Zufallsgrößen und ihre Verteilungen

<u>Def.:</u> Zufallsgrößen sind zufällige Merkmale, die in einem zufälligen Versuch beobachtet werden und deren Merkmalsausprägungen (Realisierungen) durch Zahlenwerte (direkt oder durch Skalierung) charakterisiert werden.

X – Zufallsgröße X

x – Realisierung, Beobachtung x

$\mathcal{X}$ – Wertebereich von X, $\mathcal{X} = \{a_1, \ldots, a_k, \ldots\}$ → diskret

$\exists [a, b] \subseteq \mathcal{X}$ → X stetig

Zum Beispiel:

Zufallsgröße	Merkmalswerte	Realisierung	Typ
X – Blutgruppe	A, B, AB, ∅	0, 1, 2, 3	diskret (nominal)
X – Anzahl der Wappen bei 2× Münzwurf	$\omega = (M_1, M_2)$ $M_i \in \{K, Z\}$	0, 1, 2	diskret (ordinal) (festgelegte Bedeutung der Zahlen)
	(K, K)	2	
	(K, Z)	1	
	(Z, K)	1	
	(Z, Z)	0	
T – zufällige Lebensdauer		$[0, \infty)$	stetig (proportional)

Uns interessieren folgende Wahrscheinlichkeiten:

1. $P(X = x)$ – Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Wert x annimmt
2. $P(a \leq X \leq b)$ – Wahrscheinlichkeit dafür, dass $X \in [a, b]$
3. $P(X \geq a)$, $P(X \leq a)$

Wahrscheinlichkeitsverteilung diskreter Zufallsgrößen

X – diskrete ZG

$\mathcal{X} = \{a_1, \ldots, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$

(1) Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X = a_i) = p_i$$

(2) $$P(a \le X \le b) = \sum_{a \le a_i \le b} p_i$$

(3) $$P(X \ge a) = \sum_{a \le a_i} p_i$$

Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$p_i = P(X = a_i)$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

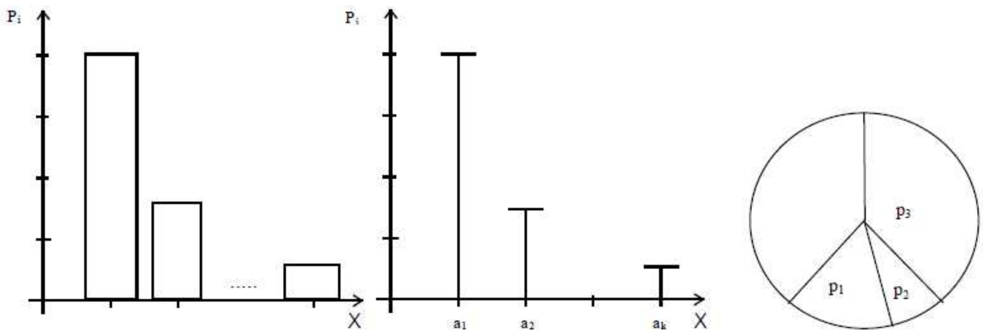
Gesamtheit alle

Einzelwahrscheinlichkeiten

der ZG X.

Darstellung:

grafisch:



tabellarisch:

X	a_1	a_2		a_k
p_i	p_1	p_2		p_k

analytisch als Funktion: $p_i = f(i, a_i)$

1mal Würfeln:

X	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Beispiel: Zufallsexperiment: Werfen zweier Münzen
X = "Anzahl Kopf"
Gesucht: Wahrscheinlichkeitsverteilung von X

$$\Omega = \{(K,K), (K,Z), (Z,K), (Z,Z)\}$$

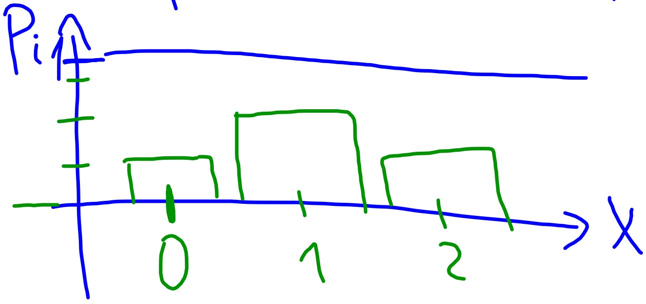
$$X = \{2, 1, 0\} = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = 1/4$$

$$P(X=1) = 2/4 \qquad P(X=2) = \frac{1}{4}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

