Klausur!

Entweder S. B. ?

oder 17 - 21 März

Achtung! Kein fester Termin, nur ein Vorschlag!

Faltung

$f_1(t)$

$f_2(t)$

$$h(t) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} f_1(u) \cdot f_2(t-u)\, du =$$

$$=: f_1(t) * f_2(t)$$

Faltung von f_1 und f_2

Satz (Faltungssatz):

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)](\omega) =$$

$$= \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) \cdot \mathcal{F}[f_2(t)](\omega) =$$

$$= F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

mit $f_i(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F_i(\omega)$,

$i = 1, 2$

Wichtig in Linearer Systemtheorie!

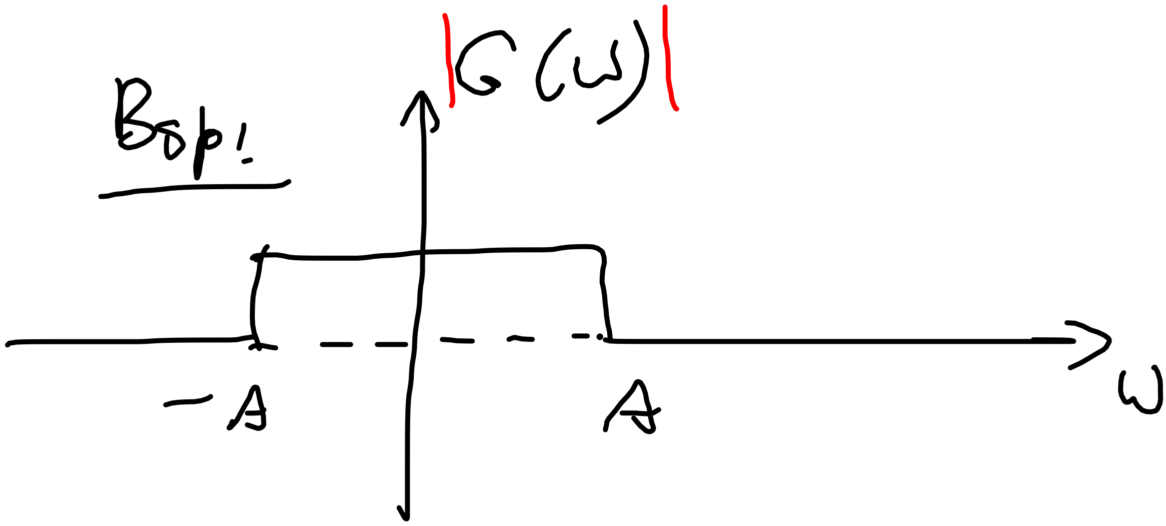
<u>Alle</u> lineare Filter sind Faltungen mit den entspr. Funktionen (Faltungskernen); mehr, alle Faltungen sind lineare Filter.

<u>Folgerung</u>!

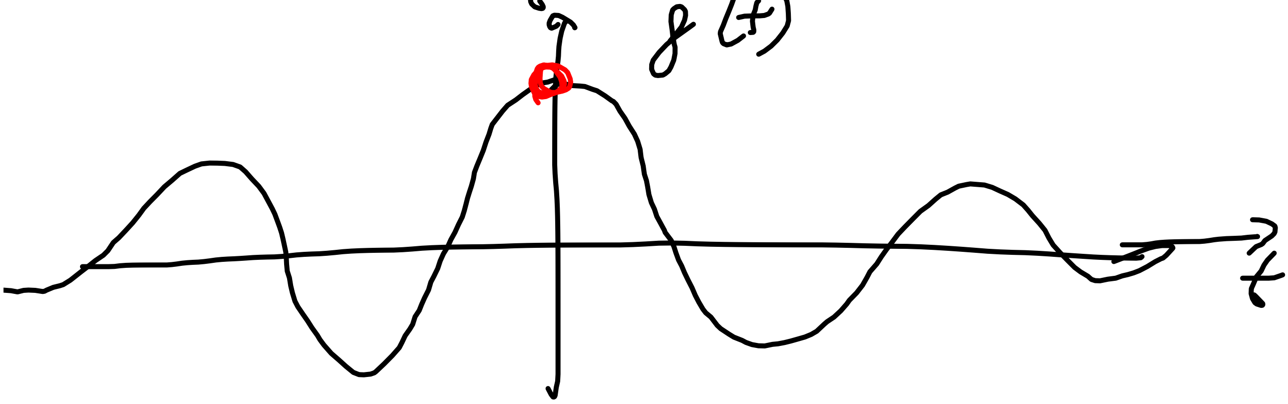
$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$$
$$g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(\omega)$$

