Bsp zur Inversen FT

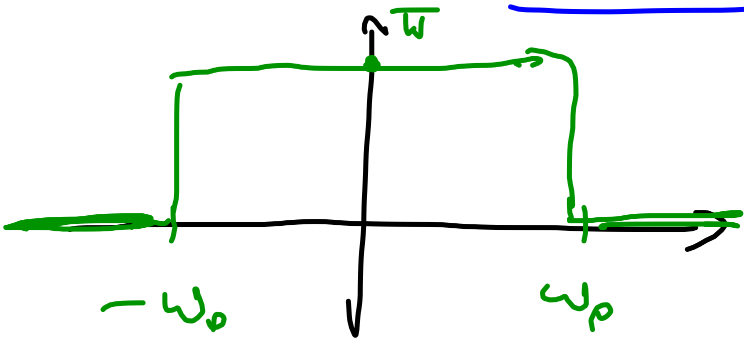
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

F-Transformierte

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

FI ist die inverse FT

Bsp!



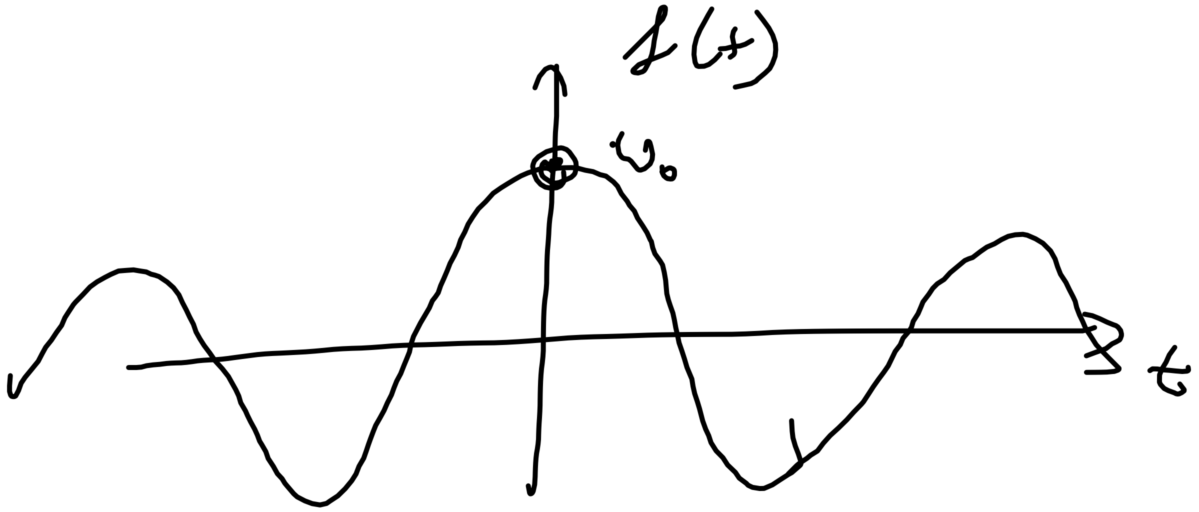
$$F(\omega) = \begin{cases} \pi & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \pi\, e^{j\omega t}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2} \left. \frac{e^{j\omega t}}{jt} \right|_{\omega=-\omega_0}^{\omega_0} =$$

$$= \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2jt} = \underline{\underline{\omega_0 \operatorname{sinc}(\omega_0 t)}}$$


f(t)
ω_0
t

Die Eigenschaften von FI (FT)

(1) Satz 1 (Wiederholung):

Ist $f(t)$ absolut integrierbar (d.h. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty$),

so gilt:

$$|F(\omega)| < \infty \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(Also: die Fourier-Transformation existiert)

(2) <u>Satz 2</u> (<u>Symmetrie-Eigenschaften der Spektralfunktion</u>):

Es gilt:

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

d.h.

$$|F(\omega)| = |F^*(\omega)| = |F(-\omega)|$$

<u>I.a.W.</u>: Amplitudenspektrum ist achsensymmetrisch (gerade Funktion)

Folgerungen!

1) $\mathrm{Re}\,(F(\omega)) = \mathrm{Re}\,(F(-\omega))$

2) $\mathrm{Im}\,(F(\omega)) = -\mathrm{Im}\,(F(-\omega))$

3) $F^*(\omega) = \mathrm{Re}(F(\omega)) - j\,\mathrm{Im}\,(F(\omega))$

$+$ $F(\omega) = \mathrm{Re}\,F(\omega) + j\,\mathrm{Im}\,F(\omega)$

$$\mathrm{Re}\,F(\omega) = \frac{F^*(\omega) + F(\omega)}{2} =$$

$$= \frac{F(\omega) + F(-\omega)}{2} \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im} F(\omega) = \frac{F(\omega) - F(-\omega)}{2j} \quad \in \mathbb{R}$$

