Klausur vom 08.08.2012

a) Man diskutiere das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 2 \\ -ax_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Man gebe alle möglichen Lösungen an.

b) Berechne die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang con C in Abhängigkeit vom Parameter b?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2b \\ -1 & -b & b & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Ist $a \neq \pm 4$, so ist der Rang maximal und das Gleichungssystem hat genau eine Lösung: $(0, 1, 0)$
Ist $a = \pm 4$, hat das Gleichungssystem entweder unendlich viele Lösungen oder keine.
Fall $a = 4$:
$(0, 1 - 2\lambda, \lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$
Fall $a = -4$
$(-\frac{8}{5}, 1 + \frac{6}{5}\mu, \mu)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$

b) Determinante von C:

$$-4b^2 + 4$$

Mit den Nullstellen:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ b_2 &= -1 \end{aligned}$$

Ist $b \neq \pm 1$, so ist der $Rg(C) = 4$. Ist $b = 1$ oder $b = -1$, so ist der Rang höchstens 3. Finde 3x3 Matrix, deren Determinante nicht verschwindet $=>$ $Rg(C) = 3$

Klausuraufgabe 25.07.2011

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:
a)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 15x_2 - 9x_3 &= 6 \\ -3x_1 - 18x_2 + 11x_3 &= 6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

c) Berechne die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang con C in Abhängigkeit vom Parameter b?

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & b \\ -1 & b & -b & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) keine Lösung

b)$x_3 = \lambda$
$x_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda$
$x_1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\lambda$

c) Determinante von C:

$$30 + 6b^2 - 29b$$

Mit den Nullstellen:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{10}{3} \\ b_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ist $b \neq \frac{10}{3}$ und $b \neq \frac{3}{2}$, so ist der $Rg(C) = 4$. Ist $b = \frac{10}{3}$ oder $b = \frac{3}{2}$, so ist der Rang höchstens 3. Finde 3x3 Matrix, deren Determinante nicht verschwindet $=> Rg(C) = 3$

Klausur vom 19.03.2012

a) Man diskutiere das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -ax_1 + 1x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 1x_2 + 2ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

Man gebe alle möglichen Lösungen an.

b) Berechne die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang con C in Abhängigkeit vom Parameter b?

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & b \\ -1 & -2b & 2b & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

a) Ist $a \neq 1$ und $a \neq -2$, so ist der Rang maximal und das Gleichungssystem hat genau eine Lösung: $(0, 1, 0)$
Ist $a = 1$ oder $a = -2$, hat das Gleichungssystem entweder unendlich viele Lösungen oder keine.
Fall $a = 1$:
$(0, 1 - 2\lambda, \lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$
Fall $a = -2$
$(-2\mu, 1 + 2\mu, \mu)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$

b) Determinante von C:

$$-8b^2 + 29b + 12$$

Mit den Nullstellen:

$$\begin{aligned} b_1 &= 4 \\ b_2 &= -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

Ist $b \neq 4$ und $b \neq -\frac{3}{8}$, so ist der $Rg(C) = 4$. Ist $b = 4$ oder $b = -\frac{3}{8}$, so ist der Rang höchstens 3. Finde 3x3 Matrix, deren Determinante nicht verschwindet $=> Rg(C) = 3$