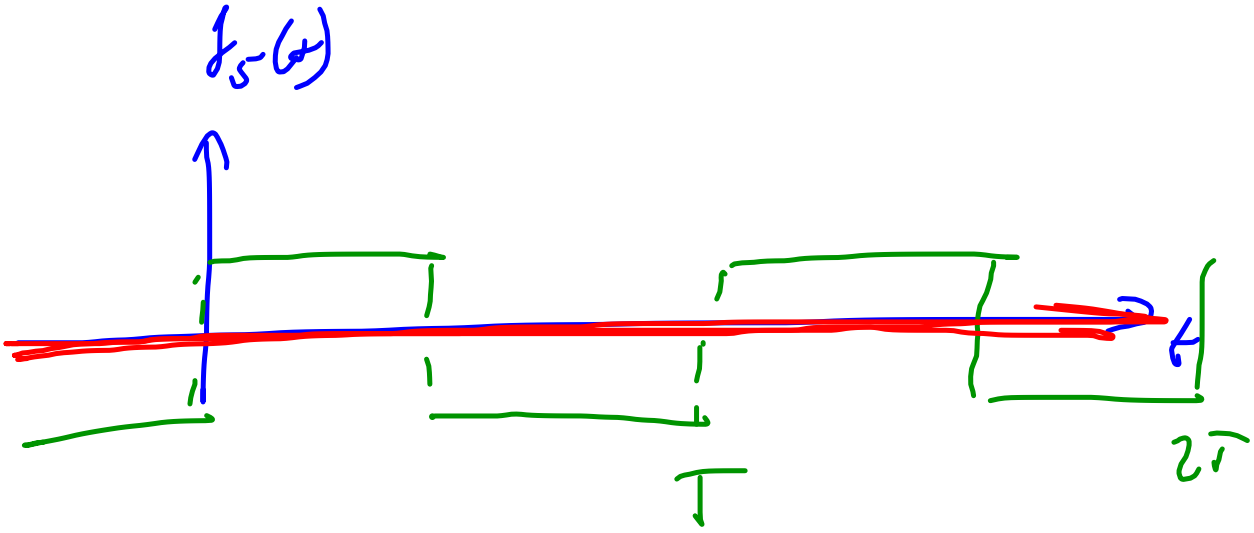

Bsp!
$f_1(t)$
aksensyan
A)
T
2T
t
$f_2(t)$
$a_p \geq 0$
B)
t
(T)
$f_3(t)$
C)
T
2T
3T
t
aksesyan

