Verbundwahrscheinlichkeiten

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad P(A\cap B) = \frac{|A\cap B|}{|\Omega|} \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|}$$

$$\underline{\underline{P(A\cap B)}} = P(A|B)\cdot P(B)$$

Multiplikationssatz:
Sei V ein zufälliger Versuch mit der Grundmenge Ω und dem Ereignisfeld $\mathcal{E}$. Seien $A_i \in \varepsilon$ beliebige Ereignisse.
Dann gilt:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap \ldots \cap A_n) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot$$
$$\cdot P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3)\cdot \ldots\ldots$$
$$\ldots\cdot P(A_n|A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_{n-1})$$

<u>n = 2</u> :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 | A_2) \cdot P(A_2)$$

$$A_2 \cap A_1 = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$$

<u>n = 3</u>

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= P(A_1 \cap (A_2 \cap A_3)) =$$

$$= P(A_2 \cap A_3) \cdot P(A_1 | A_2 \cap A_3)$$

$$= P(A_2 | A_3) \cdot P(A_3) \cdot P(A_1 | A_2 \cap A_3)$$

<u>Bew.:</u> <u>Vollst. Induktion</u>

<u>IA</u>: <u>n = 2</u> : $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_1 | A_2)$

(Def. der bed. WS)

IV: $\exists n \in \mathbb{N}$:

Satz gilt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

IS: $n \rightarrow n+1$

$$P(\boxed{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} \cap A_{n+1}) =$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \cdot$$

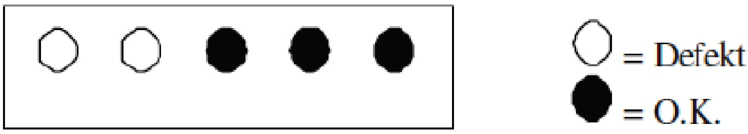
$$\cdot P(A_{n+1} | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$\overset{IV}{=} P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

$$\cdot P(A_{n+1} | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n)$$

q.e.d.

Beispiel 1: (Statistische Qualitätskontrolle)



In einem Los von 5 Teilen befinden sich zwei defekte Teile. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim dreimaligen hintereinander Herausnehmen und Prüfen eines Teiles beide defekte Teile zu ziehen?

d_i = "defektes Teil in i-ter Ziehung"

$$P\left[(d_1 \cap d_2 \cap \bar{d}_3) \cup (d_1 \cap \bar{d}_2 \cap d_3) \cup (\bar{d}_1 \cap d_2 \cap d_3)\right]$$

disjunkt

$$= P(d_1 \cap d_2 \cap \bar{d}_3) + P(d_1 \cap \bar{d}_2 \cap d_3) + P(\bar{d}_1 \cap d_2 \cap d_3)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \rightleftarrows 30\%$$

$$P(d_1 \cap d_2 \cap \bar{d}_3) =$$

$$= P(d_1) \cdot P(d_2 \mid d_1) \cdot P(\bar{d}_3 \mid d_1 \cap d_2) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(d_1 \cap \bar{d}_2 \cap d_3) =$$

$$= P(d_1) \cdot P(\bar{d}_2 \mid d_1) \cdot P(d_3 \mid d_1 \cap \bar{d}_2) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

$$P(\bar{d}_1 \cap d_2 \cap d_3) =$$

$$= P(\bar{d}_1) \cdot P(d_2 \mid \bar{d}_1) \cdot P(d_3 \mid \bar{d}_1 \cap d_2)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

Bsp 2:

32 Karten; gemischt;

"es wird eine Karte gezogen"; 3 Spieler

P(Jeder zieht Pik-Karte)?

8 Pik-Karten;
Insg. 32 Karten

$$P(P_1) = \frac{8}{32}$$

$$P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) =$$

$$= P(P_1) \cdot P(P_2 | P_1) \cdot$$

$$\cdot P(P_3 | P_1 \cap P_2) =$$

$$P(P_2 | P_1) = 7/31$$

$$P(P_3 | P_1 \cap P_2) = 6/30$$

$$= \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30} =$$

$$= \frac{7}{31 \cdot 20} = \frac{7}{620}$$

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Wenn Zusatzinformation / Bedingung B die Chance für Eintreten von A nicht verändert, so nennt man A und B stochastisch unabhängig

Definition
Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, falls gilt:

$$P(A|B) = P(A)$$

Folgerung: Seien A und B stochastisch unabhängig, dann gelten folgende Beziehungen:

$$\underbrace{P(A|B)}_{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\boxed{(1)\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

wenn A und B stochastisch unabhängig.

(2) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A \mid \bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

(3) $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$

(4) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$

Beispiel 16: Zwei Studenten versuchen unabhängig voneinander die gleiche Statistik-Aufgabe zu lösen. Jeder löst die Aufgabe mit Wahrscheinlichkeit 0,6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens einer der beiden die Augabe löst?

