„Mathematik 3“ MST

Lösungen zu Blatt 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Prof. Dr. B.Grabowski

Zu Aufgabe 1)

Zu a) $y(x) = \frac{x+C-1}{x+C} \qquad C \in R$

Zu b) Subst.: u=x+y+1, --> Dgl : u'-1 = u^2 --> u= tan(x+C),
Rücksubst.: y(x)=tan(x+C)-x-1, $C \in R$

Zu c) Subst.: u=y/x, --> Dgl : u'x = 4 --> u= 4 ln(|x|)+C,
--> Rücksubst.: y(x)= 4x (ln(|x|)+C), $C \in R$

Zu d) y' – xy = 0

$$(Nach\ y'umstellen) \Leftrightarrow y' = xy$$

$$(Trennung\ der Variablen) \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = xdx \qquad (falls\ y \neq 0)$$

$$(Integrieren) \Leftrightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int xdx$$

$$(Integral\ lösen) \Leftrightarrow \ln(|\ y\ |) = \frac{1}{2}x^2 + C, C \in R$$

$$(nach\ y\ auflösen) \Leftrightarrow |\ y\ | = e^{0.5x^2+C} = e^{0.5x^2}e^C = Ke^{0.5x^2}, \qquad K > 0\,(K = e^C)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm Ke^{0.5x^2}, K > 0$$

Der ausgeschlossene Fall y=0 wird nun gesondert betrachtet:
y=0 --> y'=0 , d.h. y=0 erfüllt ebenfals die o.g. Dgl.

Damit sind alle Funktionen folgender Gestalt Lösungen der Dgl:

$y = \pm Ke^{0.5x^2}, K > 0$ oder y=0.

Diese Lösungen können wir zusammenfassen zu:

$y = Ke^{0.5x^2}, K \in R$

--

Zu Aufgabe 2)
Lösen Sie folgende Differentialgleichungen und AWP durch
T.d.V und anschließende Methode der Variation der Konstanten (V.d.K)!

a) $y'+2y = e^{-x}$, y(0)=0
b) 3y' + 2y = x
c) $y'+2y = e^{-2x}$

Lösung:
Wir lösen zuerst die homogene Gleichung und setzten die Konstante dann als Funktion von x an!

Zu a)
Lösen der homog. Dgl durch Trennung der Variablen (T.d.V):

$$y'+2y = 0 \Rightarrow y' = -2y \overset{T.d.V.}{\Rightarrow} y = Ke^{-2x}, K \in R$$

Ansatz: $y = K(x)e^{-2x}$.
Wir suchen nun alle Funktionen dieses Ansatzes, die die Dgl. lösen.
Dazu setzen wir y in die Dgl. ein und bestimmen K(x) so, dass „es passt".

$$y = K(x)e^{-2x} \Rightarrow y' = K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x}$$

$$y'+2y = e^{-x} \Leftrightarrow K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x} + 2K(x)e^{-2x} = e^{-x} \Leftrightarrow K'(x)e^{-2x} = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow K'(x) = e^{x} \Leftrightarrow K(x) = \int e^{x}dx = e^{x} + C$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der Dgl a) $y'+2y = e^{-x}$:

$$y = K(x)e^{-2x} = (e^{x} + C)e^{-2x} = e^{-x} + Ce^{-2x}, C \in R$$

Wir lösen jetzt das Anfangswertproblem (AWP):

$$y(0) = e^{-0} + Ce^{-0} = 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$$

Die Lösung des AWP lautet folglich: $y = e^{-x} - e^{-2x}$

Zu b)
Lösen der homog. Dgl durch Trennung der Variablen (T.d.V):

$$3y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2}{3}y \overset{T.d.V.}{\Rightarrow} y = Ke^{-\frac{2}{3}x}, K \in R$$

Ansatz: $y = K(x)e^{-\frac{2}{3}x}$.
Wir suchen nun alle Funktionen dieses Ansatzes, die die Dgl. lösen.
Dazu setzen wir y in die Dgl. ein und bestimmen K(x) so, dass „es passt".