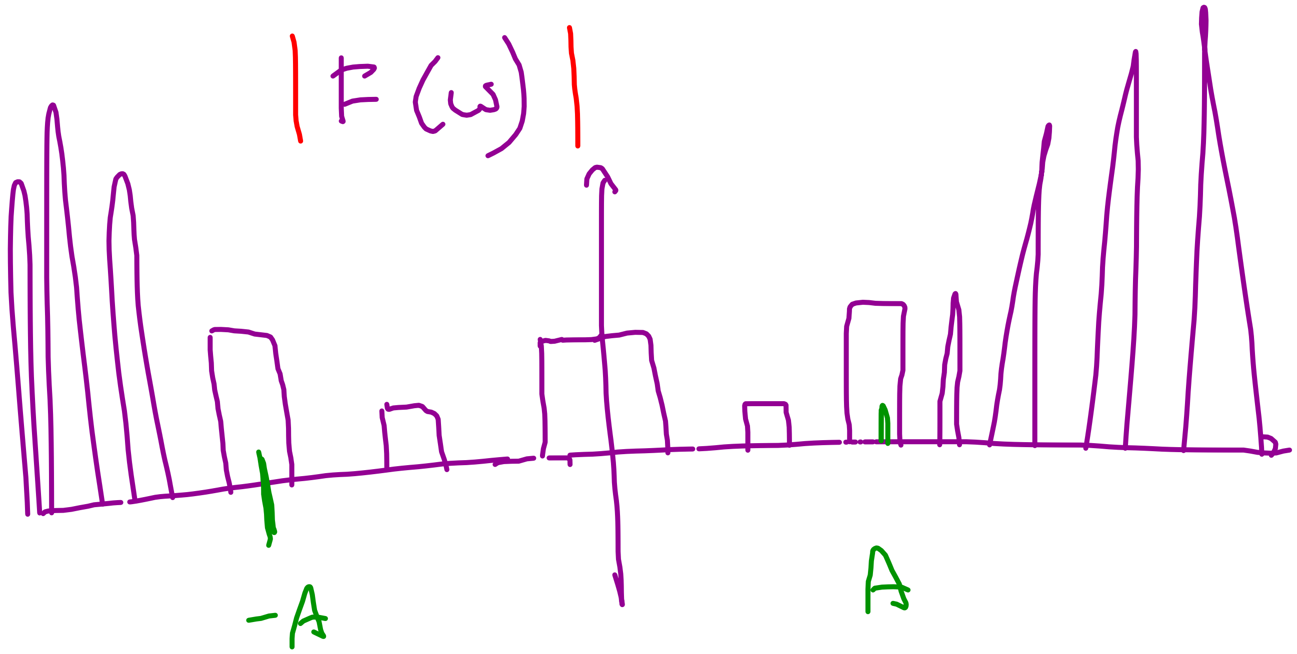
$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)\cdot G(\omega)](t) = f(t) * g(t)$$

Bsp!



