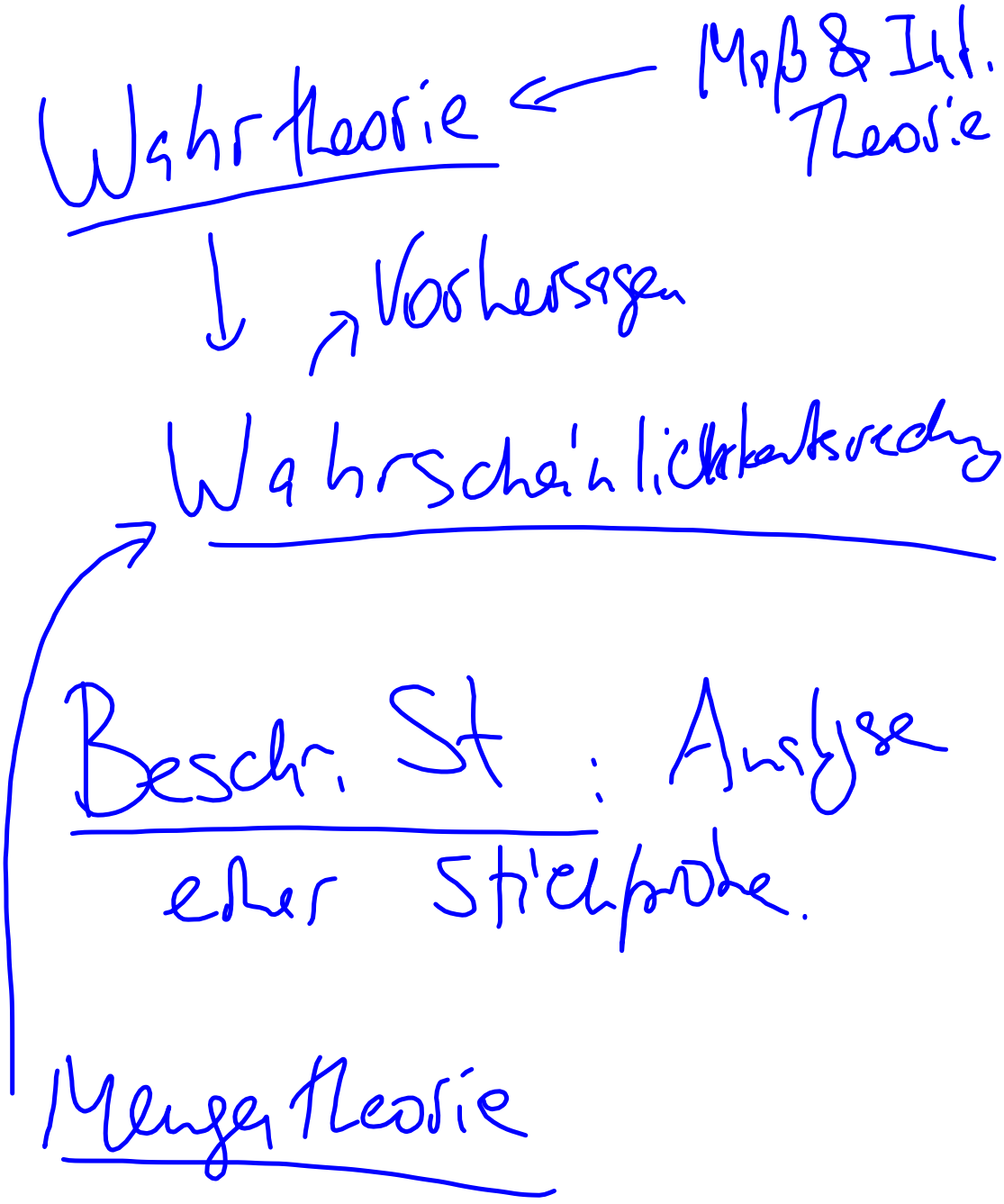

Wahrtheorie
Maß & Int. Theorie
Vorhersagen
Wahrscheinlichkeitsrechnung
Beschr. St: Analyse
einer Stichprobe.
Mengentheorie

Mengenlehre

Motivation:

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es üblich, Ereignisse als Mengendarzustellen.