$$y = K(x)e^{-\frac{2}{3}x} \Rightarrow y' = K'(x)e^{-\frac{2}{3}x} - \frac{2}{3}K(x)e^{-\frac{2}{3}x}$$

$$3y'+2y = x \Leftrightarrow 3K'(x)e^{-\frac{2}{3}x} - 3\frac{2}{3}K(x)e^{-\frac{2}{3}x} + 2K(x)e^{-\frac{2}{3}x} = x$$

$$\Leftrightarrow 3K'(x)e^{-\frac{2}{3}x} = x \Leftrightarrow K'(x) = \frac{1}{3}xe^{\frac{2}{3}x} \Leftrightarrow K(x) = \frac{1}{3}\int xe^{(2/3)x}dx$$

$$\overset{\text{Partielle Integration}}{\Leftrightarrow} K(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x - \frac{9}{4}\right)e^{\frac{2}{3}x} + C = \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)e^{(2/3)x} + C$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der Dgl b) $3y'+2y = x$:

$$y = K(x)e^{-(2/3)x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + Ce^{-\frac{2}{3}x}, C \in R$$

Zu c)
Lösen der homog. Dgl durch Trennung der Variablen (T.d.V):

$$y'+2y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow y = Ke^{-2x}, K \in R.$$

Ansatz: $y = K(x)e^{-2x}$.
Wir suchen nun alle Funktionen dieses Ansatzes, die die Dgl. lösen.
Dazu setzen wir y in die Dgl. ein und bestimmen K(x) so, dass „es passt".

$$y = K(x)e^{-2x} \Rightarrow y' = K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x}$$

$$y'+2y = e^{-2x}$$

$$y'+2y = e^{-2x} \Leftrightarrow K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x} + 2K(x)e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow K'(x)e^{-2x} = e^{-2x}$$
$$\Leftrightarrow K'(x) = 1 \Leftrightarrow K(x) = x + C$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der Dgl c) $y'+2y = e^{-2x}$:

$$y = K(x)e^{-2x} = (x + C)e^{-2x} = xe^{-2x} + Ce^{-2x}, C \in R$$

Zu Aufgabe 3)
Geben Sie jeweils mindestens eine Lösung folgender Differentialgleichung an :

a) 4y' = y   b) 4y' = -3y   c) 3y'+2y = sin(x)   d) 3y'+2y=e^x

Lösungshinweis: Überlegen Sie sich zuerst, von welchem Typ die Lösungsfunktion y(x) sein könnte (zB. Typ Exponentialfunktion: y(x) = ae^{bx}, oder Polynom y(x)=ax +b oder Schwingung y(x) = asin(x) + bcos(x)) , so dass die linke Seite und die rechte Seite der Differentialgleichung vom Typ her übereinstimmen.
Bestimmen Sie anschließend die unbekannten Parameter a,b Ihres gewählten Ansatzes (Typs) für y(x), indem Sie y(x) einfach in die Differentialgleichung einsetzen und schauen, für welche Werte von a,b die Differentialgleichung erfüllt ist!

Zu a)
Ansatz: y(x) = ae^{bx} (Bei der e-Funktion ist der Typ der Ableitung mit dem Typ der abgeleiteten Funktion überein!)

a und b berechnen wir, indem wir diesen Ansatz in die Dgl. einsetzen:

$y'(x)= abe^{bx}$

--> $4y'=y \Leftrightarrow 4abe^{bx} = ae^{bx} \Leftrightarrow 4ab = a \Leftrightarrow a\neq 0$ beliebig und $b = 1/4$

--> Lösung der Dgl. ist: $y(x) = ae^{(1/4)x}$, $a\neq 0$ beliebig.

Zu b)
Analog zu a):
Ansatz: $y(x) = ae^{bx}$ (Bei der e-Funktion ist der Typ der Ableitung mit dem Typ der abgeleiteten Funktion überein!)

a und b berechnen wir, indem wir diesen Ansatz in die Dgl. einsetzen:

$y'(x)= abe^{bx}$

--> Lösung der Dgl. ist: $y(x) = ae^{(-3/4)x}$, $a\neq 0$ beliebig.

Zu c) Ansatz: $y(x)=a\sin(x)+b\cos(x)$
Berechnung von a, b:
$y'(x)=a\cos(x)-b\sin(x)$

$$\Rightarrow 3y'+2y = 3a\cos(x)-3b\sin(x)+2a\sin(x)+2b\cos(x)$$
$$= (3a+2b)\cos(x) +(2a-3b) \sin(x)$$
$$= \sin(x)$$

$\Leftrightarrow$ $3a+2b=0$ und $2a-3b=1$
$\Leftrightarrow$ $a= 6/39$, $b= -3/13$

Eine Lösung der Dgl.: $y(x)=(6/39)\sin(x)-(3/13)\cos(x)$

Zu d)
Analog zu a)
Ansatz: $y(x)=ae^x$.
Setzen wir diesen Ansatz in die Dgl. ein und führen einen Koeffizientenvergleich durch, so erhalten wir $a = 1/5$

Eine Lösung der Dgl.: $y(x) = \frac{1}{5}e^x$.

