1.4. Anwendungen der komplexen Zahlen

Op	WF	EF	TF
$\pm$	X	—	—
$*$	X	X	—
$\div$	X	X	—
$\sqrt[n]{\ }$	—	X	X
$\ln$	~	X	~
...	...	...	..

Wurzelziehen in der TF:

Aus der Berechnung der Wurzeln von Grade n in EF:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)},$$

wobei $\varphi = \operatorname{Arg} z$

und $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$

(wegen 2π-Periodizität)

d.h.

$$\left| \sqrt[n]{z} \right| = \sqrt[n]{|z|}$$

und

$$\operatorname{Arg}\left(\sqrt[n]{z}\right) = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

(insgesamt n versch. W.Z bei $z \neq 0$)

$\Rightarrow$ in TF:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi k/n\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi k/n\right)\right),$$

wobei: $\varphi = \operatorname{Arg} z$,

$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

---

für ein $w \in \mathbb{Z}$: TF:

$$w = |w|\left(\cos(\operatorname{Arg} z) + i \sin(\operatorname{Arg} z)\right)$$

1.4.1. Anwendung 1:

Linearfaktorzerlegung von Polynomen

Polynom: vom Grad n (der Ordnung n):

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0,$$

$a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$;

$x \in \mathbb{C}$

Bsp:

$P_2(x) = 2x^2 + 3x - 17$

$P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 1$

$Q_2(x) = x^2 + 2x + 5$

Suche nach NSe:

$P_2(x) = 2x^2 + 3x - 17$

$2x^2 + 3x - 17 = 0$

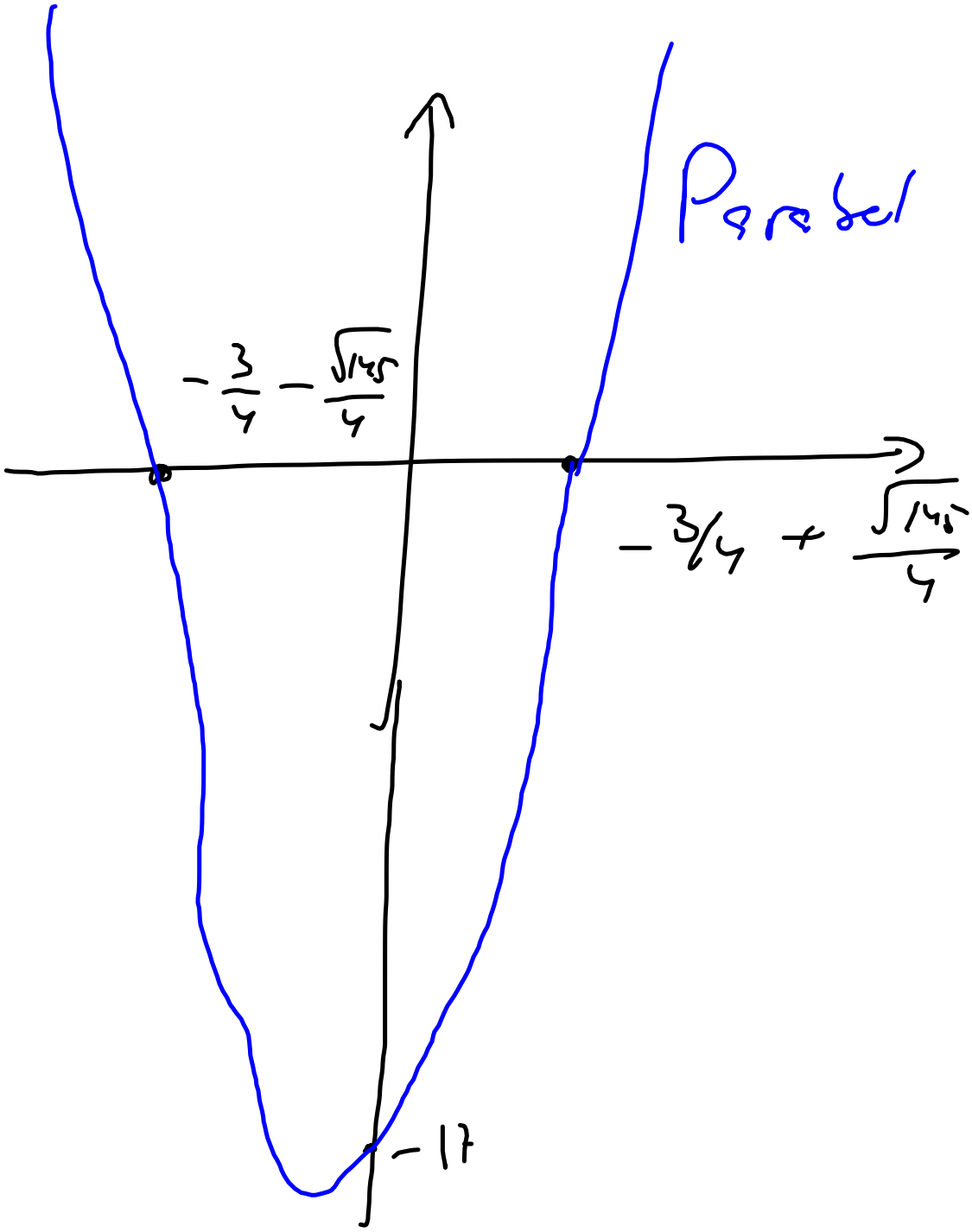
$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 17}}{2 \cdot 2} =$$