$g(t)$ verhält sich wie $\dfrac{\sin t}{t}$



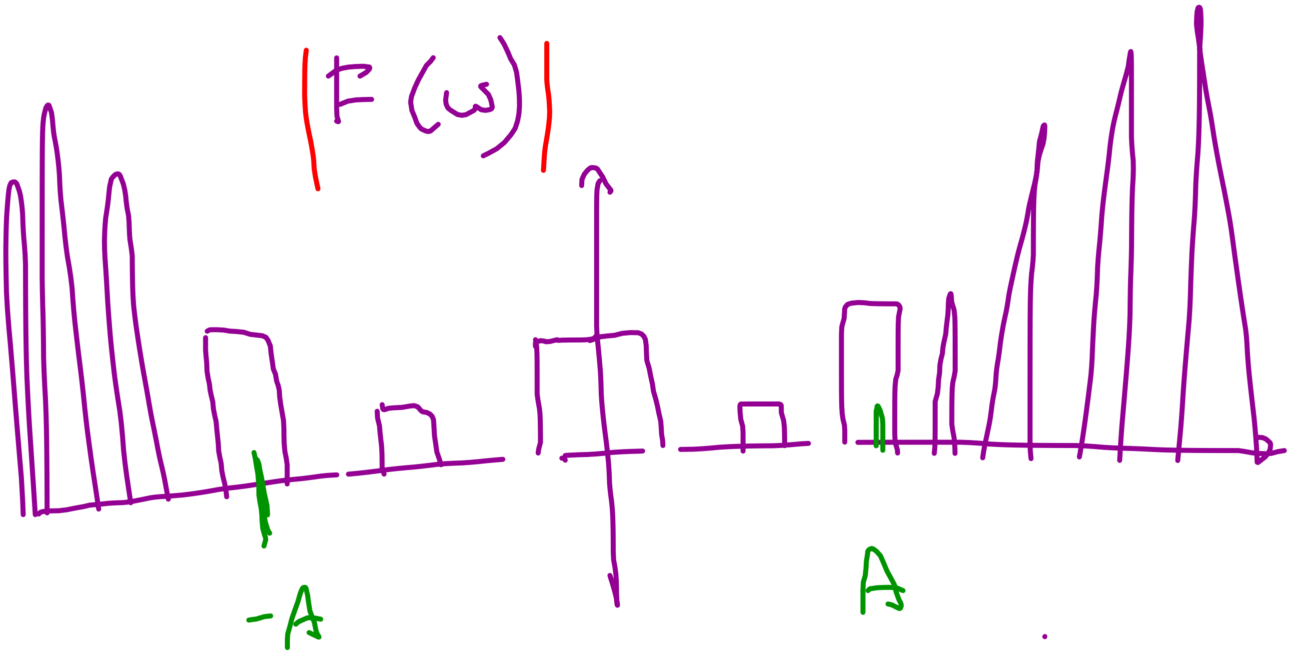


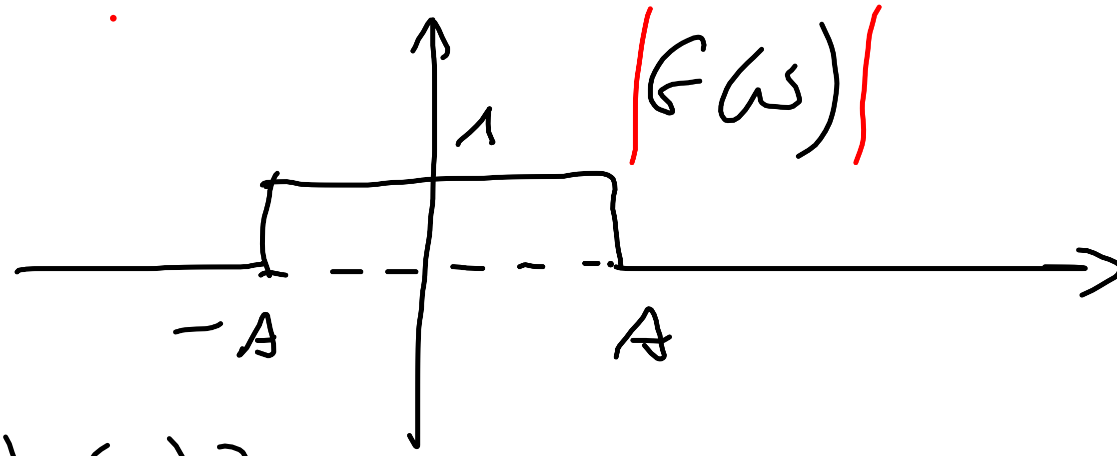
(sym!)

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$:

Betrag!

stets positiv!





$(F \cdot G)(\omega)$?