X	0	1	2
p_i	1/4	2/4	1/4



Beispiel: Versuch: Würfeln mit 2 Würfeln
X – Summe der Augenzahlen
ges.: Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

X	2	3	4	...	12
$\mathbf{p_i}$	p_2	p_3	p_4	...	p_{12}

$$p_i = P(X = i)\,, \quad i = 2,\ldots,12$$

i	ω mit $X(\omega) = i$	$\lvert A \rvert$	p_i Wahrscheinlichkeits-verteilung von X	$\lvert\Omega\rvert = 6^2 = 36$
2	(1,1)	1	$\frac{1}{36}$	$\omega = (w_1, w_2)$
3	(1,2) (2,1)	2	$\frac{2}{36}$	$w_i \in \{1,\ldots,6\}$
4	(1,2) (2,2) (3,1)	3	$\frac{3}{36}$	$X(\omega) = w_1 + w_2$
5	(1,4) (3,2) (2,3) (4,1)	4	$\frac{4}{36}$	
6	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	5	$\frac{5}{36}$	$\lvert\Omega\rvert = 36$
7	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	6	$\frac{6}{36}$	
8	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	5	$\frac{5}{36}$	
9	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	4	$\frac{4}{36}$	
10	(4,6) (5,5) (6,4)	3	$\frac{3}{36}$	
11	(5,6) (6,5)	2	$\frac{2}{36}$	
12	(6,6)	1	$\frac{1}{36}$	

<u>allgemein:</u>

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{(i-1)}{36} & i = 2,3,\ldots,7 \\ \dfrac{(13-i)}{36} & i = 8,9,\ldots,12 \end{cases}$$

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 3 maligem Würfeln
mindestens 2 Sechsen zu würfeln?

Parameter diskreter Verteilungen

Erwartungswert, Varianz und Verteilungsfunktion

deskriptive Statistik	Wahrscheinlichkeitsrechnung
rel. Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit

$$h_n(a_i) \xrightarrow{n\to\infty} p_i$$

"Erwartungswert" der rel. Häufigkeit $n\to\infty$

Erwartungswert der ZG X:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot p_i$$

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i\cdot H_n(a_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k} a_i\, h_n(a_i) \xrightarrow{n\to\infty} EX=$$

Streuung

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(a_i-\bar{x})^2 H_n(a_i)=$$

$$=\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(a_i-\bar{x})^2\frac{H_n(a_i)}{n}=$$

$$=\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(a_i-\bar{x})^2 h_n(a_i) \xrightarrow{n\to\infty}$$

Varianz von (ZG) X

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{k}(a_i-EX)^2 p_i$$

Empirische Verteilungsfunktion

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \sum_{a_i \leq x} h_n(a_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(X) = \sum_{a_i \leq x} p_i = P(X \leq x)$$

Def.: Sei X diskret, $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ und sei $p_i = P(X = a_i)$, $i = 1,2,\ldots$

Dann heißt:

$$EX := \sum_{i=1}^{\infty} a_i p_i \text{ - Erwartungswert von X}$$

$$\text{Var (X)} := \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - EX)^2 \cdot p_i \text{ - Varianz von X}$$

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ - Verteilungsfunktion von X}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum a_i^2 \cdot p_i$$

Beispiel: Werfen mit 2 Würfeln,

Einsatz: 1€

Gewinn: 10€ - Augensumme = 12

5€ - Augensumme = 6

1€ - Augensumme = 2

0€ sonst

Würden Sie dieses Spiel spielen?

Wahrscheinlichkeitsverteilungstabelle (s. oben):

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Y = "Gewinn"

$\{y\} = \{0, 1, 5, 10\}$

p_{i_y} =	$\frac{29}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$EY = \sum_{i=1}^{4} y_i \cdot p_i =$$

$$= 0 \cdot \frac{29}{36} + 1 \cdot \frac{1}{36} + 5 \cdot \frac{5}{36} + 10 \cdot \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{36}{36} = 1€$$

b) $Var(Y) - ?$

$$Var\, Y = E(Y^2) - (EY)^2$$

$$E(y^2) = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 \cdot p_i =$$

$$= 0^2 \cdot \frac{28}{36} + 1^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 10^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{226}{36}$$

$$Var\, Y = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{226}{36} - \left(\frac{36}{36}\right)^2 = \frac{226}{36} - 1 = \frac{190}{36}$$

