Hochschule für
Technik und Wirtschaft
des Saarlandes
University of Applied Sciences

Fakultät für Ingenieurswissenschaften
Bachelorstudiengang Biomedizinische Technik
Prof. Dr. W. Langguth

Klausuraufgabensammlung Mathematik

Klausuraufgaben zur Mathematik 1 - 3

von

Wolfgang Langguth

Aufgabenstellungen mit Ergebnissen

Version 4.2

Bearbeitung unter Mitwirkung von

Dipl.-Math. Ulrich Sonn

Dipl.-Ing. Rolf Kröner-Naumann

Dipl. Math. Kerstin Gozemba

9. Juli 2013

Hochschule für Technik und Wirtschaft
Fachbereich Elektrotechnik
Studiengang Biomedizinische Technik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Aufgaben sind den Mathematik - Klausuren von Prof. Dr. W. Langguth im (alten) Fachbereich Elektrotechnik und dem Bachelor - Studiengang Biomedizinische Technik seit etwa dem Jahr 2000 entnommen worden und sollen den Studierenden zur eigenständigen und zielgerichteten Vorbereitung auf die Klausuren dienen. Lösungen in Form von Endergebnissen sind zur Kontrolle, Musterlösungen jedoch prinzipiell nicht angegeben, da sie von den Studierenden selbst im Rahmen der Klausurvorbereitung erarbeitet werden sollen. Eigene Lösungen oder Lösungswege und Probleme, die bei der Lösung auftreten, können in den Übungsstunden zur Mathematik besprochen werden. Auch in der Vorlesung besteht Gelegenheit zur Diskussion offener Fragen.

Die vorliegende Version beinhaltet die Aufgaben und Lösungen aller bis einschließlich WS 2012/2013 erstellten Klausuren. Zukünftige Klausuren werden fortwährend eingearbeitet.

Seit dem Wintersemester 2011/2012 dürfen in den Klausuren keine Taschenrechner, Formelsammlungen oder andere Hilfsmittel benutzt werden. Den Klausuren waren ab diesem Zeitpunkt die benötigten Formeln und Werte beigefügt. Zur Bearbeitung der nach diesem Zeitpunkt gestellten Klausuren (ohne Taschenrechner !) sind die den Klausuren beigefügten Formeln im letzten Kapitel zusammengestellt.

Sollten Sie Fehler oder Unklarheiten entdecken oder aber Fragen haben, bitte schicken Sie mir eine E-Mail oder nehmen Sie mit mir Rücksprache.

wolfgang.langguth@htw-saarland.de
Tel. 0681 - 5867-279

Saarbrücken, den 9. Juli 2013

gez. Wolfgang Langguth

Kapitel 2

Mathematik 1

2.1 Vektorrechnung

1. (a) Untersuchen Sie, ob die vier Punkte

$$P = (1, 2, 2),\ Q = (3, 5, 6),\ R = (1, 3, 2),\ S = (5, 2, 3)$$

des R^3 in einer Ebene liegen.

(b) Berechnen Sie die Fläche des Dreicks, das von den Punkten P, Q, und R aufgespannt wird.

(22.03.2001)

2. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$ ein. Gesucht ist der Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a} - 3\vec{b}$ und $4\vec{a} + 3\vec{b}$ aufgespannt wird, wenn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 9$ gilt.

(29.08.2001)

3. (a) Spannen folgende Vektoren ein rechtwinkliges Dreieck auf?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

(b) Finden Sie die allgemeine Form des Vektors $\vec{u}$, der folgende Gleichung erfüllt:
$\vec{u} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(04.03.2002)

4. (a) Die Eckpunkte eines Dreiecks sind gegeben durch die Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ist das Dreieck rechtwinklig? Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

(b) Finden Sie die allgemeine Form des Vektors $\vec{u}$, der folgende Gleichung erfüllt:
$(\vec{u} - \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(30.08.2002)

5. (a) Untersuchen Sie, ob die vier Punkte

$$P = (1, 2, 3),\ Q = (3, 5, 7),\ R = (1, 3, 9),\ S = (5, 2, 1)$$

des R^3 in einer Ebene liegen.