Satz (Vertauschungssatz)

Aus $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ erhält man:

$$F(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi \cdot f(-\omega)$$

Bsp:

Geg.: $f(t) = \frac{1}{1+t^2} \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$

Gesucht:

$$\pi \cdot e^{-|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \; ?$$

Vertauschungssatz:

$$F(t) = \pi \cdot e^{-|t|}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

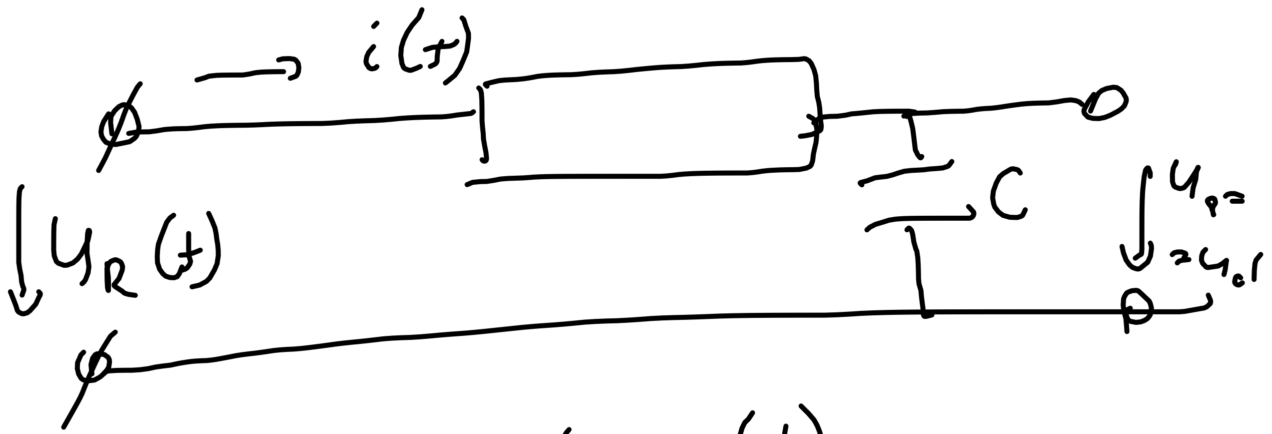
$$2\pi f(-\omega) = 2\pi \frac{1}{1+(-\omega)^2} = \frac{2\pi}{1+\omega^2}$$

$$\boxed{e^{-|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{1+\omega^2}}$$

Bezeichn.	Zeitbereich	Frequ. - Bereich
Linearität	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$