Standardabweichung: $\sqrt{Var\, Y}$

$$\sqrt{Var\, Y} = \sqrt{\frac{190}{36}} \approx 2{,}3$$

Quantile diskreter Verteilungen

Def.: Sei X diskret, $X = \{a_1, \dots, a_k, \dots\}$ und sei $p_i = P(X = a_i)$, $i = 1,2,\dots,k,\dots$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und sei $F(x) = P(X \le x) = \sum_{a_i \le x} p_i$ die Verteilungsfunktion von X. Dann heißt x_α mit $F(x_\alpha) \le \alpha < F(x_\alpha + \varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 0$, *$\alpha$-Quantil der Verteilung X.*

Spezielle diskrete Verteilungen

Zweipunktverteilung

$X =$

$p_1 = P(X = a_1) =$

$p_2 = P(X = a_2) =$

Wahrscheinlichkeits-verteilung		
i	a_1	a_2
P(X=i)		

Def: Eine Zufallsgröße X, deren Wertebereich nur zwei Werte a_1, a_2 umfaßt, heißt *zweipunktverteilt.*

Schreibweise: $X = \{$

Def: Eine zweipunktverteilte Zufallsgröße mit dem Wertebereich $X = \{0,1\}$ heißt ***Bernoulli-Variable***.

$$X = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad A \quad \text{nicht eintritt} \quad (\text{Misserfolg}) \\ 1 & \text{falls} \quad A \quad \text{eintritt} \quad (\text{Erfolg}) \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeits-verteilung		
i	0	1
P(X=i)	1-p	p

p = P(X=1) heißt

Für eine Bernoulli-Variable gilt

$EX =$

$Var(X) =$

Beispiel:

$X =$

$X = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$EX =$

$\mathrm{Var}(X) =$

Binomialverteilung

Beispiel 38: Ich würfele 3 mal unabhängig voneinander. Sei X die zufällige Anzahl der gewürfelten Sechsen.
Gesucht: Verteilung von X

Sei w_i - Würfelergebnis von Wurf i, i=1,2,3

Definition: Wir gehen von einem zweipunktverteilten Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p aus. X sei die Anzahl der Erfolge bei n maliger stochastisch unabhängiger Wiederholung des zweipunktverteilten Versuchs . X hat dann den Wertebereich $=\{0,1,\ldots,n\}$ und besitzt die folgende als Binomialverteilung mit den Parametern n und p bezeichnete Verteilung:

Bezeichnung:

Typisches Versuchsschema bei der Binomialverteilung: (Bernoulli'sches Versuchsschema)

Ich wiederhole n mal unabhängig voneinander einen zweipunktverteilten Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p:

$$X_i = \begin{cases} 1 & p & \text{Erfolg} \\ 0 & (1-p) & \text{Mißerfolg} \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,n$$

$\Rightarrow$ X-Anzahl der Erfolge (der "1") bei diesen n Wiederholungen $\rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Dann gilt: $X \sim B(n,p)$

Beispiel 39: Ich würfele 3 mal, X – zufällige Anzahl der 6 en,

$$X_i = \begin{cases} & \\ & \end{cases}$$

$\rightarrow p =$ $n =$

$\rightarrow X \sim$

Beispiel: In einer Mathematik-Klausur werden 6 Aufgaben zu je drei Antwortalternativen gestellt, von denen jeweils nur eine richtig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Student mehr als 4 Aufgaben nur durch Raten richtig beantwortet (und damit unverdient eine 1 bekommt)?

Berechnung von EX und Var(X) der Binomialverteilung:

Es gilt: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei $X_i \sim \begin{cases} 0 & (1-p) \\ 1 & p \end{cases}$, i = 1,...,n.

$EX =$

$\mathrm{Var}(X) =$

Satz : Sei X~B(n,p). Dann gilt:
EX = und Var(X) =

Beispiel 42: Die Wahrscheinlichkeit bei einer U-Bahn-Fahrt kontrolliert zu werden beträgt 10 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, innerhalb von 20 Fahrten

a) höchstens 3x

b) mehr als 3x

c) weniger als 3x

d) genau 3x

e) mindestens 3x

f) mehr als 1x und weniger als 4x

kontrolliert zuwerden?

Geometrische Verteilung

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n maligem Würfeln beim 1. Wurf (2. Wurf, 3. Wurf, ... k.Wurf) die erste Sechs zu würfeln?