(b) Berechnen Sie die Fläche des Dreicks, das von den Punkten P, Q, und R aufgespannt wird.

(21.03.2003)

6. (a) Gegeben seien drei Eckpunkte eines Würfels

$$O = (0,0,0),\ A = (6,7,6),\ B = (2,6,-9).$$

Diese Punkte sind die Eckpunkte der Kanten OA und OB. Bestimmen Sie das Volumen des Würfels und den Endpunkt C der dritten, vom Ursprung ausgehenden Kante OC.

(b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, das von den Punkten O, A, und B aufgespannt wird.

(06.10.2003)

7. Gegeben seien die Eckpunkte einer Pyramide

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche ABC.

(b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

(c) Berechnen Sie die Höhe der Pyramide in Bezug auf die Grundfläche ABC.

(04.03.2004)

8. Die Vektoren $\vec{a}, |\vec{a}| = 4$ und $\vec{b}, |\vec{b}| = 5$ schließen einen Winkel von $\phi = \pi/3$ ein.

(a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{u} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ und $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$ aufgespannt wird.

(b) Wie groß ist das Volumen des Körpers, das von diesem Dreieck und dem Vektor $\vec{c}, |\vec{c}| = 2$ aufgespannt wird, der mit der $(\vec{u}, \vec{v})$ - Ebene einen Winkel von $\delta = \pi/4$ einschließt?

(30.07.2004)

9. Die Vektoren $\vec{a} = (2,5,7)$ und $\vec{b} = (3,1,4)$ spannen ein Parallelogramm auf. Berechnen Sie

(a) die Länge der beiden Diagonalen des Parallelogramms, den Schnittwinkel der Diagonalen und die Fläche des Parallelogramms.

(b) Wie groß ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{c} = (1,0,0)$ und der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene?

(28.02.2005)

10. Die Vektoren $\vec{a} = (1,2,3)$ und $\vec{b} = (3,5,7)$ spannen ein Parallelogramm auf. Berechnen Sie

(a) die Länge der beiden Diagonalen des Parallelogramms, den Schnittwinkel der Diagonalen und die Fläche des Parallelogramms.

(b) Wie groß ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{c} = (0,2,0)$ und der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene?

(29.08.2005)

11. Die Vektoren $\vec{a} = (1,2,4)$ und $\vec{b} = (3,6,8)$ spannen ein Parallelogramm auf. Berechnen Sie

(a) die Länge der beiden Diagonalen des Parallelogramms, den Schnittwinkel der Diagonalen und die Fläche des Parallelogramms.

(b) Wie groß ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{c} = (0, 2, 1)$ und der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene?

(13.03.2006)

12. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{3\pi}{4}$ ein und haben die Beträge $|\vec{a}| = 3$ und $\left|\vec{b}\right| = 4$. Bestimmen Sie zwei solche Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{c} = \vec{a}+2\vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a}-4\vec{b}$ aufgespannt wird.

(28.02.2007)

13. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{5\pi}{4}$ ein und haben die Beträge $\mid \vec{a} \mid= 4$ und $\mid \vec{b} \mid= 2$. Bestimmen Sie zwei solche Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ aufgespannt wird.

(13.08.2007)

14. (a) Liegen die folgenden vier Punkte des R^3 in einer Ebene?

$$A = (-1, 2, 4),\ B = (0, 3, 5),\ C = (1, 7, 3),\ D = (-1, 1, 5)$$

(b) Sind die Punkte A, B und D die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks?

(c) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, das von den Punkten A, B, und C aufgespannt wird.

(09.01.2008)

15. (a) Die Eckpunkte eines Dreiecks sind gegeben durch die Ortsvektoren

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ist das Dreieck rechtwinklig? Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

(b) Finden Sie die allgemeine Form des Vektors $\vec{u}$, der folgende Gleichung erfüllt:

$$(\vec{u}+\vec{d})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{c}\times(\vec{a}-\vec{b}) \text{ mit } \tilde{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},\ \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \tilde{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \tilde{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(26.02.2008)

16. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{3\pi}{8}$ ein und haben die Beträge $\mid \vec{a} \mid= 2$ und $\mid \vec{b} \mid= 3$. Bestimmen Sie zunächst zwei solche Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Bestimmen Sie dann den reellen Parameter λ so, dass die Vektoren $\vec{c} = \vec{a}+\lambda\vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a}-\lambda\vec{b}$ ein rechtwinkliges Dreieck aufspannen. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses rechtwinkligen Dreiecks.