HA

Lineare Filter



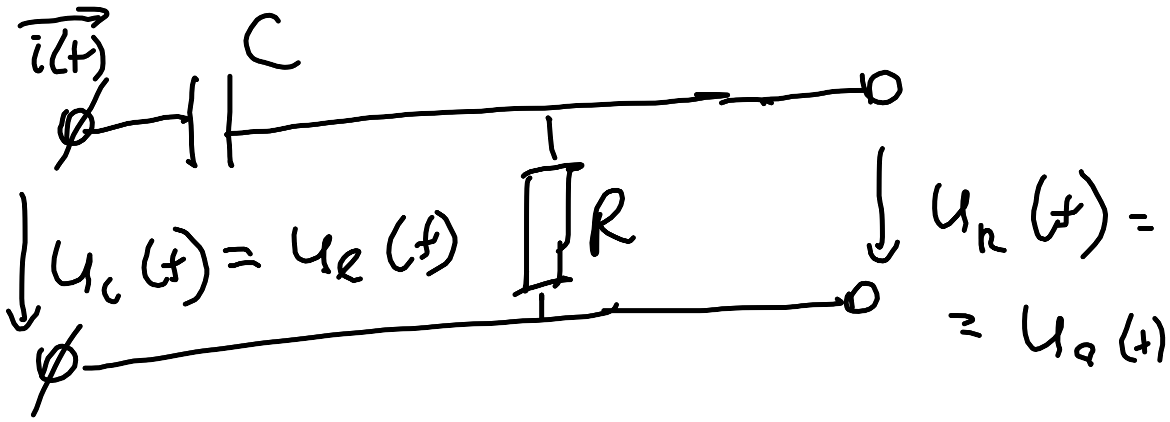
Eingang: $U_R(t)$

Ausgang: $U_a(t) = u_C(t)$

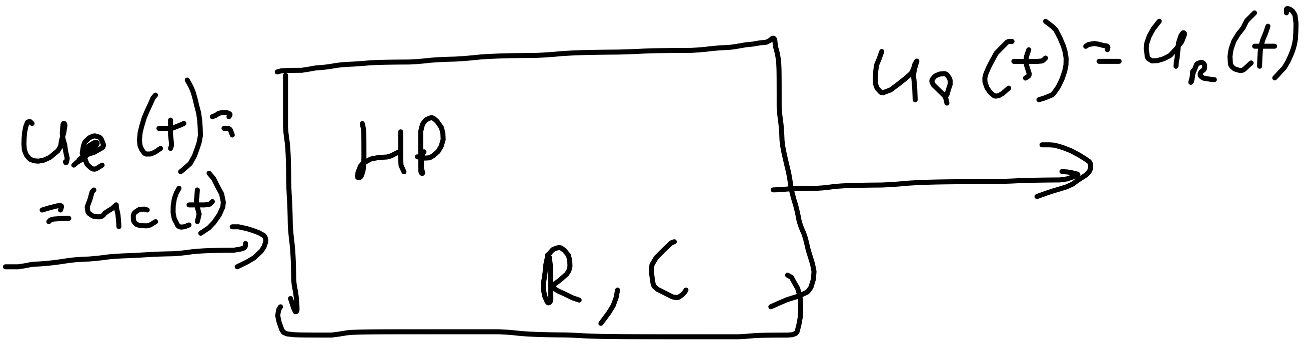
System: $U_R(t) \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{TP} \\ R, C\end{matrix}} \longrightarrow U_a(t) = u_C(t)$

Bz: Tiefpass

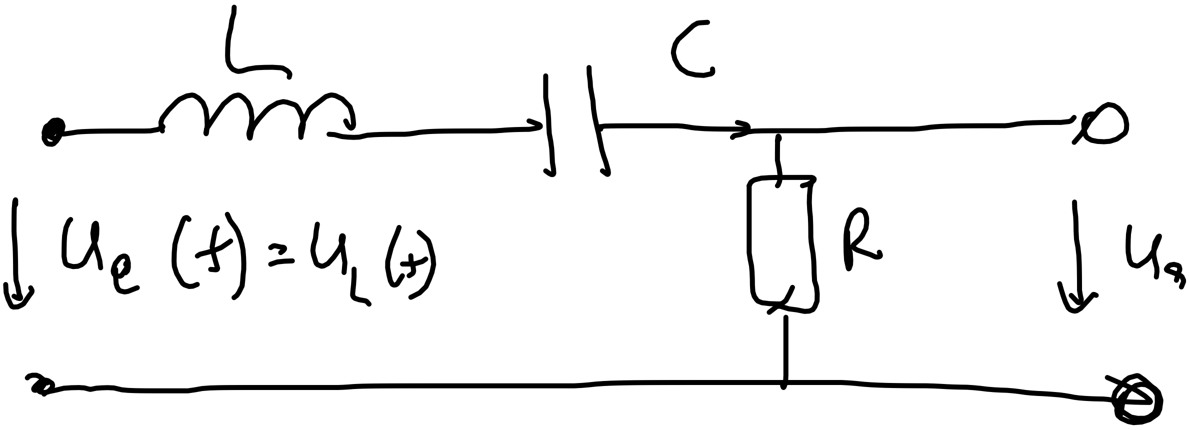
2. Hochpass



System:

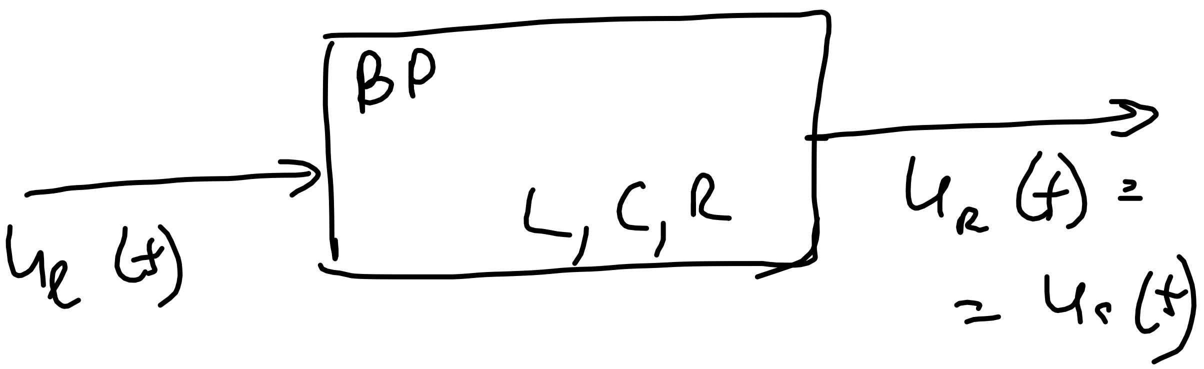


3. Bandpass



$$u_a(t) = u_R(t)$$

System!