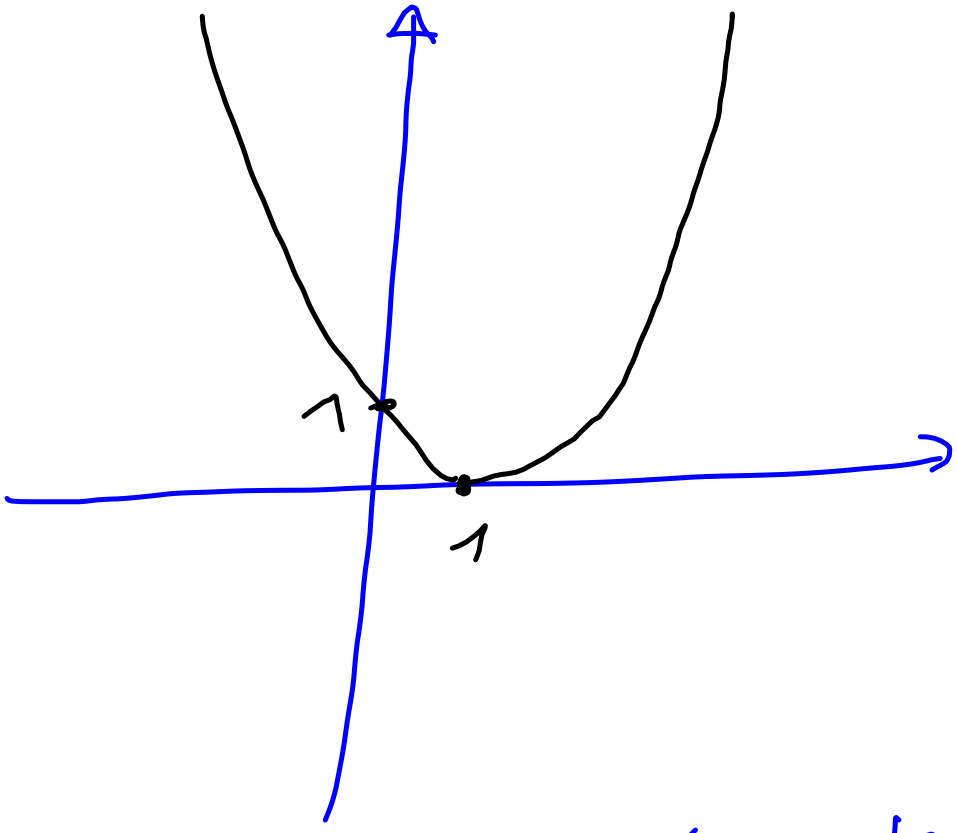
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{145}}{4} =$$

$$= \left\{ -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{145}}{4}\,;\; -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{145}}{4} \right\}$$


Parabel
$-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{145}}{4}$
$-3/4+\frac{\sqrt{145}}{4}$
-17

$(x^2 - 1)^2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$



Doppelte reelle NS:

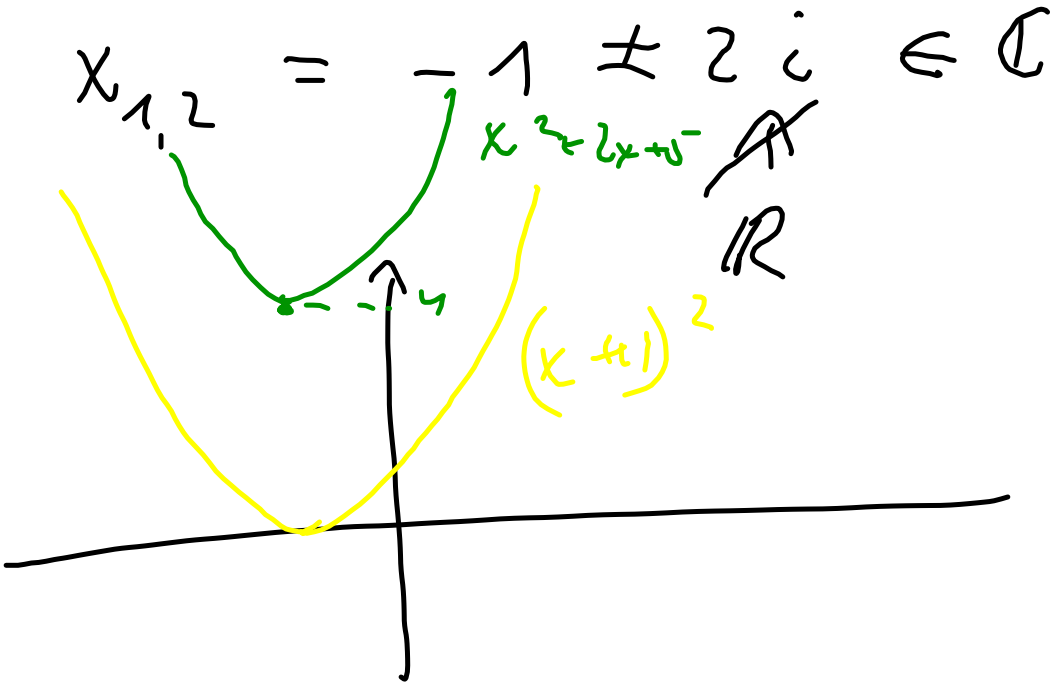
$x_{1,2} = 1$

$$Q_2(x) = x^2 + 2x + 5$$

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$(x+1)^2 = -4$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2i \in \mathbb{C}$$



Satz: (Hauptsatz der (klassen) Algebra):

(1) $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}$ hat höchstens n reelle Nullstellen

(2) $P_n(x)$ hat genau n komplexe Nullstellen.