(5.08.2008)

17. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{3\pi}{5}$ ein und sind vom Betrag $\mid \vec{a} \mid= 3$ und $\mid \vec{b} \mid= 4$.

(a) Bestimmen Sie zunächst zwei solche Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(b) Bestimmen Sie dann den reellen Parameter λ so, dass die Vektoren $\vec{c} = 2\vec{a} - \lambda\vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ ein gleichschenkliges Dreieck aufspannen.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Welchen Winkel schließen die beiden gleichen Schenkel miteinander ein? Wie groß sind die beiden anderen Winkel des Dreiecks?

(06.01.2009)

18. Gegeben seien die Ortsvektoren der Punkte A, B, C, D:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bilden die Punkte A, B, C, D die Eckpunkte eines Parallelogramms?

   (b) Sind die Punkte A, B, C die Eckpunkte eines gleichseitigen oder eines gleichschenkligen Dreiecks?

   (c) Berechnen Sie die Winkel und die Fläche des Dreiecks ABC.

(18.02.2009)

19. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{2\pi}{3}$ ein und haben die Beträge $|\,\vec{a}\,| = 2$ und $|\,\vec{b}\,| = 2$. Bestimmen Sie den reellen Parameter λ so, dass der Summenvektor der Vektoren $\vec{c} = \vec{a} + 2\,\lambda\vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} - 3\,\lambda\vec{b}$ die Länge 8 hat. Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ ein? Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{e}$ der Läge 1, der senkrecht auf $\vec{c}$ und $\vec{d}$ steht. Wie groß ist der Rauminhalt des Spats, der von den Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ aufgespannt wird? (24.08.2009)

20. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{3\pi}{4}$ ein und sind vom Betrag $|\,\vec{a}\,| = 1$ und $|\,\vec{b}\,| = 2$.

   (a) Bestimmen Sie den reellen Parameter λ so, dass die Vektoren $\vec{c} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$ und $\vec{d} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ ein rechtwinkliges Dreieck aufspannen.

   (b) Berechnen Sie **explizit** den Flächeninhalt, die Länge der drei Seiten und die beiden restlichen Winkel des Dreiecks.

   (c) Liegt der Vektor $\vec{e} = \frac{\pi}{6}\vec{a} + \frac{\pi}{3}\vec{b}$ in der gleichen Ebene wie das Dreieck?

(07.01.2010)

21. (a) Gegeben seien die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$.

   (b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, dessen Diagonalen gegeben sind durch die Vektoren $2\vec{m} - \vec{n}$ und $4\vec{m} - 5\vec{n}$. Dabei sind $\vec{m}$ und $\vec{n}$ zwei Einheitsvektoren die einen Winkel von $\pi/4$ miteinander einschließen.

(08.03.2010)

22. (a) Gegeben seien die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ und $((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}) \times \vec{d}$.

   (b) Die beiden Einheitsvektoren $\vec{m}$ und $\vec{n}$ schließen einen Winkel von $\pi/3$ ein. Die Diagonalen einer Schar von Parallelogrammen sind gegeben durch die Vektoren $2\vec{m} - \lambda\vec{n}$ und $4\vec{m} - 5\vec{n}$, λ sei ein reeller Parameter. Für welche Werte von λ hat das zugehörige Parallelogramm einen Flächeninhalt von 3 FE?

(23.08.2010)

23. (a) $\vec{m}$ und n seien zwei Einheitsvektoren, die einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$ miteinander einschließen.
   $\vec{c} = \vec{m} - 2\sqrt{2}\,\lambda\,\vec{n}$ und $\vec{d} = \vec{m} + 2\sqrt{2}\,\vec{n}$ seien die Diagonalen eines Parallelogramms.

      i. Für welche(n) Wert(e) von λ haben die Diagonalen einen Schnittwinkel von $\frac{\pi}{4}$?

ii. Berechnen Sie allgemein für alle und speziell für diese(n) Wert(e) von λ den Flächeninhalt des Parallelogramms.