Zu Aufgabe 4)

Zu a) Ansatz für die spezielle Lösung:
$$y_p(x) = ax + b$$
Wir bestimmen die Parameter a,b durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich
$$y_p(x) = ax + b \Rightarrow y'_p(x) = a$$

$2y' - y = x$

$\Leftrightarrow 2a - ax - b = x$

$\Leftrightarrow (2a - b) - ax = x$

$\Leftrightarrow 2a - b = 0$

$\quad -a = 1$

$\Leftrightarrow a = -1, b = -2$

Die spezielle Lösung lautet: $y_p(x) = -x - 2$.

Zu b)
Ansatz für die spezielle Lösung:

$$y_p(x) = cxe^{0.5x}$$

.
Wir bestimmen den Parameter c durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$y_p(x) = cxe^{0.5x} \Rightarrow y'_p(x) = ce^{0.5x} + 0.5cxe^{0.5x}$

2y' - y = x + $e^{0.5x}$

$\Leftrightarrow 2ce^{0.5x} + cxe^{0.5x} - cxe^{0.5x} = e^{0.5x}$

$\Leftrightarrow 2ce^{0.5x} = e^{0.5x}$

$\Leftrightarrow \quad 2c = 1$

$\Leftrightarrow c = 0.5$

Die spezielle Lösung lautet: $y_p(x) = 0.5xe^{0.5x}$.

Zu c)
1. Variante: Die Störfunktion setzt sich aus den beiden Teilen x und $e^{0.5x}$ zusammen. Wir bestimmen jeweils die zugehörigen speziellen Lösungen:
$y_{p1}(x) = -x - 2$ (siehe 2a)) und $y_{p2}(x) = ax + b + cxe^{0.5x}$ (siehe 2b))

Die spezielle Lösung zur Störfunktion x + $e^{0.5x}$
ist dann yp(x) = $y_{p1}(x)$ + $y_{p2}(x)$ = $-x - 2 + 0.5xe^{0.5x}$

.2. Variante: Wir machen gleich den „vollständigen" Ansatz für die gegebene Störfunktion x + $e^{0.5x}$: $y_p(x) = ax + b + cxe^{0.5x}$.

Wir bestimmen die Parameter a,b und c durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$y_p(x) = ax + b + cxe^{0.5x} \Rightarrow y'_p(x) = a + ce^{0.5x} + 0.5cxe^{0.5x}$

2y' - y = x + $e^{0.5x}$

$$\Leftrightarrow 2a + 2ce^{0.5x} + cxe^{0.5x} - ax - b - cxe^{0.5x} = x + e^{0.5x}$$
$$\Leftrightarrow (2a - b) - ax + 2ce^{0.5x} = x + e^{0.5x}$$
$$\Leftrightarrow 2a - b = 0$$
$$-a = 1$$
$$2c = 1$$
$$\Leftrightarrow a = -1, b = -2, c = 0.5$$

Die spezielle Lösung lautet: $y_p(x) = -x - 2 + 0.5xe^{0.5x}$.

Zu Aufgabe 5)
Lösen Sie folgende Differentialgleichungen und AWP durch Anwendung des Zerlegungssatzes:

a) $y' + 2y = e^{-x}$, y(0)=0
b) $2y' - y = x + e^{0.5x}$
c) $y' + 2y = 1 + \sin(x)$

Lösung:
Wir lösen zuerst die homogene Gleichung ($y_{hom}(x)$) und machen dann einen Ansatz für eine spezielle Lösung $y_p(x)$. Dieser Ansatz ergibt sich aus der Gestalt der Störfunktion (rechte Seite) der Dgl.. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. ergibt sich dann zu: $y_{inhom}(x) = y_{hom}(x) + y_p(x)$.