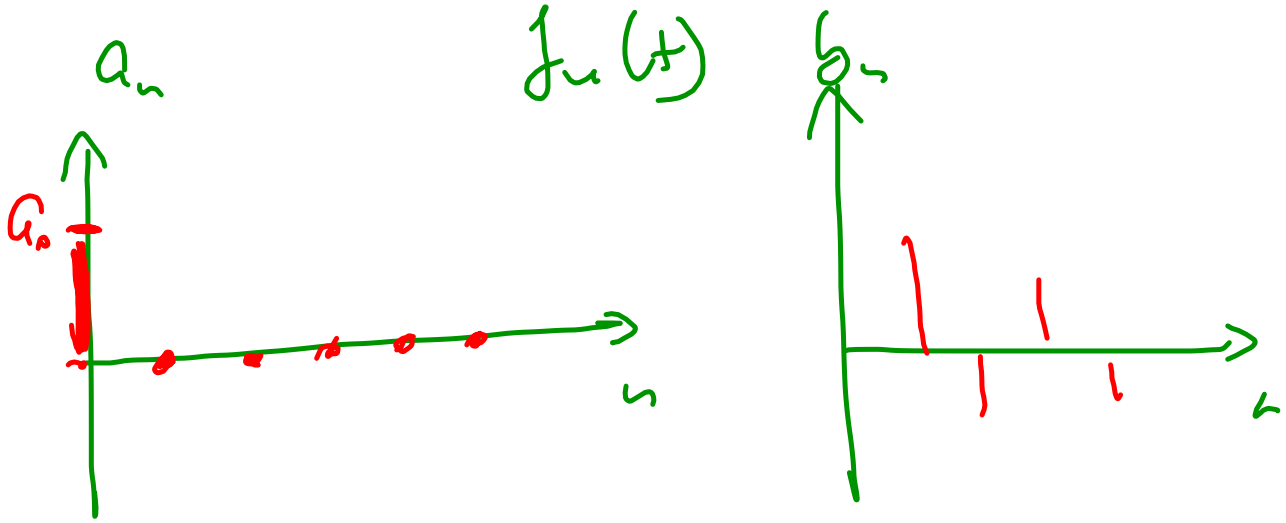

1)
B
$a_0 \geq 0$

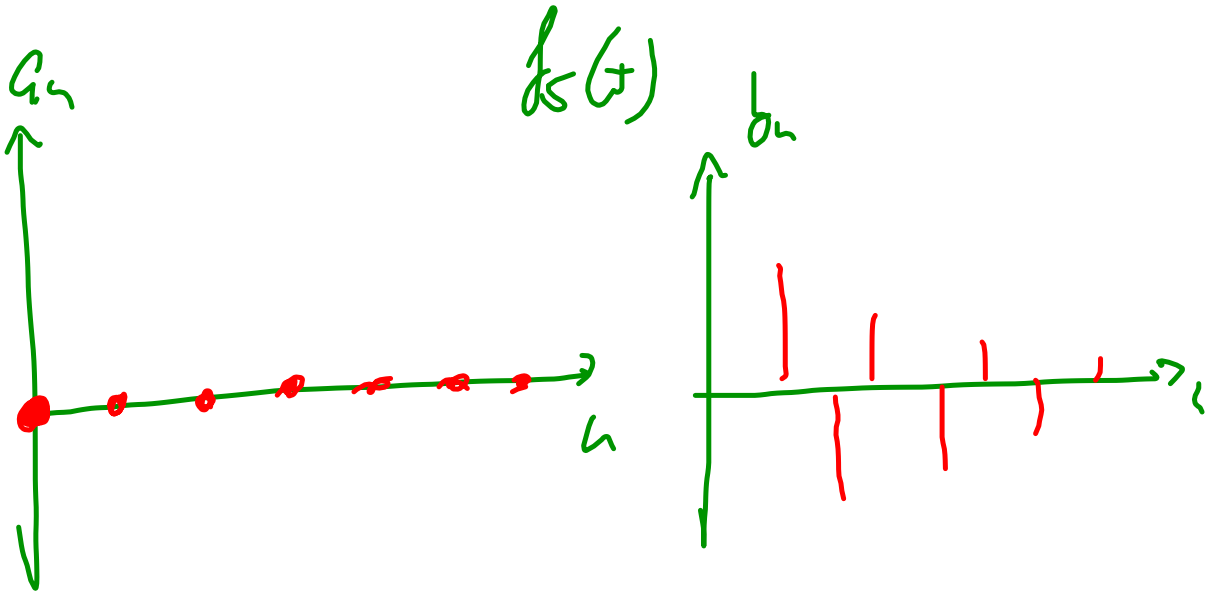

2)
A oder C


3)


$a_0/2$
t


T
2T


a_n
$f_n(t)$
b_n
G_0
n
t


a_n
$f_s(t)$
b_n
n
t

2.3. Komplexe Fourier-Reihe

D1, D2

Reelle FR:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

Gleichfrequente Schwingungen

Euler - Formel

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{j\alpha}}{2j}$$

Bew!