(b) Berechnen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ den Ausdruck

$$\left(\vec{a} + 2\,\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \left[\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - 2\,\vec{b} - \vec{c}\right)\right]$$

Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich!

(15.01.2011)

24. (a) Für welche(n) Wert(e) von λ liegen die drei Vektoren

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in einer Ebene?
Berechnen Sie dafür die Darstellung (Linearkombination) des Vektors $\overrightarrow{a}$ durch $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$.

(b) Die (neuen!) Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$ ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Vektoren $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - 2\,\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{d} = 3\overrightarrow{a} + 2\,\overrightarrow{b}$ aufgespannt wird, wenn $|\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{b}\right| = 5$ gilt.

(25.07.2011)

25. Gegeben seien die Punkte $P_1(2, 1, -3)$, $P_2(-3, 3, 5)$, $P_3(1, 4, 1)$. Berechnen Sie anhand elementarer Überlegungen und **ohne** eine fertige Formel zu verwenden, den Abstand des Punktes P_1 von der Geraden, die durch die Punkte P_2 und P_3 geht.

(21.03.2011)

26. (a) Vereinfachen Sie die beiden folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

i. $(2\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{c})$

ii. $(2\vec{a} + 5\vec{b} - 3\vec{c}) \times (\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{c})$

(b) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a}$ in Komponenten senkrecht und parallel zum Vektor $\vec{b}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{u}$ und $\vec{v}$ seien zwei Einheitsvektoren mit $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$. Berechnen Sie die Länge der Diagonalen sowie die Fläche des von den Vektoren $\vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v}$ und $\vec{b} = \vec{u} - 2\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms.

Hinweis: $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

(10.01.2012)

27. (a) Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Stellen, falls möglich, den Vektor $\vec{c}$ als Linearkombination der beiden anderen Vektoren dar.

(b) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ sowie die Gleichung

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b} \qquad (2.1)$$

i. Bestimmen Sie alle Werte von k, für denen die Gl. (2.1) Lösungen haben kann

ii. Berechnen Sie für jeden Wert von k die entsprechende Lösungsmannigfaltigkeit $\vec{r}$

(19.03.2012)

28. (a) Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Abstand zwischen einer Ecke eines Einheitswürfels (Würfel der Kantenlänge 1) und einer seiner Diagonalen, die nicht durch diese Ecke geht.

(b) Gegeben seien die drei Punkte P, Q und R mit den Ortsvektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, die die Ebene $\mathcal{E}$ definieren.

i. Zeigen Sie, dass der Vektor

$$\vec{s} = \vec{p} \times \vec{q} + \vec{q} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.2}$$

senkrecht auf der Ebene $\mathcal{E}$ steht.

ii. Finden Sie mit Hilfe des Vektors $\vec{s}$ einen Ausdruck für den Abstand der Ebene $\mathcal{E}$ vom Ursprung.

(30.07.2012)

29. (a) Ausgehend vom Punkt C wird ein Dreieck von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit dem Zwischenwinkel γ aufgespannt. Berechnen Sie die Länge der Seitenhalbierenden vom Punkt C zur gegenüberliegenden Seite des Dreiecks, c.

(b) $\vec{u}$ und $\vec{v}$ seien zwei Einheitsvektoren mit $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{4}$, λ ein reeller Parameter. Berechnen Sie die Länge der Diagonalen sowie die Fläche des von den Vektoren $\vec{a} = \vec{u} + \lambda\,\vec{v}$ und $\vec{b} = \vec{u} - 3\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms. Für welchen Wert von λ hat die Fläche den Wert $\sqrt{2}$?