$P(S_1)=0{,}6$ $S_1 =$ "Student 1 löst die Aufgabe"

$P(S_2)=0{,}6$ $S_2 =$ "Student 2 löst die Aufgabe"

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - \underline{P(S_1 \cap S_2)}$$

$$= P(S_1) + P(S_2) - P(S_1) \cdot P(S_2) =$$

$$= 0{,}6 + 0{,}6 - 0{,}36 = 0{,}84 \Rightarrow 84\%$$

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

Definition
Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, falls gilt:

Folgerung: Seien A und B stochastisch unabhängig, dann gelten folgende Beziehungen:

Definition:
n Ereignisse $A_1, A_2, \cdots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig, falls für jede beliebige Teilauswahl $A_{1*}, A_{2*}, \cdots, A_{k*}$ von k Ereignissen aus diesen n gilt:

$$P(A_{1*} \cap A_{2*} \cap \cdots \cap A_{k*}) = P(A_{1*})P(A_{2*}) \cdot \cdots \cdot P(A_{k*})$$

Statistik-Klausur, 10 Aufgaben

Jede Aufgabe hat 3 Antwortalternativen, von denen genau eine richtig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Student, der rät, alle Aufgaben richtig löst?

Aufgaben sind unabhängig voneinander:

A_i = "die i-te Aufgabe ist richtig gelöst"

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10}) =$$

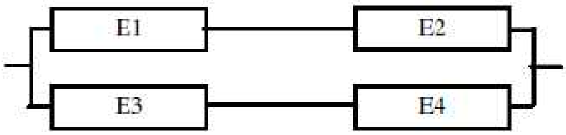
$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_{10}) = \frac{1}{3^{10}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

Beispiel 1: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Beobachter in einem gewissen Zeitraum ein Signal auf einem Bildschirm übersieht, sei 0,2 und bei allen Beobachtern gleich. Wie viele unabhängig voneinander arbeitende Beobachter
benötigt man, wenn insgesamt die Wahrscheinlichkeit dass ein Signal übersehen wird (Ereignis A), nicht größer als 0,01 sein soll?

Beispiel 2:

Wir wollen von der Ausfallhäufigkeit q des Geräts G auf Ausfallhäufigkeit einer bestimmten Baugruppe E_i (Bauelement) schließen.

Gegeben sei ein Gerät



Seien folgende Ereignisse definiert :

G - Gerät ist OK, $\overline{G}$ -Gerät ist nicht OK,
E_i - Bauelement E_i ist OK, $\overline{E}_i$ - Bauelement Ei ist nicht OK.

Wir vereinfachen dazu unser Modell und treffen folgende Annahmen:

1. Alle Bauelemente sind identisch

2. Alle Bauelemente fallen unabhängig voneinander und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p aus: $P(\overline{E}_i)=p$, i=1,2,3,4.

3. Funktionsweise des Gerätes : Reihe funktioniert, falls beide Baugruppen funktionieren, Gerät funktioniert, falls eine Reihe funktioniert.

   a) Gegeben ist nun $q=P(\overline{G})$. Gesucht ist p.

   b) Wie groß darf die Ausfallwahrscheinlichkeit p eines Bauelenmentes höchstens sein, damit die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gerätes q 10 % nicht überschreitet?

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Formel von Bayes

Vollständiges Ereignissystem:

Sei V ein zufälliger Versuch mit der Grundmenge Ω und dem Ereignisfeld $\mathcal{E}$. Eine Menge von Ereignissen heißt vollständiges Ereignissystem in $\mathcal{E}$, falls gilt:

a) $A_i \cap A_j = \emptyset$ A_i, $i \neq j$

b) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

(4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Wenn $A_i \cap A_j = \emptyset$

z. B. Beim Würfeln:

$\{1, 3, 5\} = A_1$

$\{2, 4, 6\} = A_2$

$\{1, 2, 3\} = A_1$

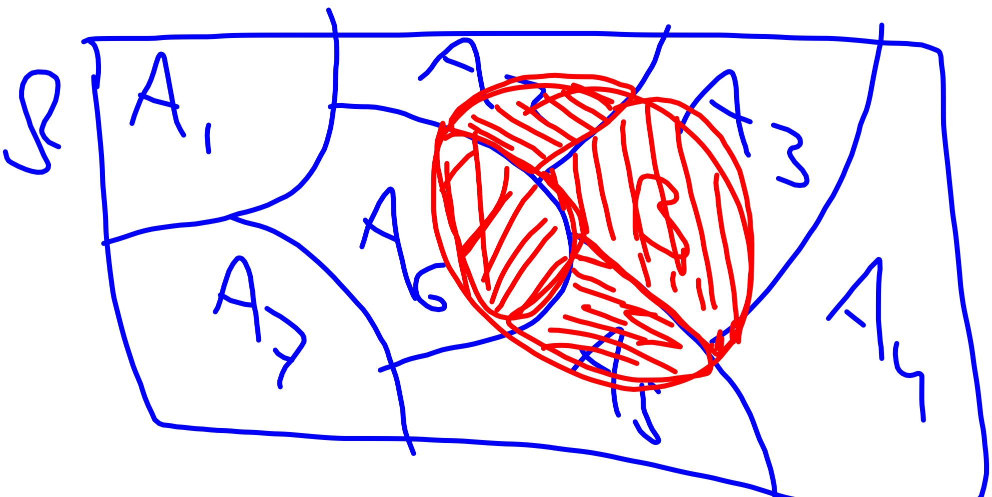
$\{4, 6\} = A_2$

$\{5\} = A_3$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:
Sei V ein zufälliger Versuch mit der Grundmenge Ω und dem Ereignisfeld $\mathcal{E}$. Sei B ein beliebiges Ereignis zu V und $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein vollständiges Ereignissystem.
Dann gilt:

$$P(B) = P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + P(B|A_3)\cdot P(A_3) + \ldots + P(B|A_n)\cdot P(A_n)$$



Bsp. Ein Produkt wird von 3 versch. Maschinen hergestellt.
Maschine 1 produziert die Hälfte, Maschine 2 und 3 jeweils 1/4 der Gesamtproduktion.
Außerdem ist bekannt, dass von Maschine 1 1% aller fehlerhaften Teile stammen, von Maschine 2 2% und von Maschine 3 3%.

a) Wie groß ist der Anteil der fehlerhaften Teile an der Gesamtproduktion?

M_i = "Hergestellt von Maschine i"

$P(M_1) = \frac{1}{2}$; $P(M_2) = \frac{1}{4}$; $P(M_3) = \frac{1}{4}$

$M_i \cap M_j = \emptyset$ disjunkt

$G = M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_3$ - Gesamtproduktion

M_1, M_2, M_3 vollst. ES.

F = "Teil fehlerhaft"

$P(F|M_1) = 1\% = 0{,}01$

$P(F|M_2) = 2\% = 0{,}02$

$P(F|M_3) = 0{,}03$

$$P(F) = P(F|M_1)\cdot P(M_1) +$$
$$+ P(F|M_2)\cdot P(M_2) +$$
$$+ P(F|M_3)\cdot P(M_3) =$$

$$= 0{,}01 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}02 \cdot \frac{1}{4} +$$
$$+ 0{,}03 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}0175 =$$
$$= 1{,}75\%$$

b) Ich habe ein defektes Teil entdeckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses von Maschine 1 produziert wurde?

Formel von Bayes

gegeben: P(A) und P(B|A)

gesucht: P(A|B)

Verallgemeinerung

Aufgabe

Eine Krankheit kommt bei ca. 5% der Bevölkerung vor. Ein Test zur Erkennung der Krankheit führt bei 99% der Kranken zu einer Reaktion, aber auch bei 2% der Gesunden.

1. *In wieviel Prozent aller Fälle tritt bei dem Test eine Reaktion ein?*
2. *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, bei der die Reaktion eintritt, die Krankheit wirklich hat?*

Aufgabe

In Saarbrücken wird im Mittel zu 10% Schwarzgefahren. 70% der Schwarzfahrer haben keine Fahrkarte, während die anderen 30% gefälschte oder illegal besorgte Karten besitzen. Von den ehrlichen Fahrgästen haben im Mittel 5% ihre Fahrkarte vergessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein kontrollierter Fahrgast, der keine Karte vorzeigen kann, ein Schwarzfahrer?

Aufgabe

50 % einer bestimmten Population seien Frauen, 30 % Männer, 20 % Kinder.
5 % der Männer, 1 % der Frauen und 0,5 % der Kinder seien zuckerkrank.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine zufällig ausgewählte Person zuckerkrank ist?
b) Sind die Ereignisse "Die Person ist zuckerkrank" und "Die Person ist weiblich" stochastisch unabhängig voneinander?
c) Eine zufällig ausgewählte Person ist zuckerkrank. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Person ein Mann?
(Hinweis: Satz von Bayes, Formel der totalen Wahrscheinlichkeit)

Zufallsgrößen und ihre Verteilungen

Def.: Zufallsgrößen sind zufällige Merkmale, die in einem zufälligen Versuch beobachtet werden und deren Merkmals-ausprägungen (Realisierungen) durch Zahlenwerte (direkt oder durch Skalierung) charakterisiert werden.