Übungsaufgaben „Differentialgleichungen 2. Ordnung und PBZ“

Aufgabe 1)
Geben Sie jeweils mindestens eine Lösung folgender Differentialgleichung an :

$a)\, 3y''+2y'=3x-1$
$b)\, y''+y'+y=1$
$c)\, y''+y'+y=\sin(2x)$
$d)\, y''+y'+y=e^{x}$
$e)\, y''+2y'-3y=e^{x}$
f) $3y''+2y'-y=x^{2}+3x-1$

Lösungshinweis: Überlegen Sie sich zuerst, von welchem Typ die Lösungsfunktion y(x) sein
könnte (zB. Typ Exponentialfunktion: $y(x) = ae^{bx}$, oder Polynom $y(x)=a_nx^n + ...+ a_1x+a_o$ einer bestimmten Ordnung n oder Schwingung y(x) = asin(x) + bcos(x)) , so dass die linke Seite (=Störfunktion) und die rechte Seite der Differentialgleichung vom Typ her übereinstimmen. Bestimmen Sie anschließend die unbekannten Parameter a,b bzw. $a_n,...,a_o$ Ihres gewählten Ansatzes (Typs) für y(x), indem Sie y(x) einfach in die Differentialgleichung einsetzen und schauen, für welche Werte von a,b bzw. $a_n,...,a_o$ die Differentialgleichung erfüllt ist!

Aufgabe 2
Geben Sie jeweils eine einzige spezielle Lösung $y_p(x)$ folgender Differentialgleichungen zweiter Ordnung an! (Hinweis: Wählen Sie einen geeigneten Ansatz und bestimmen Sie die Parameter in diesem Ansatz durch Einsetzen in die Differentialgleichung!)

a) $y''+6y'+10y=x$
b) y’’+2y’-3y = 2sin(5x)
c) y’’+2y’= x
d) y’’-2y’+ y = 2
e) y’’-2y’+ y = e^x

Aufgabe 3
Lösen Sie folgende Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme mittels Zerlegungssatz!

a) $y''+6y'+10y = x, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2$
b) y''+2y'-3y = 3sin(2x)+cos(2x)
c) y''+2y'= 2

Aufgabe 4)
Lesen Sie sich die folgende Wiederholung zur PBZ gut durch!

Wir suchen nun eine Urbildfunktion einer Funktion F(s) der Form: $F(s) = \frac{as+b}{(s-s_1)(s-s_2)}$,
wobei s_1 und s_2 relle Nullstellen des Nennerpolynoms sind.
Wir vereinfachen dazu F(s) durch die sogeannte Partialbruchzerlegung, indem wir F(s) in Partialbrüche zerlegen:

$$\frac{as+b}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_2)}$$

Die Methode der Partialbruchzerlegung:
Die Partialbruchzerlegung (PBZ) kann man auffassen als Rückgängigmachung der Hauptnennerbildung.
Für ein echt gebrochen rationales Polynom $F(s) = \frac{as+b}{(s-s_1)(s-s_2)}$, wobei a,b bekannte reelle Zahlen und s_1 und s_2 die bekannten reellen Nullstellen des Nennerpolynoms sind, gilt stets:

$$\frac{as+b}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{(s-s_1)} + \frac{B}{(s-s_2)}.$$

Die beiden Brüche auf der rechten Seite werden als Partialbrüche bezeichnet.
Die unbekannten Konstanten A und B können dabei bestimmt werden, indem man 2 verschiedene Werte für s ind diese Gleichung einsetzt und dann jeweils nach A und B umstellt.
Um sich dieses Verfahren zu erleichtern, wird die gesamte Gleichung zuerst mit dem Hauptnenner $(s-s_1)(s-s_2)$ multipliziert:

$$as+b = A(s-s_2) + B(s-s_1)$$

und dann zwei verschiedene Werte für s (z.B. $s = s_1$ und $s=s_2$) eingesetzt.
Das entstehende Gleichungssystem wird dann nach A und B aufgelöst.

Bsp: Wir zerlegen $F(s)=\dfrac{3s+1}{(s-1)(s+1)}$ in Partialbrüche.

Es gilt: $\dfrac{3s+1}{(s-1)(s+1)}=\dfrac{A}{(s-1)}+\dfrac{B}{(s+1)}$.

Bestimmung von A und B:

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s+1)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{B}{(s+1)} \Leftrightarrow 3s+1=A(s+1)+B(s-1)$$

Wir setzten nun 2 Werte (am besten die Nullstellen) von s ein:

s=1:
$$\begin{aligned} & 3s+1=A(s+1)+B(s-1) \\ \Leftrightarrow \quad & 4=2A \quad \Rightarrow A=2 \end{aligned}$$

s=-1:
$$\begin{aligned} & 3s+1=A(s+1)+B(s-1) \\ \Leftrightarrow \quad & -2=-2B \quad \Rightarrow B=1 \end{aligned}$$

Demzufolge gilt: $\dfrac{3s+1}{(s-1)(s+1)}=\dfrac{2}{(s-1)}+\dfrac{1}{(s+1)}$

Durch Hauptnennerbildung kann man die Probe machen!

Aufgabe 5)
Bestimmen Sie PBZ

$$a)\quad \frac{s-4}{(s+3)(s-1)} \qquad b)\quad \frac{3s+5}{2(s-4)(s-2)}$$

Aufgabe 6)
Besitzt ein Polynom $a_2s^2+a_1s+a_0$ zwei reelle Nullstellen s_1 und s_2, so kann man es in Linearfaktoren zerlegen: $a_2s^2+a_1s+a_0=a_2(s-s_1)(s-s_2)$.
Berechnen Sie Partialbruchzerlegung!

$$a)\quad F(s)=\frac{s+2}{s^2-s-6} \qquad b)\quad F(s)=\frac{3s}{5s^2+10s+5} \qquad c)\quad F(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$

Aufgabe 7)
Das Nennerpolynom kann mehr als 2 relle Nullstellen besitzen.
Tritt eine relle Nullstelle s1 im Nenner k-fach auf, so erhalten wir den Linearfaktor $(s\text{-}s1)^k$ im Nenner. Der Ansatz der Partialbrüche für ein LF im Nenner der Gestalt $(s\text{-}s1)^k$ (s1 ist k-fache reelle Nullstelle) ist :

$$\frac{A_1}{(s-s1)}+....+\frac{A_k}{(s-s1)^k}$$

Zerlegen Sie

$$F(s) = \frac{-2s^2+18s-3}{s^3-s^2-8s+12}$$

Aufgabe 8)
Ein Nennerpolynom kann auch komplexe Nullstellen besitzen.
Ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen (s1, s1*) mit s1 = a+jb liefert als Produkt der Linearfaktoren ein Polynom 2. Ordnung der folgenden Gestalt:
$(s-s1)(s-s1^*) = (s-a)^2 + b^2$

Der Ansatz der Partialbrüche für ein solches Produkt im Nenner ist: $\frac{A+Bs}{(s-a)^2+b^2}$

Zerlegen Sie

a) $F(s) = \frac{(s+2)^2}{s^4-2s^3+3s^2-4s+2}$ **b)** $F(s) = \frac{-2s^2+3}{(s-1)^2(s^2+2s+5)}$

Aufgabe 9)
Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $y'(t) + y(t) = e^{-2t}$ AB : $y(0)=0$

b) $y''(t) + y'(t) = 0$ AB : $y(0)=1$, $y'(0)=0$

c) $y''(t) + y'(t) + 2y(t)=0$ AB : $y(0)=1$, $y'(0)=0$