Mengen werden angegeben, indem

- $A = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ Aufzählg
- $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$

Def. Eigenschaft

Bezeichnungen:

Menge: A, B, C

Elemente: a, b, x

$a \in A$ "a Element A"

$B \subset A$ B Teilmenge von A

$x \notin A$ x kein El. von A

$|A|$ Anzahl der Elemente von A

"Mächtigkeit von A"

Relationen zwischen Mengen:

$A = B \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\forall b \in B \Rightarrow b \in A)$

$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$

$A \subseteq B \Leftarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge$

$A \subset B \Rightarrow (\exists b \in B \Rightarrow b \notin A)$

$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{1,2\}$

$B \subset A \; ; \quad B \neq A$

Leere Menge $\emptyset = \{\}$ Leere Menge

$|\emptyset| = 0$ $\forall A : \emptyset \subset A$

$A \subseteq A$

Potenzmenge

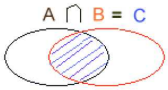
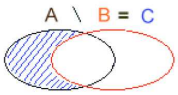
$A = \{1,2,3\}$ Menge aller Teilmengen

$\mathcal{P}(A) = 2^A = \{\emptyset, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$|A| = 3 \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$

Wenn A endlich.

Mengenoperationen

Operation	Operator	Bedeutung	Venn-Diagramm
Vereinigung	$A \cup B$	enthält alle Elemente, die in A oder B enthalten sind	
Durchschnitt	$A \cap B$	enthält alle Elemente, die in A und B enthalten sind	
Differenz	$A \setminus B$	enthält alle Elemente, die in A aber nicht in B enthalten sind	

$A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$

$A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$

$A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$

Bsp: $\{1,2,3\} = A$, $\{1,2,4\} = B$

$A \cup B = \{1,2,3,4\}$

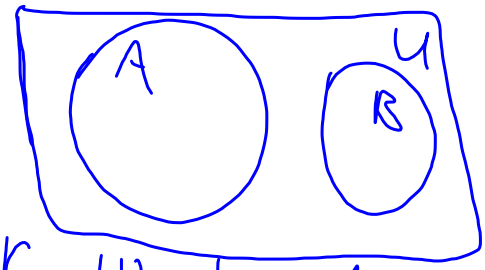
$A \cap B = \{1,2\}$

$A \setminus B = \{3\}$

Disjunkte Mengen:

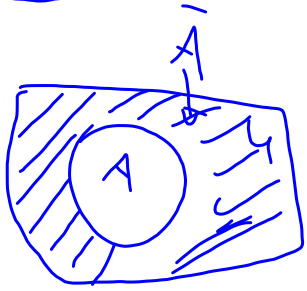
A und B sind disjunkt, wenn sie keine gem. El. haben

$A \cap B = \emptyset$



Komplement zu A:

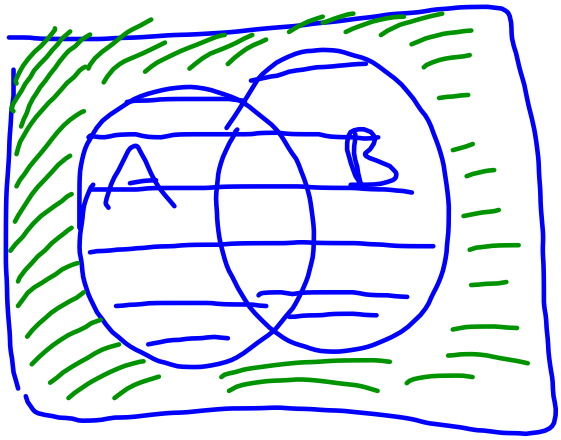
$\bar{A} = U \setminus A$

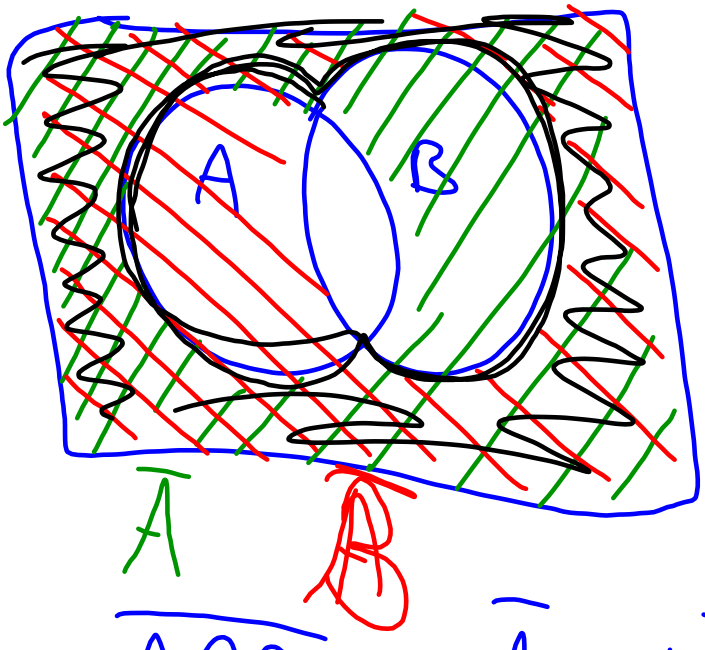


$$\overline{\emptyset} = U$$

$$(A \setminus B) \cup \overline{B} = \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$





$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Komplementärmenge:

$$\overline{A} = \{ a \in U \mid a \notin A \}$$

$$\overline{A}_B = \{ a \in B \mid a \notin A \}$$

$$\overline{A}_B = B \setminus A$$

Eigenschaften von Mengenoperationen

(1) de Morgan'sche Regel:

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

(2) $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \setminus B \neq B \setminus A$!

(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(5) $A \cup \bar{A} = \Omega$ (= U)

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

$A \cap A = A \cup A = A$

Aufgabe: Sei A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, B={2,4,6}, C={2,4,20,40}.
Berechnen Sie: $A \cap B$, B\A, C\A, $\overline{B}_A$, $\wp(B)$ und $|\wp(B)|$

$A \cap B = B = \{2,4,6\}$

$B \setminus A = \emptyset$

$C \setminus A = \{20, 40\}$

$\overline{B}_A = A \setminus B = \{1,3,5,7,8,9\}$

$|\mathcal{P}(B)| = 2^3$ $\quad |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

$\mathcal{P}(B) = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}, \emptyset\}$