Idealisiertes Verhalten

Sei

$$u_e(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$$

d.h.

$$u_e(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega =$$

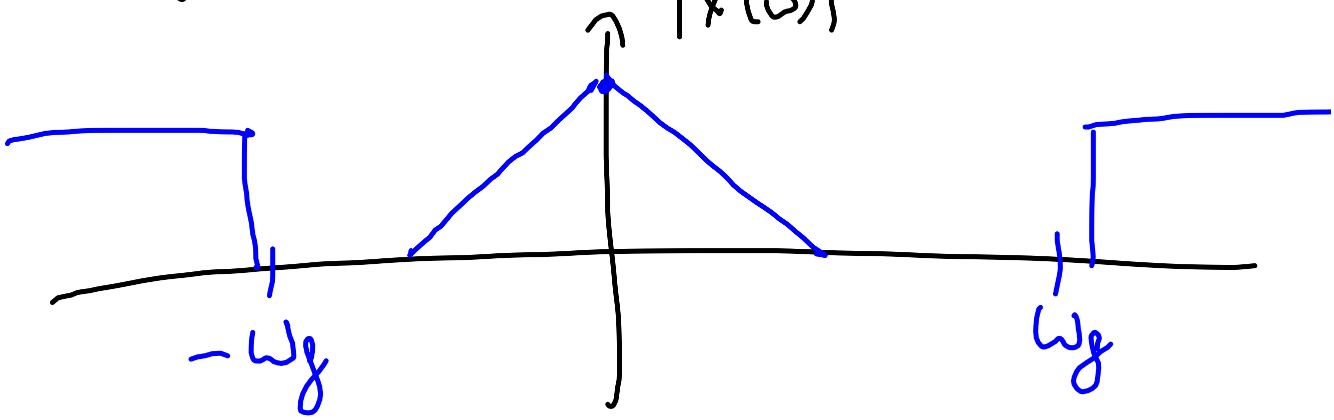
Euler-Darstellung für $X(\omega)$

$$= \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)} \cdot e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |X(\omega)| \, e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} \, d\omega$$