Analog zur FR gibt es reelle Darstellung der Fourier-Transformierte mit $\operatorname{Re}(F(\omega)) = \frac{F(\omega) + F(-\omega)}{2}$ als "Cos-Anteil" und

$\operatorname{Im}(F(\omega)) = \frac{F(\omega) - F(-\omega)}{2j}$ als "sin-Anteil"

(3) Satz 3 (Verschiebungssatz)

Sei $f(t) \circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$

(Schreibweise für: "$F(\omega)$ ist die Spektralfunktion von $f(t)$", oder "$F(\omega)$ ist die Fourier-Transformierte von $f(t)$"). Dann gilt:

$$g(t) = f(t-a)$$

$$\circ$$
$$|$$
$$\bullet$$

$$G(\omega) = e^{-j\omega a} \cdot F(\omega)$$

Beweis: Wir berechnen

$G(\omega)$:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

Substitution:

$u = t - a$; $\quad dt = du$

$t \to -\infty \iff u \to -\infty$

$t \to +\infty \iff u \to +\infty$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{u=-\infty}^{u=+\infty} f(u)\, e^{-j\omega(u+a)}\, du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-j\omega u} \cdot e^{-j\omega a}\, du$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}}\, e^{-j\omega a} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-j\omega u}\, du =}$$

$$F(\omega)$$

$$= e^{-j\omega a} \cdot F(\omega) = G(\omega),$$

q. e. d.

<u>Satz 4:</u> <u>(Linearitätssatz)</u>:

$$f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_1(\omega)$$

$$f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F_2(\omega)$$

Dann gilt:

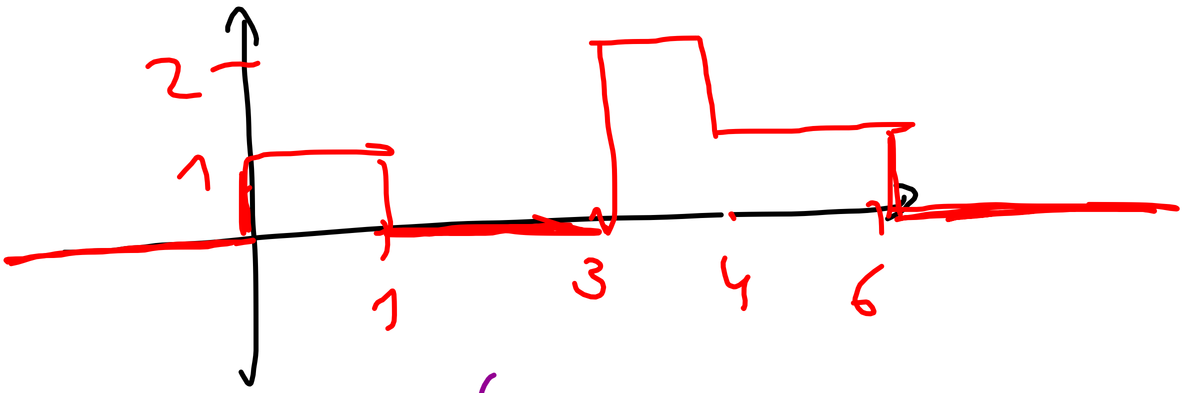
$$g(t) = \lambda \cdot f_1(t) + \mu \cdot f_2(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$G(\omega) = \lambda \cdot F_1(\omega) + \mu \cdot F_2(\omega)$$

(Bew.: Eigenschaften (Linearität) des Integrals)

Bsp: Geg. $f(t)$:



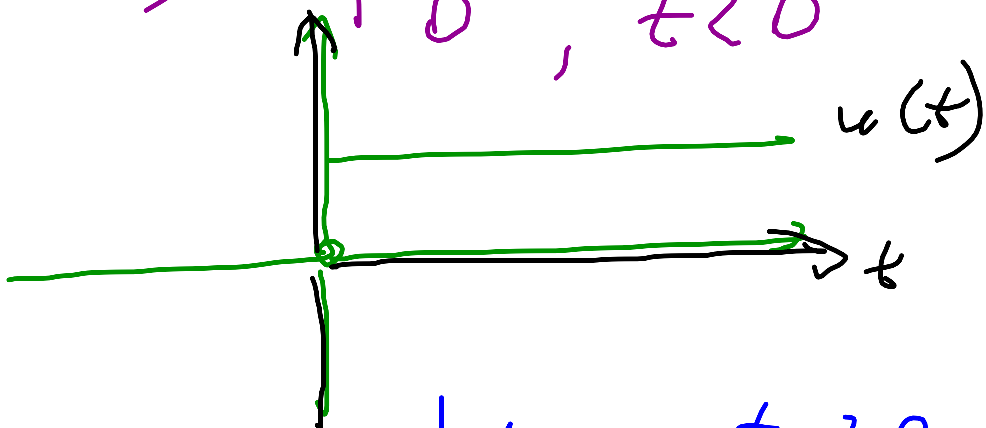
$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & 3 \leq t \leq 4 \\ 1 & 4 < t \leq 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Methode 1: Wie bisher:

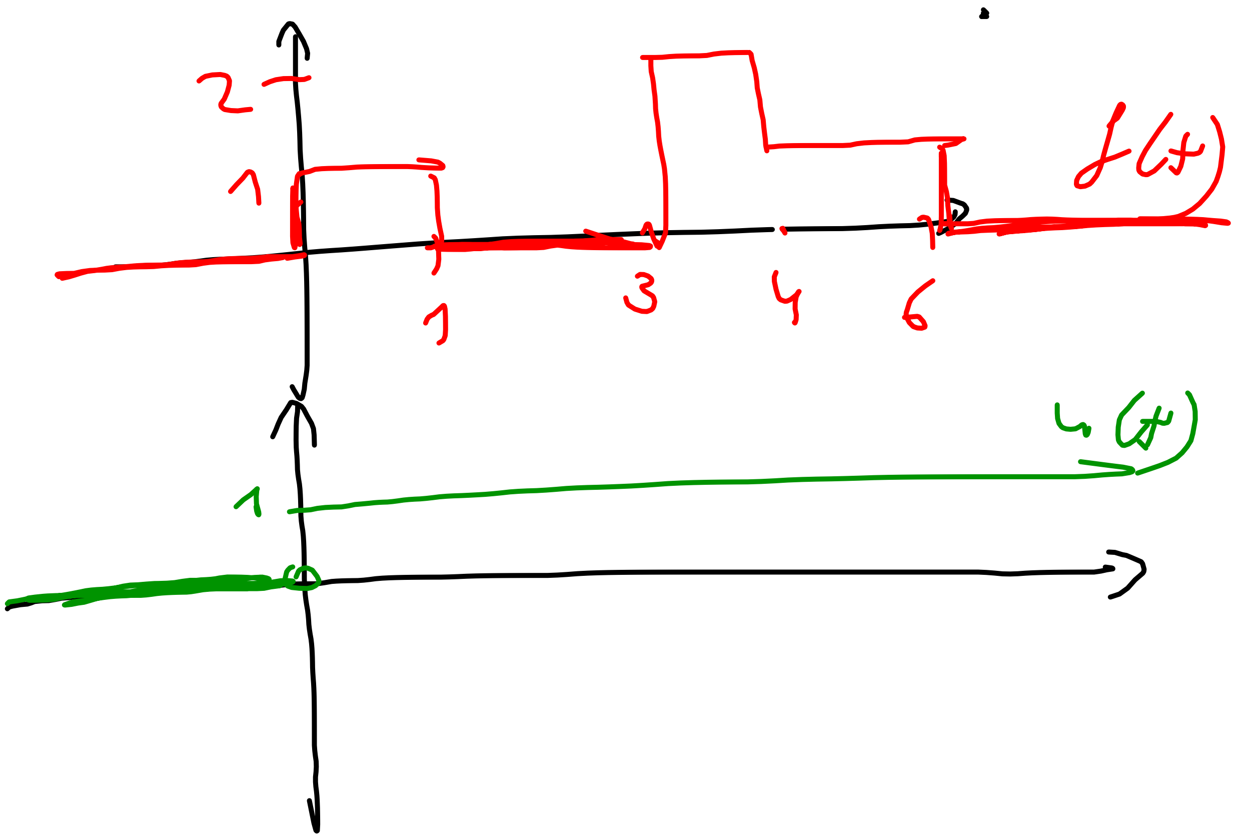
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \ldots\ldots$$

Methode 2: Wir stellen $f(t)$ mit der Heaviside-Funkt $u(t)$ dar:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



$$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$$



$$f(t) = u(t) - u(t-1) + 2 \cdot u(t-3) - u(t-4) - u(t-6).$$

Ist $U(\omega)$ FT von $u(t)$,

so ist:

Linearitätssatz + Verschiebungssatz

$$F(\omega) = U(\omega) -$$

$$- e^{-j\omega \cdot 1} U(\omega) +$$

$$+ 2 e^{-3j\omega} U(\omega) -$$

$$- e^{-4j\omega} U(\omega) -$$

$$- e^{-6j\omega} U(\omega) =$$

$$= \left(1 - e^{-j\omega} + 2e^{-3j\omega} - e^{-4j\omega} - e^{-6j\omega}\right) \cdot U(\omega).$$

Wir brauchen nur noch

$U(\omega)$!

(wird später <u>nur einmal</u> berechnet!)