Zu a)
Lösen der homog. Dgl durch Trennung der Variablen (T.d.V):

$$y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y \overset{T.d.V.}{\Rightarrow} y(x) = y_{\text{hom}}(x) = Ke^{-2x}, K \in R$$

Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p = ae^{-x}$.
Wir bestimmen den Parameter a durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$$y_p = ae^{-x} \Rightarrow y'_p = -ae^{-x}$$

$$\Rightarrow y' + 2y = e^{-x} \Leftrightarrow -ae^{-x} + 2ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow ae^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow a = 1$$

Die spezielle Lösung lautet: $y_p = e^{-x}$.

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der Dgl a) $y' + 2y = e^{-x}$:

$$y = y_p(x) + y_{\text{hom}}(x) = e^{-x} + Ke^{-2x}, K \in R$$

Wir lösen jetzt das Anfangswertproblem (AWP):
$$y(0) = e^{-0} + Ke^{-0} = 1 + K = 0 \Rightarrow K = -1$$

Die Lösung des AWP lautet folglich: $y = e^{-x} - e^{-2x}$

Zu b)

Lösen der homog. Dgl durch Trennung der Variablen (T.d.V):

$$2y' - y = 0 \Rightarrow y' = (1/2)y \Rightarrow y = Ke^{\frac{1}{2}x}, K \in R.$$

Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p(x) = ax + b + cxe^{0.5x}$

.

Wir bestimmen die Parameter a,b und c durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$$y_p(x) = ax + b + cxe^{0.5x} \Rightarrow y'_p(x) = a + ce^{0.5x} + 0.5cxe^{0.5x}$$

2y' - y = x + $e^{0.5x}$

$$\Leftrightarrow 2a + 2ce^{0.5x} + cxe^{0.5x} - ax - b - cxe^{0.5x} = x + e^{0.5x}$$
$$\Leftrightarrow (2a - b) - ax + 2ce^{0.5x} = x + e^{0.5x}$$
$$\Leftrightarrow 2a - b = 0$$
$$-a = 1$$
$$2c = 1$$
$$\Leftrightarrow a = -1, b = -2, c = 0.5$$

Die spezielle Lösung lautet: $y_p(x) = -x - 2 + 0.5xe^{0.5x}$.

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der Dgl b) 2y' - y = x + $e^{0.5x}$

$$y = y_p(x) + y_{\text{hom}}(x) = -x - 2 + 0.5xe^{0.5x} + Ke^{\frac{1}{2}x}, K \in R.$$

Zu c)

Lösen der homog. Dgl durch Trennung der Variablen (T.d.V):

$$y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow y = Ke^{-2x}, K \in R.$$

Ansatz für die spezielle Lösung: $y_p = a_0 + a\sin(x) + b\cos(x)$.

Wir bestimmen die Parameter a0,a und b durch Einsetzen von yp in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$$y_p = a_0 + a\sin(x) + b\cos(x) \Rightarrow y_p' = a\cos(x) - b\sin(x)$$

$$y' + 2y = 1 + \sin(x) \Leftrightarrow a\cos(x) - b\sin(x) + 2a_0 + 2a\sin(x) + 2b\cos(x) = 1 + \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow 2a_0 + (a + 2b)\cos(x) + (2a - b)\sin(x) = 1 + \sin(x)$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = 1$$
$$a + 2b = 0$$
$$2a - b = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2}, a = \frac{2}{5}, b = -\frac{1}{5}$$

Die spezielle Lösung lautet: $y_p = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)$.

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der Dgl c) $y' + 2y = 1 + \sin(x)$

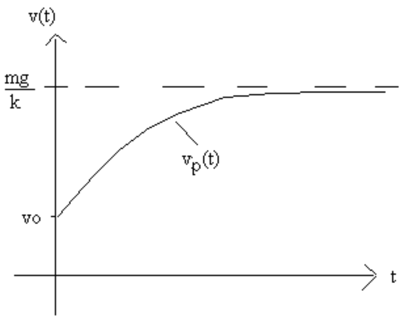
$$y = y_p(x) + y_{\text{hom}}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x) + Ke^{-2x}, K \in R.$$

Zu Aufgabe 6)

a) $v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \qquad C \in R$

b) $v_p(t) = (vo - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$

c) $v_{\max} = \lim_{t\to\infty} v_p(t) = \frac{mg}{k}$



Zu Aufgabe 7)

Ein Körper besitze zur Zeit $t = 0$ die Temperatur T_0 und werde in der Folgezeit durch vorbeiströmende Luft der konstanten Temperatur T_L gekühlt ($T_L < T_0$). Der Abkühlungsprozess wird dabei nach Newton durch die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_L) \qquad (a > 0)$$

beschrieben (a: Konstante). Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Körpertemperatur T für den Anfangswert $T(0) = T_0$ und skizzieren Sie die Temperaturkurve . Gegen welchen Endwert strebt die Körpertemperatur?