Jetzt,

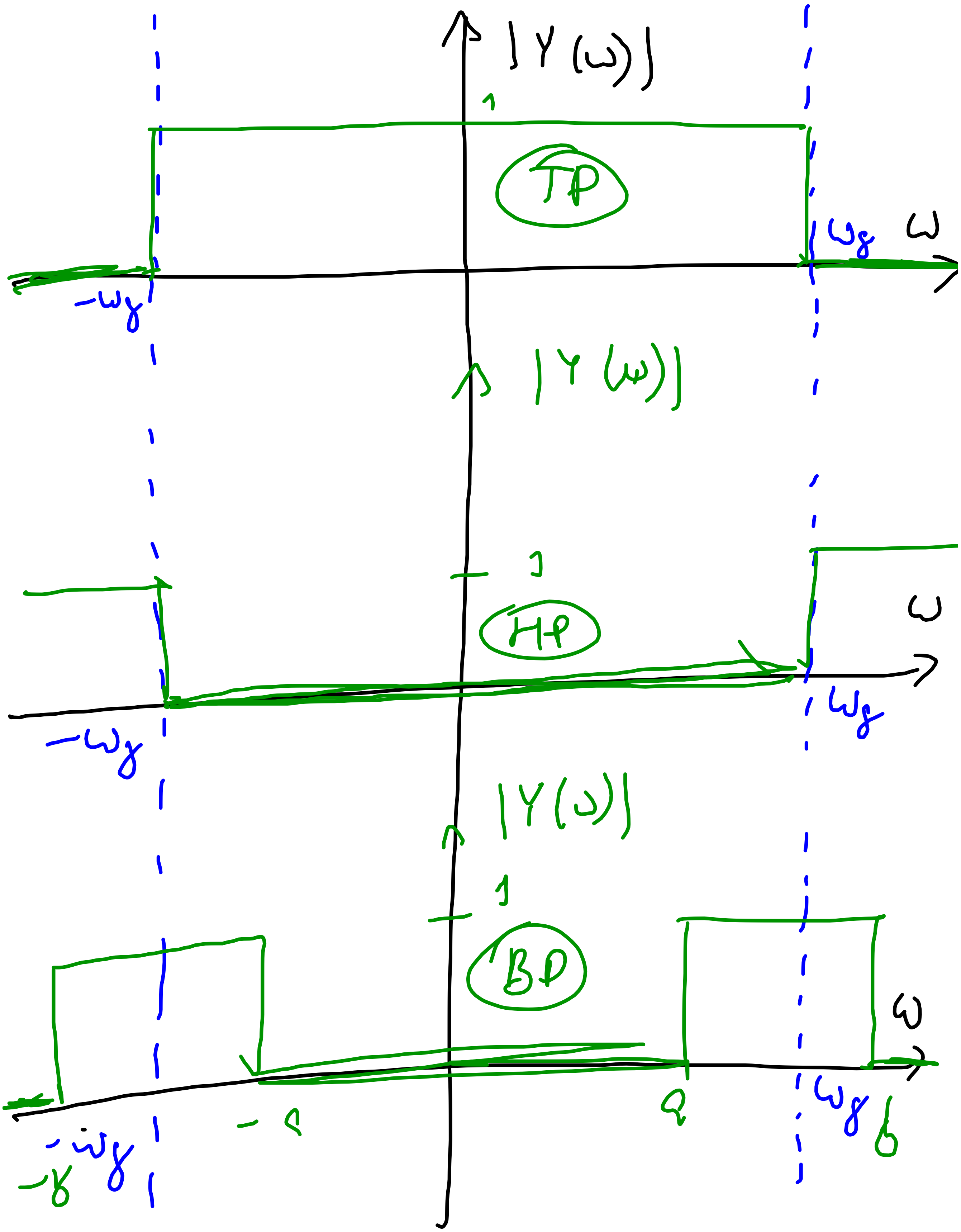
z.B. $u_e(t)$ sei die Eingangsspannung, die das folgende Amplituden Spektrum hat:



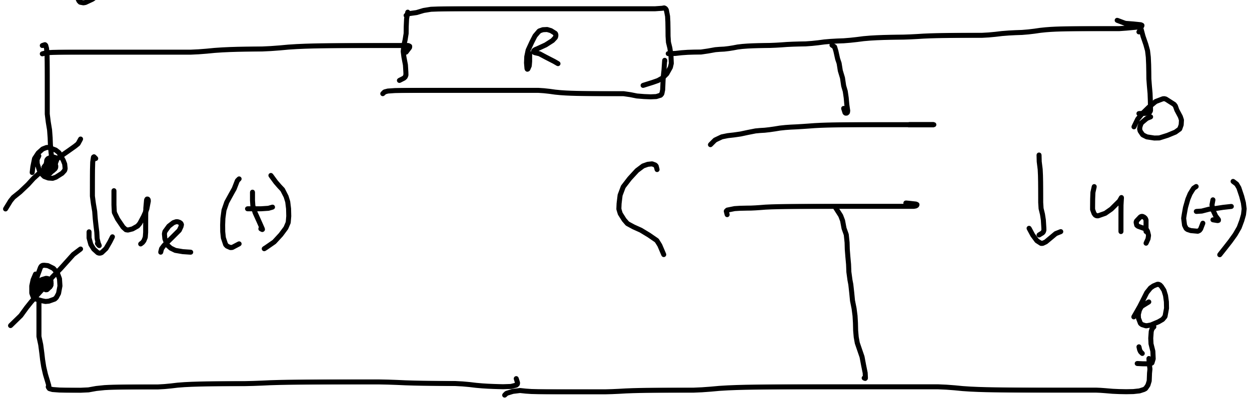
Bei passender Wahl von Parametern R, C, L gilt für die Ausgangsspannung