(3) Ist $x_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$, $\beta_\nu \neq 0$ eine komplexe NSt von

$P_n(x)$, so ist auch ihre komplex konjugierte

$$x_\nu^* = \alpha_\nu + (-\beta_\nu)\,i$$

Nullstelle von $P_n(x)$.

(d.h. komplexe NSen treten immer paarweise auf: x_ν und x_ν^*).

(3*) Die Anzahl der komplex (nicht reelle) Nullstellen ist immer gerade!!

(4) Ist x_v eine NS von $P_n(x)$, so heißt $(x - x_v)$ linearfaktor von $P_n(x)$ und es gilt:

$$P_n(x) = (x - x_v) \underbrace{P_{n-1}(x)}$$

Polynom der Ordnung $(n-1)$

(5) Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n komplexe Nullstellen von $P_n(x)$, $(x_k \in \mathbb{C},\ k = 1, \ldots, n)$. Dann:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})(x - x_n)$$

Diese Darstellung heißt

Linearfaktorzerlegung von $P_n(x)$!



Bsp: Was ist möglich?

$P_5(x) = 2x^5 - x^3 + 1$

(1) 3 reelle NS? ✓

(2) 2 reelle NS? ✗

(3) 2 komplexe NS? ✓

(4) 5 komplexe NS? ✗

Bsp: Zerlegen Sie in Linearfaktoren!

$$P_4(x) = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 16x - 24$$

Lösung!

$$P_4(x) = 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 16x - 24 =$$

$$= 2\underbrace{(x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12)}_{\widetilde{P_4}(x)} =$$

$$= 2\,\widetilde{P_4}(x) = a_4 \cdot \widetilde{P_4}(x),$$

wobei $a_4 = 1$

2. Schritt:

Satz: Wenn $s \in \mathbb{R}$ eine ganzzahlige NS von $\widetilde{P_n}(x) = x^n + \widetilde{a}_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + \widetilde{a}_1 x + \widetilde{a}_0$, so ist s Teiler von a_0.

Folgerung: $P_n(x) = a_n \widetilde{P_n}(x) = a_n x^n + a_n \cdot \widetilde{a}_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_n \cdot \widetilde{a}_1 \cdot x + a_n \cdot \widetilde{a}_0$,

d.h. $a_k = a_n \cdot \widetilde{a}_k$.

Ist $s \in \mathbb{R}$ Teiler von $\tilde{a}_0$,
so ist s auch Teiler
von $(a_n \cdot \tilde{a}_0) = a_0$

(Bsp.: 2 teilt 4;
und dann 2 teilt $4 \cdot 3$)

"Ist $s \in \mathbb{R}$ eine ~~ganzzahlige~~ NS von $\tilde{P_n(x)}$, so
ist s auch eine ganzzahlige NS von $P_n(x)$."

"Um alle ganzzahlige reelle NS eines Polynoms $P_n(x)$ zu finde (falls existiert!) werde die Teiler von a_0 probiert":

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12 = \widetilde{P_4}(x)$$

Mögliche ganz. NSa!

$$x_0 \in \{-12;\ -6;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12\}$$

$\Rightarrow$ 1 ist NS von $\widetilde{P_4}(x)$.

3. Schritt: $x_1 = 1$

LF $(x-1)$

a) Hornerschema

oder

b) Polynomdivision

$$(x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12) : (x-1) =$$

$$x^4 - x^3 \qquad = x^3 + 3x^2 +$$

$$3x^3 + x^2 + 8x - 12 \qquad +4x +12$$

$$3x^3 - 3x^2$$

$$4x^2 + 8x - 12$$

$$4x^2 - 4x$$

$$12x - 12$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12 =$$

$$= (x-1)(x^3 + 3x^2 + 4x + 12)$$

Schritt 4:

Dasselbe Spiel mit

$x^3 + 3x^2 + 4x + 12$

u.s.w.