Lösung:

Es handelt sich um eine inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung: $\frac{dT}{dt} = -a(T - T_L) \Leftrightarrow \dot{T} + aT = aT_L$

Wir lösen sie mittels Zerlegungssatz.

Lösung der homogenen Dgl:

$$\frac{dT}{dt} = -aT \Rightarrow T_{\text{hom}}(t) = Ke^{-at}, K \in R.$$

Ansatz für die spezielle Lösung der inhomogenen Dgl:

$T_p(t) = b$

Wir bestimmen den Parameter b durch Einsetzen von $T_p(t) = b$ in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$T_p(t) = b \Rightarrow T'_p(t) = 0$

$\dot{T} + aT = aT_L \Leftrightarrow 0 + ab = aT_L \Rightarrow b = T_L$

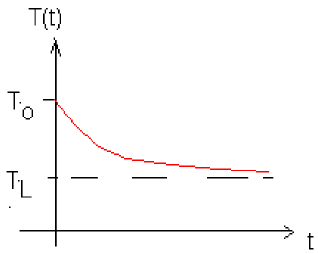
Die spezielle Lösung lautet: $T_p(t) = T_L$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der Dgl. $\frac{dT}{dt} = -a(T - T_L)$:

$T(t) = T_p(t) + T_{\text{hom}}(t) = T_L + Ke^{-at}, K \in R.$

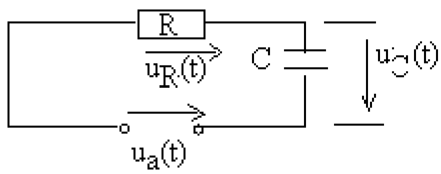
Wir lösen nun das Anfangswertproblem:
$T(0) = T_L + Ke^{-a0} = T_L + K = T_o \Rightarrow K = (T_o - T_L)$

Die Lösungstemperaturkurve des Anfangswertproblems lautet also:
$T(t) = T_L + (T_o - T_L)e^{-at}$



Es gilt: $\lim_{t \to \infty} T(t) = T_L$

Zu Aufgabe 8)
Der Spannungsverflauf $u_c(t)$ am Kondensator im in der Skizze dargestellten Tiefpass lässt sich durch folgende Differentialgleichung beschrieben: $RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u_a(t)$



Lösen Sie die Dgl nach $u_C(t)$ für folgendes Anfangswertproblem:
Der Kondensator ist zur Zeit t=0 aufgeladen: $u_C(0) = Uo$ und es wird eine konstante Spannung angelegt: $u_a(t) = u$.
Skizzieren Sie den Verlauf der Spannungskurve $u_C(t)$.

Lösung:
Es handelt sich um eine inhomogene lineare Dgl. 1. Ordnung: $RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u$ **,** $u_C(0) = Uo$.
Wir lösen sie mittels Zerlegungssatz.

Lösung der homogenen Dgl:

$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = 0 \Rightarrow u_{\text{hom}}(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}, K \in R.$

Ansatz für die spezielle Lösung der inhomogenen Dgl:
$u_p(t) = b$

Wir bestimmen den Parameter b durch Einsetzen von $u_p(t) = b$ in die Dgl. und Koeffizientenvergleich :

$u_p(t) = b \Rightarrow u'_p(t) = 0$
$RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u \Leftrightarrow b = u$

Die spezielle Lösung lautet: $u_p(t) = b$
Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der Dgl. $RC\dot{u}_C(t) + u_C(t) = u$ **:**

$u_C(t) = u_p(t) + u_{\hom}(t) = u + Ke^{-\frac{1}{RC}t}, K \in R.$

Wir lösen nun das Anfangswertproblem:
$u_C(0) = u + K = Uo \Rightarrow K = (U_o - u)$

Die Spannungskurve des Kondensators lautet folglich:

$u_C(t) = u + (U_o - u)e^{-\frac{1}{RC}t}$