Hinweis: $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

(c) Welche geometrischen Eigenschaften die die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ zueinander haben können Sie jeweils aus den beiden folgenden Gleichungen ableiten?

i. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = 0$

ii. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 0$

(10.01.2013)

30. (a) $\vec{u}$ und $\vec{v}$ seien zwei beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie allgemein, dass die Vektoren $\vec{u}+\vec{v}$ und $\vec{u}-\vec{v}$ genau dann senkrecht zueinander stehen, wenn $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ gilt.

(b) Die Punkte A, B und C haben die Ortsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i. Zeigen Sie, dass der Punkt $P = (1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 4 + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ auf der Geraden durch A und B liegt. Berechnen Sie den Abstand von P zu C als Funktion von λ . Wie groß ist der kürzeste Abstand, und in welcher geometrischen Situation tritt er ein?

ii. Finden Sie einen Vektor senkrecht zu AB und AC, wie lautet die Gleichung der Ebene ABC?

iii. Zeigen Sie, dass der Punkt $D = (2, -2, 11)$ in einer Ebene senkrecht zur Ebene ABC liegt und dass AD senkrecht zu AB steht. Berechnen Sie das Volumen der schiefen Pyramide (Tetrahedron), die (das) von $ABCD$ aufgespannt wird.

(22.02.2013)

2.2 Ungleichungen

Gegeben sind die folgenden Ungleichungen. Führen Sie für die Funktionen auf beiden Seiten der Ungleichung eine erste allgemeine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Polstellen, asymptotisches Verhalten, ***keine*** Ableitungen) und skizzieren Sie beide Funktionen. Bestimmen Sie die reelle Lösungsmenge der Ungleichung.

1. $x^2 + 2x - 1 \geq 4x + 1$ (22.03.2001)
2. $x^2 + 3x - 5 \geq 5x + 1$ (29.08.2001)
3. $-x^2 - 5x + 1 \geq 6x + 5$ (04.03.2002)
4. $x^2 - 5x + 1 \geq 6x + 5$ (30.08.2002)
5. $2x^2 + 3x - 1 \geq 5x + 10$ (21.03.2003)
6. $-x^2 - 3x + 1 \geq 15x + 10$ (06.10.2003)
7. $x^2 + 5 > \frac{-3x^2+5}{2x+1}$ (04.04.2004)
8. $-2x^2 + 7 > \frac{-x^2+7}{2x+1}$ (30.07.2004)
9. $x + 3 > \frac{x+18}{3x-2}$ (28.02.2005)
10. $x^2 + 6 > \frac{-3x^2+6}{4x+1}$ (29.08.2005)
11. $x^2 + 4 > \frac{-9x^2+12}{6x-3}$ (13.03.2006)
12. $2x^2 - 5 > \frac{-4x^2+10}{2x-1}$ (28.02.2007)
13. $x^2 - 5 > \frac{-2x^2+5}{2x-1}$ ((13.08.2007)
14. $x^2 - 3 < \frac{4x^2+x-6}{x+2}$ (09.01.2008)
15. $x^2 - 2x - 3 \leq \frac{-2x^2+2x+6}{3x-2}$ (26.02.2008)
16. $x^3 - 2x - 3 > \frac{-2x^2-5x+6}{3x-2}$ (05.08.2008)
17. $x^3 - 3x - 1 < \frac{2x^2+5x+2}{x-2}$ (06.01.2009)
18. $\frac{x^2-3x+2}{x-3} > \frac{x^2-4x+3}{x-2}$ (18.02.2009)
19. $\frac{x}{3x^2-2} > \frac{x}{2x+1}$ 24.08.2009)
20. $x^3 - 3x - 1 \leq \frac{x^2+8x+3}{x-3}$ (07.01.2010)
21. $\frac{x}{3\,x^2-4} \leq \frac{x}{2\,x+3}$ (08.03.2010)
22. $\frac{2x}{3\,x^2-4} \leq \frac{x}{2\,x+6}$ (23.03.2010)
23. $\frac{x}{3x^2-3} - x < \frac{x^2}{x+5} - \frac{4}{3}\,x$ (15.01.2011)
    Gibt es Bereiche, in denen Sie eventuell relative Extrema oder Wendepunkte erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort!
24. $x^2 + 5 \leq \frac{x^2+5}{3\,x+1} + 6\,x$ (21.03.2011)
25. $2x^2 - 2 \leq \frac{x^2-2x+2}{x-1} + 6x$ (25.07.2011)
26. $\frac{3x-4}{2x+3} - 5 \leq \frac{10-14x}{4x-4}$ (10.01.2012)
27. $x^2 + x - 4 \geq \frac{x^2-4}{x+1} + 6x$ (19.03.2012)
28. $\frac{1}{x-2} \geq \frac{5x-5}{x^2-4} - \frac{4}{x-1}$ (30.07.2012)
29. $\frac{x+2}{x^2+x-2} + 1 \leq \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ (10.01.2013)
30. $\frac{(x+5)^2(x-1)}{(x^2+6x+5)(x+5)} \geq \frac{1}{x+1} + x - 2$ (22.02.2013)