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$

$$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) \overset{(TF)}{=}$$

$$= |z|\, e^{j\varphi} \quad (EF)$$

$\Rightarrow$

$$\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi} \quad (1)$$

$$\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi) = e^{-j\varphi}$$

↓ achsensym. ↓ punktsym.

$$\cos\varphi - j\sin\varphi = e^{-j\varphi} \quad (2)$$

(1)+(2):

$$2\cdot\cos\varphi = e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

(1) − (2) (4A)

$$\hookrightarrow \sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \quad (3)$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1\cdot(-j)}{j\,(-j)} = -j$$

$$(3) \quad -\frac{j}{2}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) = \sin\varphi$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1\,(0-j)}{(0+j)(0-j)}$$

$$j\cdot(-j) = -jj = -j^2 =$$

$$= -(-1) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{j} = -j$$

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

$$\sin(n\omega_0 t) = -\frac{j}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

Euler-Formeln für

$$\varphi = n\omega_0 t$$

Φ_1, Φ_2, $f(t)$ ist T-periodisch

$\Downarrow$

PR

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2} \left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right) + b_n \frac{-j}{2} \left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} \right) \right] =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{j b_n}{2} \right) + e^{-jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{j b_n}{2} \right) \right]$$

$\in \mathbb{R}$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{1}{2} (a_n - j b_n) + e^{-jn\omega_0 t} \cdot \frac{1}{2} (a_n + j b_n) \right]$$

$a_n \in \mathbb{R}$ $\quad b_n \in \mathbb{R}$

$a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \forall n$

Bezeichnungen:

$$\frac{a_0}{2} =: c_0$$

$$c_0 = c_0 \cdot e^{0 \cdot \omega_0 t \cdot j} = c_0 \cdot \underbrace{e^{\quad}}_{=1 \ \forall t}$$

$$\frac{a_n - j\,b_n}{2} =: c_n$$

$$\frac{a_n + j\,b_n}{2} =: c_n^* =: c_{-n}$$

$$\Rightarrow f(t) =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n e^{jn\omega_0 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \right] =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} e^{-jn\omega_0 t} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

abs. konv. Reihen

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t} +$$

$$+ C_0 e^{j0\omega_0 t} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = f(t)$$

Satz (Komplexe Darstellung der FR):

Sei $f(t)$ periodisch mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ und $f(t)$ erfülle D1, D2.

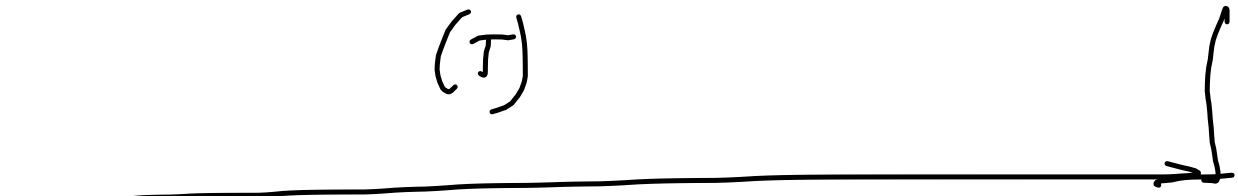
Dann läßt sich $f(t)$ in eine FR entwickeln.

Diese hat folgende komplexe (C) Gestalt:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \, e^{jn\omega_0 t},$$

wobei

$$C_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$



Beweis: Reihe s. Obe

Für c_n!

$n = 0$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) \cdot 1\,dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) \cdot e^{0}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)\, e^{-j \cdot 0 \cdot \omega_0 t}\, dt$$

$$\underline{n \geq 1}$$

$$C_n = \frac{a_n - j b_n}{2} =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt -$$

$$- j \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) \sin(n\omega_0 t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t) \left[\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t) \right] dt$$

$$e^{-jn\omega_0 t} //$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$\underline{n \leq -1}: \quad C_{-n} = C_n^* = \frac{1}{T} \int_{(T)} e^{+jn\omega_0 t} \cdot f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)\, e^{-j(-n)\omega_0 t}\, dt$$

$\mathbb{R}$

q. e. d.