1.4.2. Darstellung von Schwingungen

Bsp: $y = 3 \sin(2t + \pi/3)$

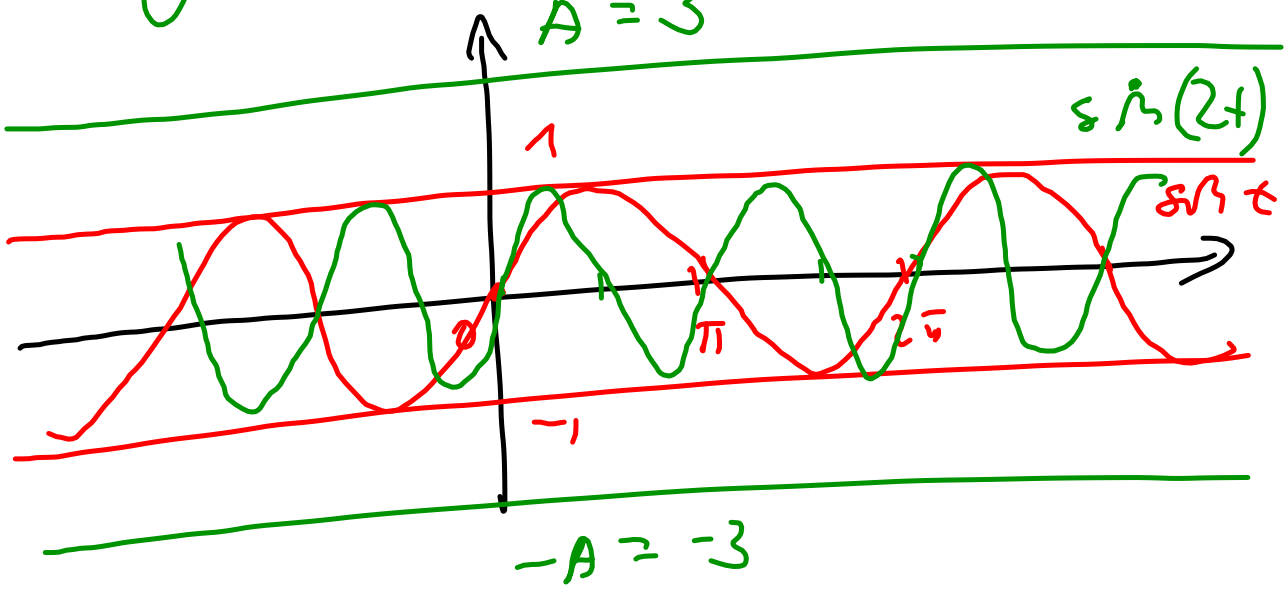
3: Amplitude

2: Frequenz

$\pi/3$: Phase, Phasenwinkel

Allg. Form:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi)$$



$A = 3$

$\omega = 2$

$\varphi = \pi/3$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Periode: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

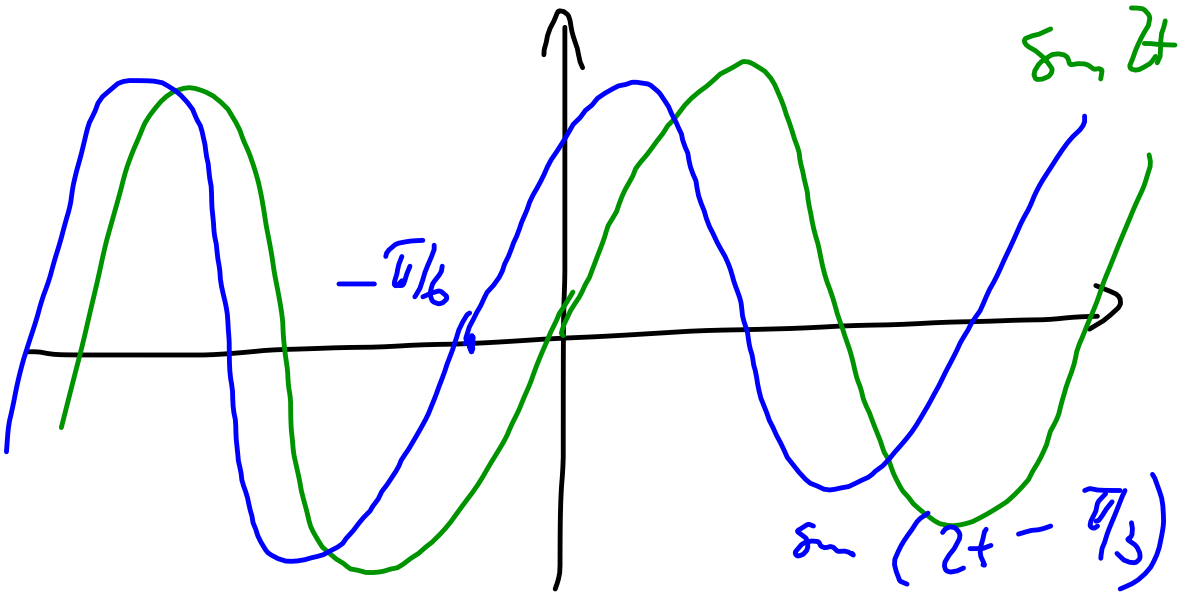
Startwert : $\boxed{t_0 = \frac{-\varphi}{\omega}}$

$t_0 = -\pi/6$

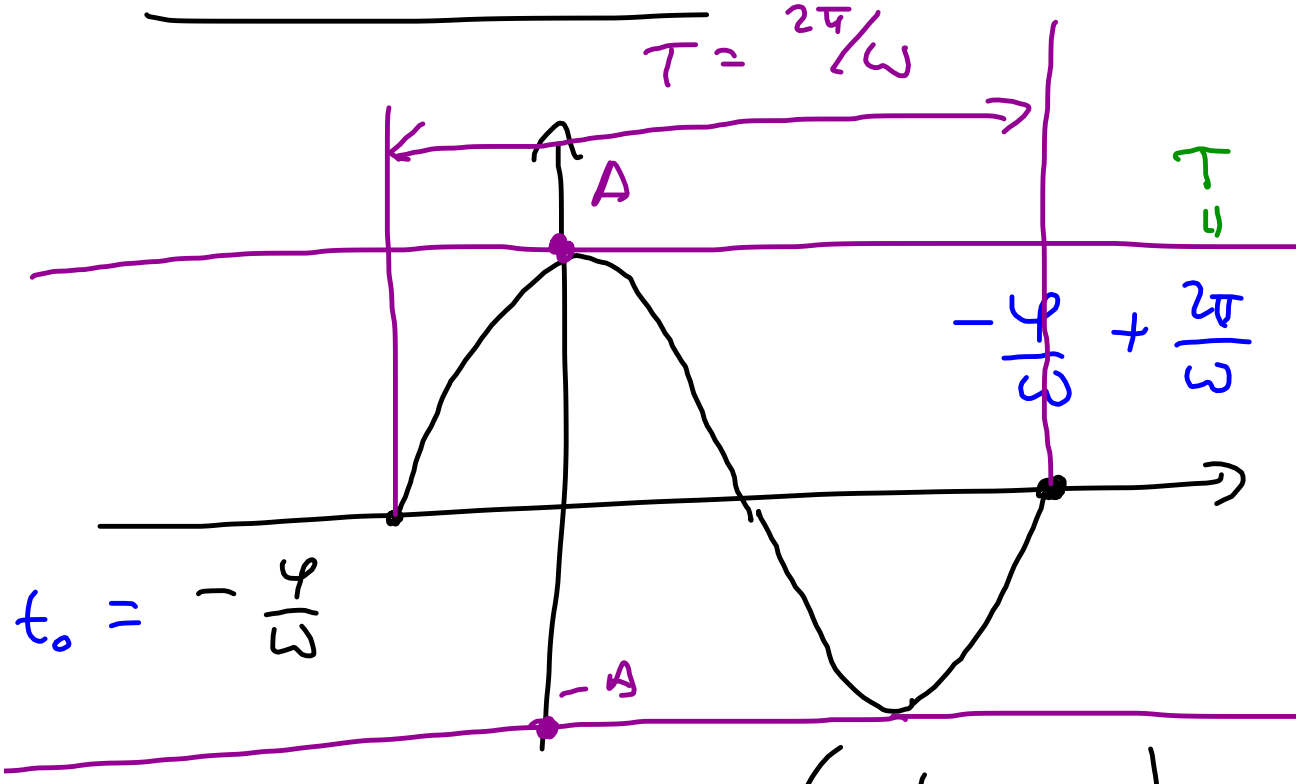
$\sin\left(2t + \pi/3\right) = \sin\left(2\left(t + \pi/6\right)\right)$