Definition:

Wir gehen von einem zweipunktverteilten Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p aus. X sei die Anzahl der Versuche, bis zum ersten Mal ein Erfolg eintritt bei n-maliger stochastisch unabhängiger Wiederholungen des zweipunktverteilten Versuchs.
X besitzt dann die folgende, als Geometrische Verteilung mit dem Parameter p bezeichnete Verteilung:

Berechnung von E(X) und Var(X) für die geometrische Verteilung

$EX =$

$\mathrm{Var}(X) =$

Poissonverteilung

Sei $X \sim B(n,p)$

Wenn n sehr groß, p sehr klein, dann führt die Berechnung von $p_i = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$

manchmal zu "numerischen" Problemen.

Satz: Es gilt:

$$\lim_{\substack{p \to 0 \\ n \to \infty \\ n \cdot p = \lambda = \text{konst.}}} \binom{n}{i} \cdot p_0^i \cdot (1-p)^{n-i} = \frac{(\lambda)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$$ (ohne Beweis!)

Für $n \geq 20$, $p \leq 0{,}01$ ist die Approximation:

$\binom{n}{i} \cdot p^i (1-p)^{n-i} \approx \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$ mit $\lambda = n \cdot p$ ausreichend gut.

Beispiel 43: 1000 Sandkörner, von einer Sorte keimen in der Regel 1 % nicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von diesen 1000 Körnern mehr als 4 nicht keimen?

Lösung:

Bemerkung: Bei einer B(n, p) - verteilten Zufallsgröße X gilt:

$EX = n \cdot p = \lambda$ $\qquad$ $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

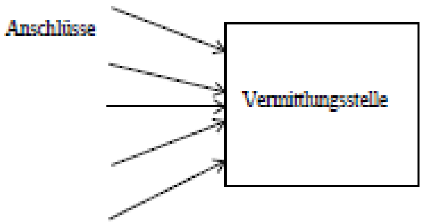
Es gibt oft Situationen, in denen n und p unbekannt sind, aber $n \cdot p = \lambda$ bekannt ist.
In diesen Situationen könne wir die Wahrscheinlichkeiten

$p_i = P(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$ nicht berechnen, aber die diese

approximierende Größe $\frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}$!

Beispiel 44: In einer Vermittlungsstelle gehen im Schnitt 5 Anrufe pro µs ein. Maximal schafft die Vermittlungsstelle 10 Anrufe pro µs.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kapazität der Vermittlungsstelle überschritten wird?

(Merke: ***Anzahl*** ist hier immer binomialverteilt!)



Def.: X sei eine Zufallsgröße mit dem Wertebereich $X = \{0,1,2,\ldots\} = \mathbb{N}_0$. Dann heißt X *poisson-verteilt mit dem Parameter* $\boldsymbol{\lambda}$, falls gilt:

Bezeichnung:

Typische Anwendungen der Poissonverteilung:

- X – Anzahl eintreffender Signale in einer Empfängerstation pro Zeiteinheit
- X – Anzahl eintreffender Kunden in einer Verkaufseinrichtung pro Zeiteinheit
- X – Anzahl eintreffender Autos an einer Kreuzung pro Zeiteinheit

<u>Berechnung von EX und Var(X)</u>

$EX =$

$\mathrm{Var}(X) =$

Satz: Sei $X \sim P(\lambda)$. Dann gilt: EX = Var(X) =

<u>**Beispiel 45:**</u> Die mittlere Anzahl eintreffender Kunden bei Aldi sei 5 pro 10 Minuten (½ Kunde pro Minute). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß innerhalb von 10 Minuten genau 1 Kunde eintrifft?

Lösung:

Diskrete Gleichverteilung

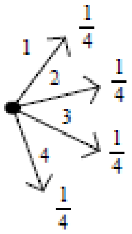
Def.: Eine diskrete Zufallsgröße X mit endlichem Wertebereich $X = \{a_1, \ldots, a_k\}$ heißt *gleichverteilt* auf X, falls gilt: $P(X = a_i) =$ für alle i=1,2,...,k.

Bezeichnung:

Beispiele: a) Würfeln, $a_i = i$, $i = 1,\ldots,6$, $p_i = \frac{1}{6}$

b) Simulation:

gleichwahrscheinlich: Routing



Berechnung von EX und Var(X)

$EX =$

$\mathrm{Var}(X) =$