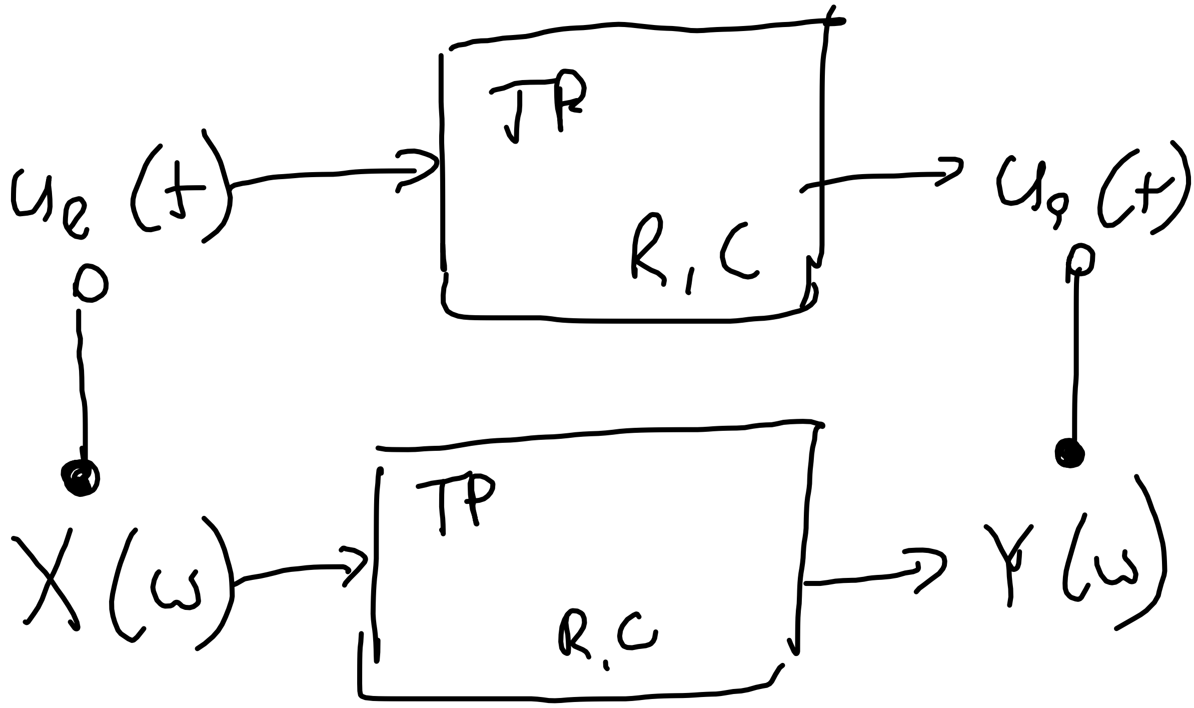
$$u_a(t) = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|\, e^{j(\omega t + \varphi_y(\omega))}\, d\omega$$


|Y(ω)|
1
TP
ω
$-\omega_g$
ω_g
|Y(ω)|
1
HP
ω
$-\omega_g$
ω_g
|Y(ω)|
1
BP
ω
$-a$
a
$-\omega_g$
ω_g
$-b$
b

Bsp: Wir rechnen jetzt das für den TP genau nach!





d.h.

$$u_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$u_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

(1) Aufstellen eines mathematischen Modells zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen $u_e(t)$ und $u_a(t)$

E-Technik: (Physik)

(1) Maschenregel:

$$u_e(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

(2) Ohm'sches Gesetz:

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

(3) Kondensatorgleichung

$$u_C(t) = \int \frac{i(t)}{C}\, dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\dot{u}_C(t) = \frac{i(t)}{C}$$

(1) + (2)

$\Downarrow$

$$u_e(t) = R \cdot i(t) + u_c(t)$$

$\Downarrow$ (3)

$$u_e(t) = R \cdot C \cdot \dot{u}_c(t) + u_c(t)$$

$$u_c = u_a$$

$\Longrightarrow$ <u>DGl 1. Ordnung</u>

$$u_e(t) = R \cdot C \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t)$$

<u>Lineare DGl</u>

<u>Ziel:</u> <u>DGl Lösen</u>

Mehrere Methoden

z.B.:

(2) Transformieren in Fourier-Bereich

$$u_e(t) = RC\,\dot{u}_a(t) + u_a(t)$$

Abl.-Satz
Linearität

$$X(\omega) = RC(j\omega)Y(\omega) + Y(\omega) =$$

$$= Y(\omega)\left[j\omega RC + 1\right]$$

$$X(\omega) = \left[1 + RCj\omega\right] Y(\omega)$$

Lineare Gleichung

$$Y(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} X(\omega)$$