$\sin\left(2 \cdot \left(-\pi/6\right) + \pi/3\right) =$

$= \sin 0$



4. 11. 2013



$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplitude : A

Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Startwert: $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$ $(f(t_0) = 0)$

ω – Frequenz

φ – Phase

$$f(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$$

B Amplitude

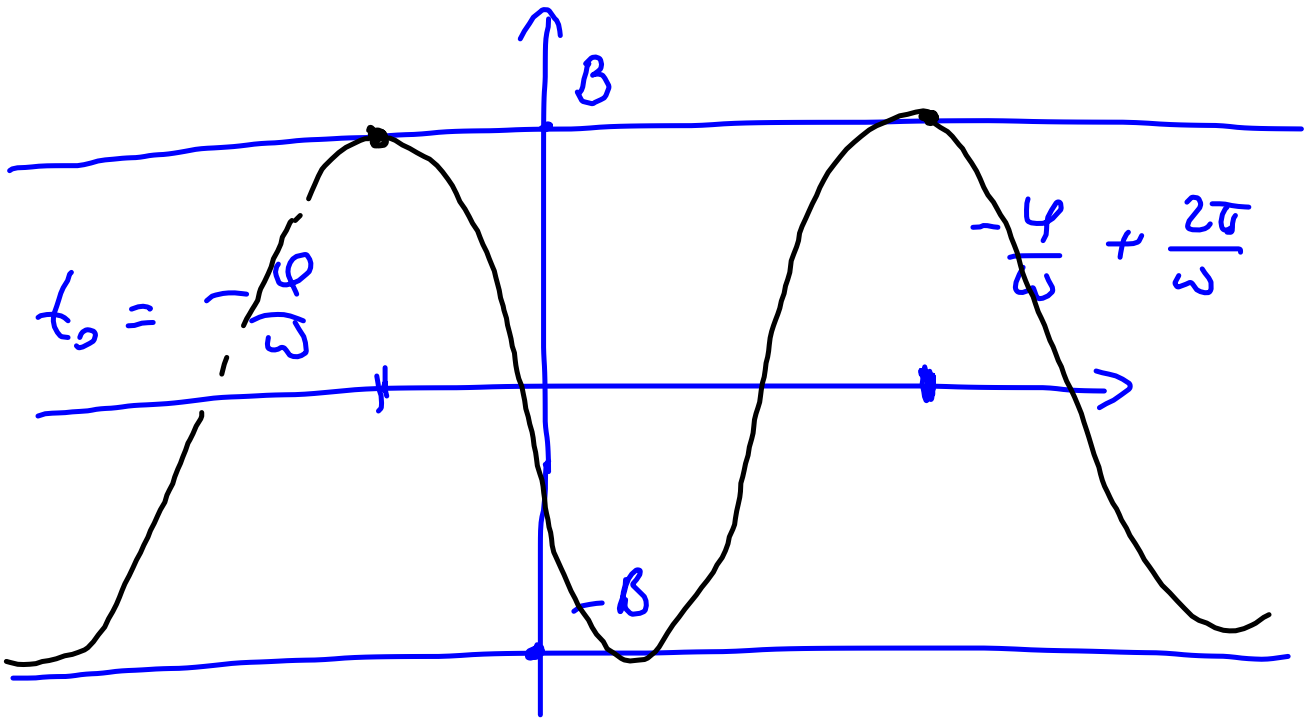
ω Frequenz

φ Phase

Startwert: $t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$

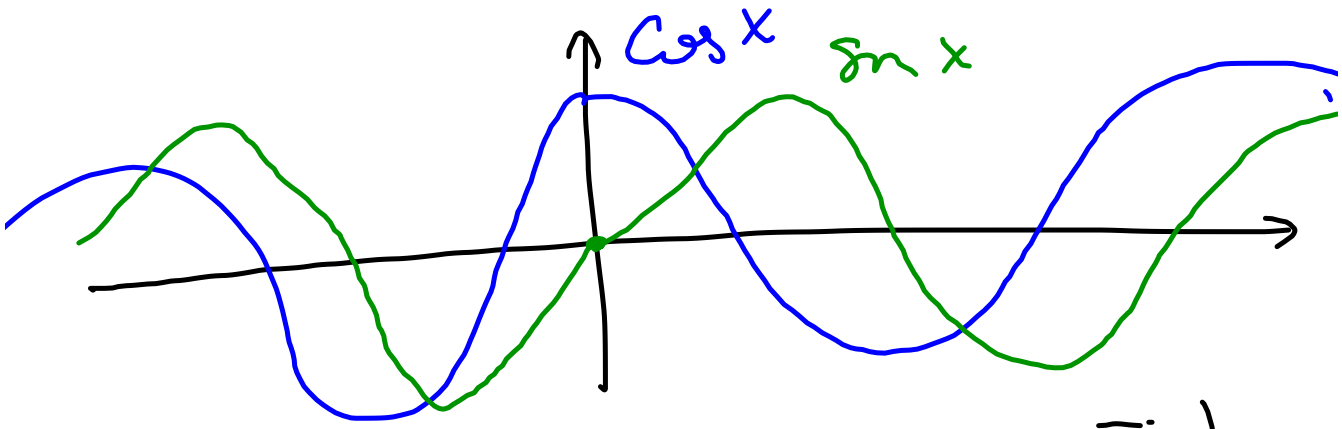
$f(t_0) = 1$

Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Grundlegende Eigenschaften

von $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$



(I) $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$

$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$

Verallgemeinerung:

$$\sin(\omega x + \varphi) = \cos(\omega x + \varphi - \pi/2)$$

$$\cos(\omega x + \varphi) = \sin(\omega x + \varphi + \pi/2)$$

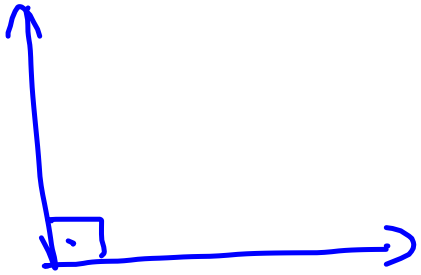
(II) Orthogonalität:

Es gilt:

$\bar{a} \perp \bar{b}$

$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\bar{a} \perp \bar{b} \Longleftrightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0$



$$(\bar{a}, \bar{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k =$$

$$= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots\ldots + a_n \cdot b_n =$$

$$= |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}\right)$$

$$\measuredangle\, \bar{a}, \bar{b}$$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \cos x_2 \\ \dots \\ \cos x_4 \\ \dots \end{pmatrix} = \left((\cos x_k)_{k} \right)_{x \in M}$$

$$\bar{b} = (\sin(x))_{x \in \mathbb{R}}$$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \cos x \, dx = 0$$

Satz: Orthogonalitätseigenschaften von sin und cos:

Es gilt:

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(mx) \cdot \cos(nx)\,dx = 0$