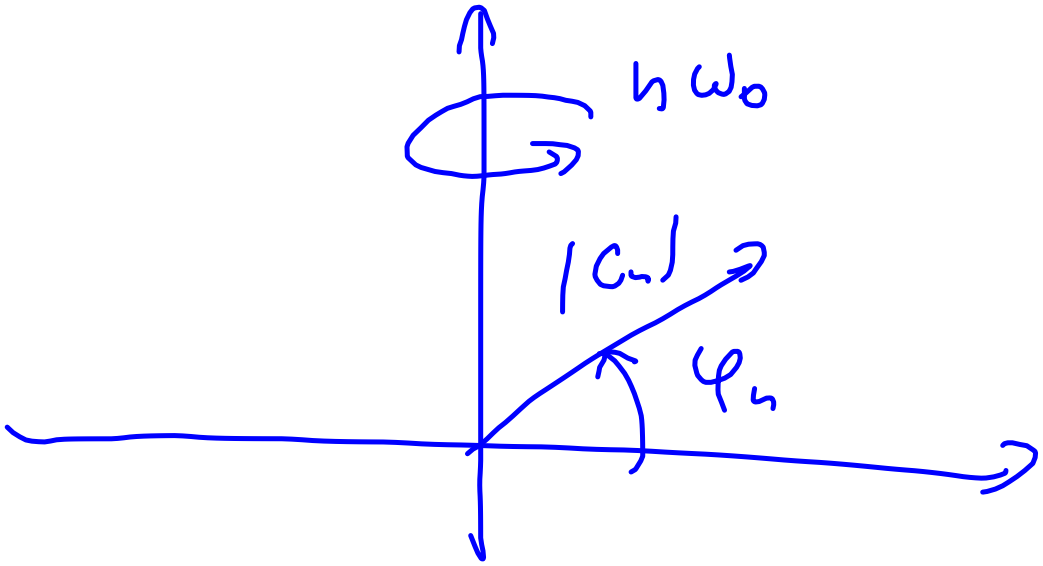
FR:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

komplexe Schwingung mit Freq. $(n\omega_0)$ und komplexe Amplitude c_n

$$c_n e^{jn\omega_0 t} =$$

$$= |c_n| e^{j\varphi_n} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$



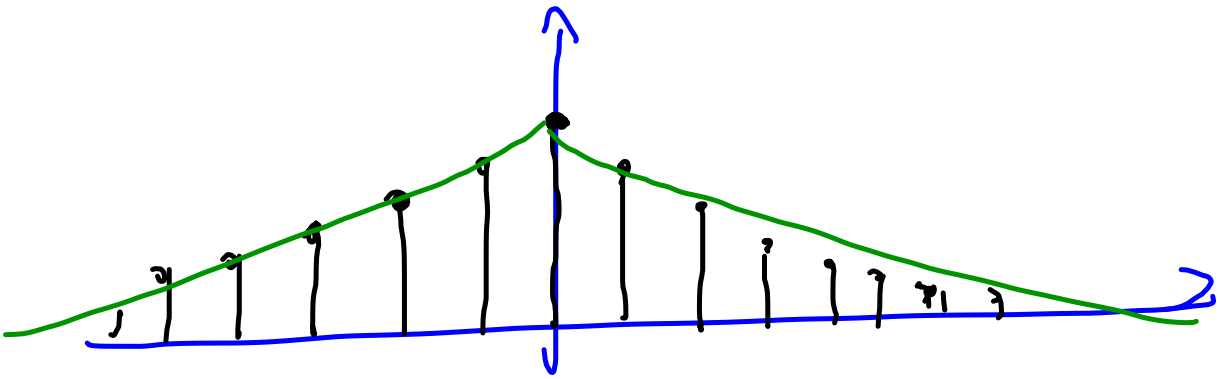
Definition: $|c_n|$ heißt Amplitudenspektrum von $f(t)$, $n \in \mathbb{Z}$

$$|z^*| = |z|$$

$$\Downarrow$$

$$|c_n| = |c_n^*| = |c_{-n}|$$

$\Longrightarrow$ Amplitudenspektrum ist stets achsensymmetrisch



(2) Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} |c_n| = 0$$

(Konvergent!)