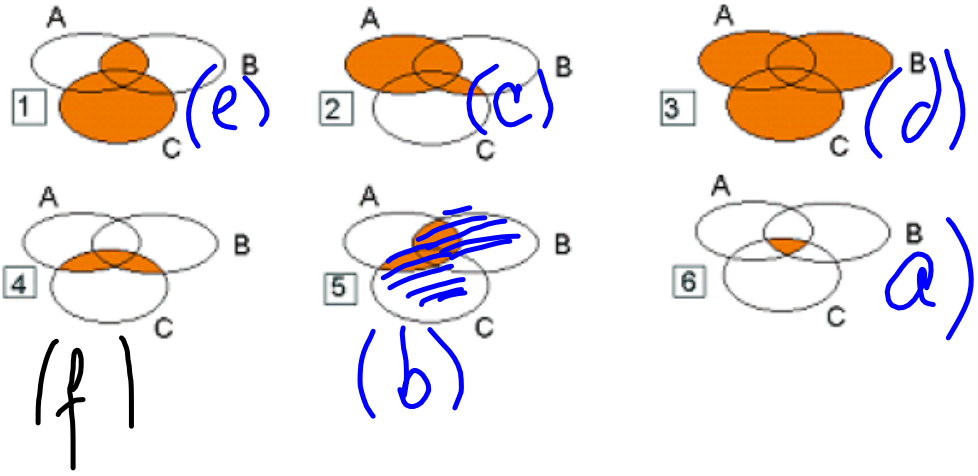
echte/eigentliche Teilmengen

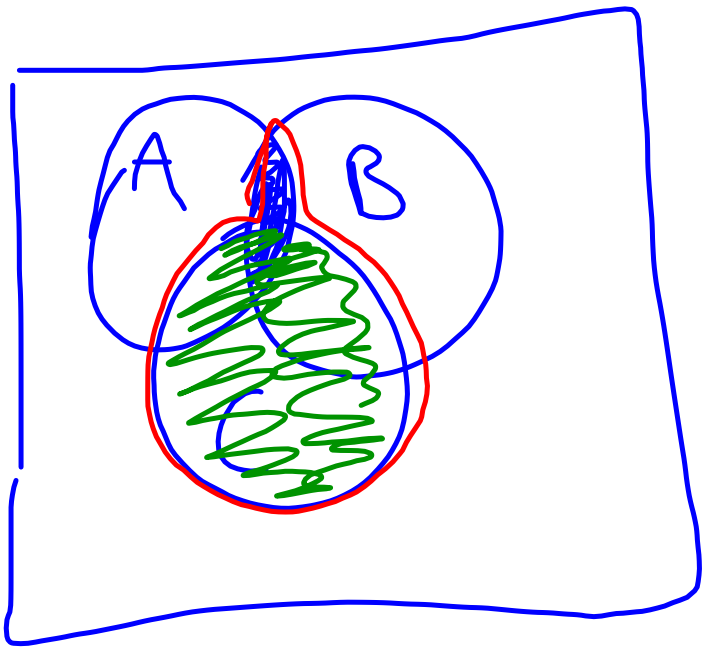
B, $\emptyset$ – uneigentliche Teilmengen

1.2 * Welches Bild gehört zu welcher Formel? Ordnen Sie zu!

a)$A\cap(B\cap C)$, b)$A\cap(B\cup C)$, c)$A\cup(B\cap C)$

d)$A\cup(B\cup C)$, e)$(A\cap B)\cup C$, f)$(A\cup B)\cap C$





1.3 Veranschaulichen Sie grafisch folgende Gleichheit im Venn-Diagramm:

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
2. $A = A \cap B) \cup (A \setminus B)$
3. $\overline{(A \cap B)}_M = \overline{A}_M \cup \overline{B}_M$
4. $A \setminus (A \setminus B) = (A \cap B)$

Zufälliger Versuch und zufällige Ereignisse

Zufälliger Versuch: V: V ist ein Versuch, der unter gleichen Bedingungen unendlich oft wiederholt werden kann. Menge aller möglichen Ausgänge ist bekannt. Ausgang bleibt vor dem Versuch ungewiss.

Grundmenge Ω: Ergebnismenge
Menge aller möglichen Ausgänge des Versuchs V.
$\Omega(V)$

Zufälliges Ereignis: eine Teilmenge von Ω.
Ein Ereignis mit einem Ausgang (1-malige Wiederholung) nennt man "Elementarereignis" ω (alle einelementige Teilmengen von Ω)

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
$\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{2\}$ Elementarer.

$A = \{1,2\}$ Ereignis

Komplementärereignis:

$\bar{A} = \Omega \setminus A \quad (= \{3,4,5,6\})$

Disjunkte Ereignisse:

Ereignisse, die nie gemeinsam vorkommen.

z.B. bei 1-maligem Würfeln: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ $(A \cap B = \emptyset)$

Sicheres Ereignis:

Ein Ereignis, das bei jedem Versuchsdurchgang eintritt:

"Die gewürfelte Zahl < 7"

Ω

Unmögliches Ereignis: kommt nie vor:

"Die gewürfelte Zahl $= 7$"

$\bar{\Omega} = \Omega \setminus \Omega = \emptyset$

Elementarereignisse:

1-El. Teilmenge von Ω

Zusammengesetzte Ereignisse:

Ereignisse, die mehr als 1 Element beinhalten

A = "Die gewürfelte Zahl ist gerade"

$A = \{2,4,6\}$

$B = \{1,3,5\}$ "ungerade"

$A \cap B = \emptyset$

A und B disjunkt

Verknüpfung von Ereignissen

$A \subseteq B$	Mit dem Ereignis A tritt auch das Ereignis B ein (A zieht B nach sich).
$A = B$	A zieht B nach sich und B zieht A nach sich.
$A \cup B$	A oder B oder beide Ereignisse treten ein. (Summe von Ereignissen)
$A \cap B$	A und B treten ein. (Produkt von Ereignissen)
$A \setminus B$	Das Ereignis A aber nicht das Ereignis B tritt ein.

A = "2 ist gewürfelt" $A \subseteq B$

B = "gerade Zahl" = {2, 4, 6}

C = "gerade Zahl ≤ 3"

A = C

D = "1 oder 3"

$A \cup D$ = "Zahl ≤ 3" = F = {1, 2, 3}

$F \cap B = A$

$F \setminus B$ = "1 oder 3"