$\forall\, m, n \in \mathbb{N}$

(2) $\int_{0}^{2\pi} \sin(nx)\,dx = 0$

(3) $\int_{0}^{2\pi} \cos(nx)\,dx = 0$

$$(4)\quad \int_0^{2\pi} \sin(mx)\cdot \sin(nx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{1}{2\pi}, & n = m \end{cases}$$

$$(5)\quad \int_0^{2\pi} \cos(mx)\cdot \cos(nx)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{1}{2\pi} & m = n \end{cases}$$

Bew:

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Partielle Integration

$$(uv)' = uv' + u'v$$

$$\int (uv)'\, dx = \int uv'\, dx + \int u'v\, dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) v'(x)\, dx + \int u'(x) v(x)\, dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

S. Übungsblatt 2 ..... ∎

1.4.2.2. Darstellung von harmonischen Schwingungen als komplexer Zeiger

Die Sinus-Transformation

Wir stellen eine Schwingung s(t) als eine sin-Fkt. der (in Reelle):

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Def: Die Zuordnung

reell ↔ komplex

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \longleftrightarrow z(t) = \overline{y(t)} = A\,e^{j(\omega t+\varphi)}$$

heißt **Fourier-Transformation**.

Erklärung: $z(t) = A\,e^{i(\omega t+\varphi)} =$ Euler-Form

TF

$$= A\left(\cos(\omega t+\varphi) + i \sin(\omega t+\varphi)\right)$$

$\operatorname{Re} z(t) = \operatorname{Re} y(t)$

$$= A\cos(\omega t+\varphi) + i \cdot A\sin(\omega t+\varphi)$$

$\operatorname{Im} y(t) = \operatorname{Im} z(t)$

$\uparrow$

$\mathbb{R}$

$$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| e^{i\varphi} = z$$

Bezeichnungen:

$$\underline{y}(t) = z(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)} =$$

$$= A e^{(i\omega t + i\varphi)} =$$

$$= \underbrace{A e^{i\varphi}}_{\text{Zahl} \in \mathbb{C}, \text{ von } t \text{ unabhängig}} \cdot e^{i\omega t} =$$

$$\underline{y}(0) = z(0)$$

$$= \underline{y}(0) \cdot e^{i\omega t}$$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

$\underline{y}(0) = z(0) = A e^{i\varphi}$

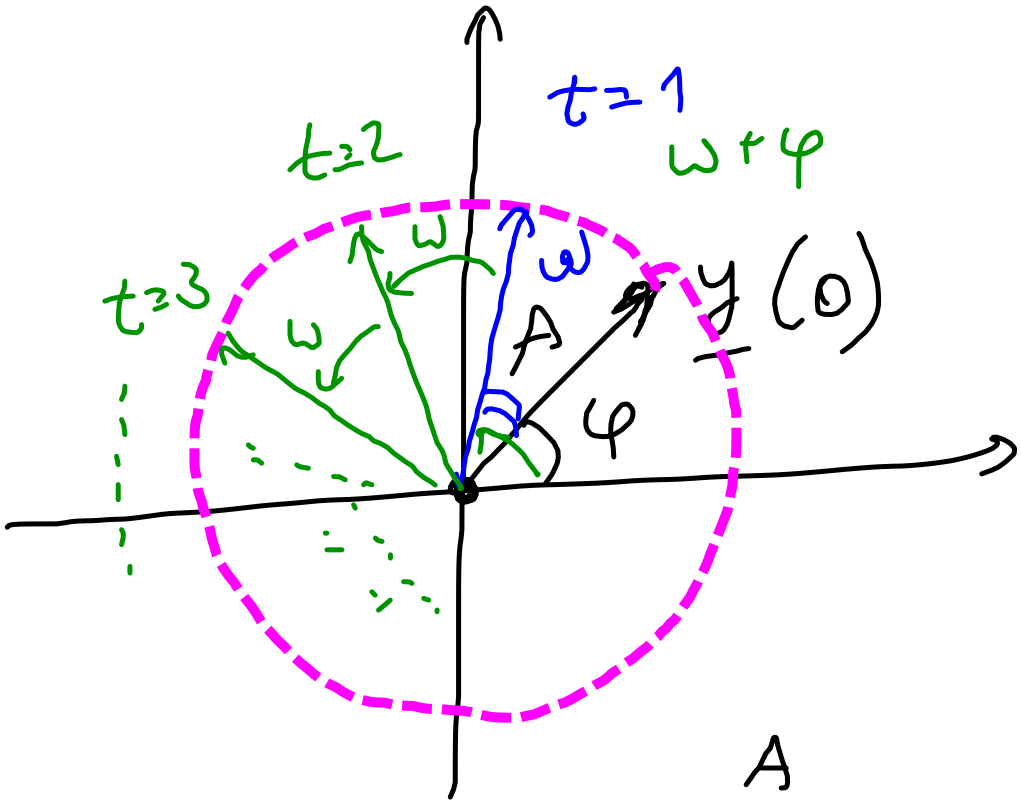
Komplexe Amplitude

$i\omega t$

$\underline{y(t)}\, e$

Komplexer Schwingungszeiger

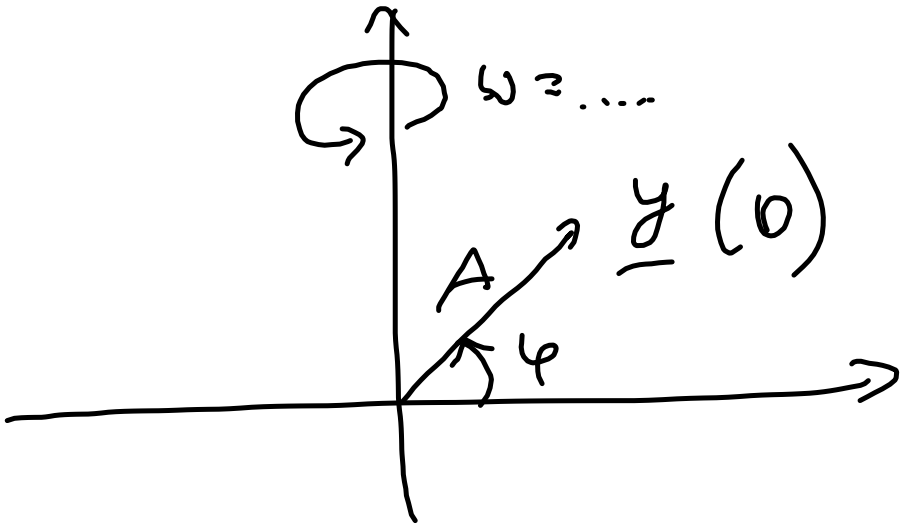
$z = |z| e^{i\varphi}, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z$



$$|\underline{y}(0)\cdot e^{i\omega t}| = |\underline{y}(0)|\cdot|e^{i\omega t}| =$$

A (4)

$= A \cdot 1 = A$ unabhängig von t



Komplexe Schwingg als (kompl.) Zeiger

<u>Bsp!</u> (1) Gegeben!

$y(t) = 3 \sin\left(2t + \pi/4\right)$

Gesucht! Darstellung als kompl. Zeiger

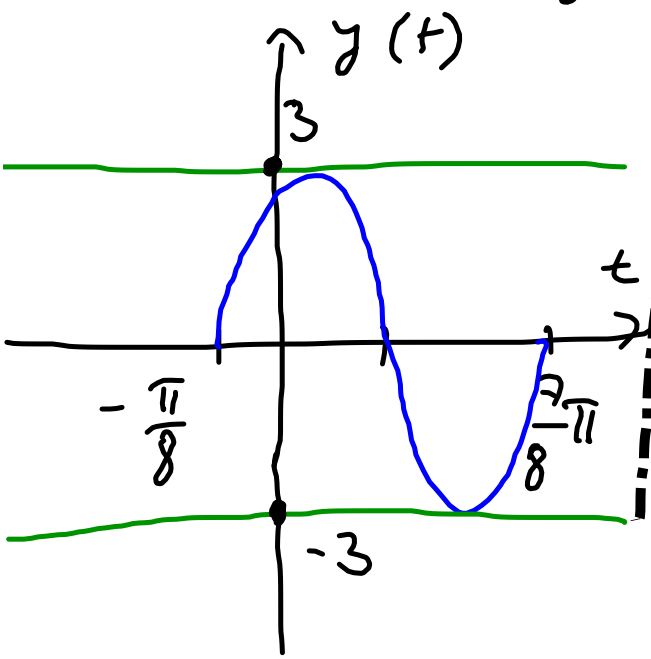
Sinus – Transformation:

$3\sin\left(2t+\pi/4\right) \Leftrightarrow 3e^{i\left(2t+\pi/4\right)} =$

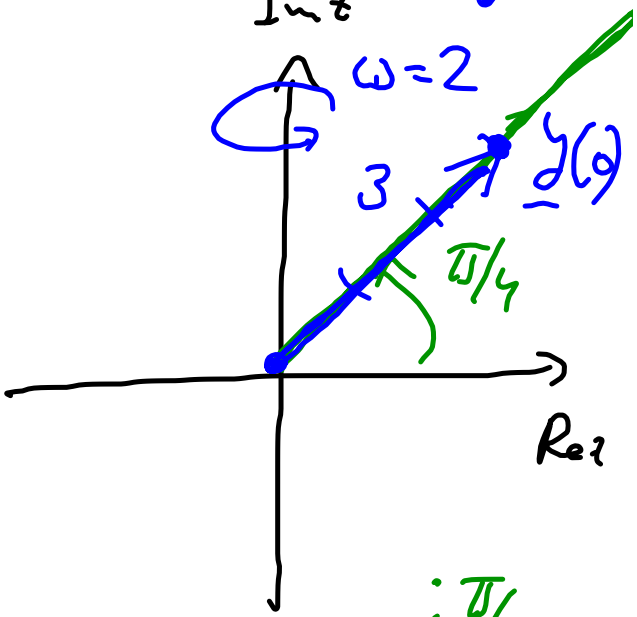
$A = 3 \; ; \; \omega = 2$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

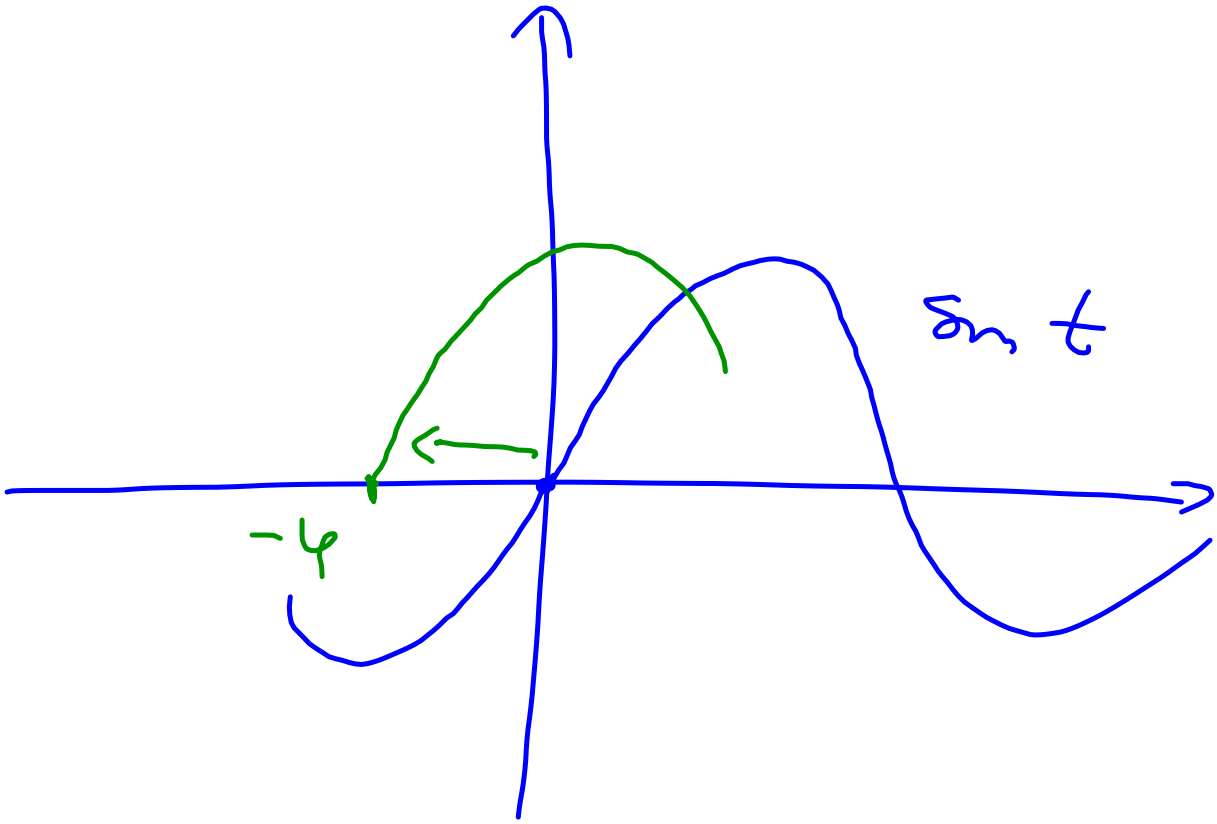
$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega} = -\frac{\pi}{8}$



$= 3e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i2t}$



$\underline{y}(0) = 3e^{i\pi/4}$



$\sin(t+\varphi)$