2.3 Determinanten und Lineare Gleichungssysteme

1. Betrachten Sie das folgende Lineare Gleichungssystem (LGLS)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Gibt es Werte des reellen Parameters a, für den das Gleichungssystem lösbar oder unlösbar ist? Gibt es Werte von a, für die es eindeutig lösbar ist oder für die es unendlich viele Lösungen hat? Geben Sie ggf. die entsprechenden Werte mit Begründung an.

   (b) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des LGLS für einen von Ihnen passend gewählten Wert des Parameters a.

(22.03.2001)

2. (a) Entwickeln Sie folgende Determinante durch geeignete Rückführung auf einfachere Determinanten

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ -3 & 5 & -4 & 6 \\ 7 & -2 & 1 & 4 \\ 8 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

   (b) Untersuchen Sie folgendes Gleichungssystem auf seine eindeutige Lösbarkeit.

$$\begin{aligned} 1.2x - 0.9y + 1.5z &= 2.4 \\ 0.8x - 0.5y + 2.5z &= 1.8 \\ 1.6x - 1.2y + 2.0z &= 3.2 \end{aligned}$$

   Je nach Lösbarkeit geben Sie an: Die Lösung, die Anzahl der von einander abhängigen Gleichungen, oder die Anzahl der Gleichungen, die zueinander in Widerspruch stehen.

(29.08.2001)

3. (a) Zeigen Sie durch elementare Umformungen, die den Wert der Determinante nicht verändern, dass die folgende Determinate verschwindet:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 8 & 6 & 15 \\ -1 & 16 & 2 & 15 \\ 1 & 6 & 4 & 12 \end{vmatrix}$$

   (b) Untersuchen Sie, ob das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= -2 \\ -2x - 4y - 3z &= 7 \\ -4x - 5y - 2z &= -7 \end{aligned}$$

(04.03.2002)

4. (a) Überprüfen Sie mittels elementarer Umformungen, die den Wert der Determinante nicht verändern, ob die folgende Determinante verschwindet. Dokumentieren und begründen Sie die, von Ihnen vorgenommenen Umformungen nachvollziehbar!

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

(b) Überprüfen Sie, ob das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem eine Lösung hat:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= -2 \\ -2x - 4y - 2z &= 7 \\ -4x - 5y - 4z &= -7 \end{aligned}$$

(30.08.2002)

5. Betrachten Sie das folgende Lineare Gleichungssystem (LGLS) mit dem reellen Parameter a:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & a & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Gibt es Werte des reellen Parameters a, für den das Gleichungssystem lösbar oder unlösbar ist? Gibt es Werte von a, für die es eindeutig lösbar ist oder für die es unendlich viele Lösungen hat? Geben Sie ggf. die entsprechenden Werte mit Begründung an.

(b) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des LGLS für einen von Ihnen passend gewählten Wert des Paramters a.

(21.03.2003)

6. (a) Untersuchen Sie die Lösungsstruktur des folgenden linearen Gleichungssystems und bestimmen Sie alle Lösungen:

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 2z &= 0 \\ x + 4y - 3z &= 1 \\ 2x - 18y + 10z &= -2 \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die Determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ -2 & b & 2 & 0 \\ 0 & -2 & c & 2 \\ 0 & 0 & -2 & d \end{vmatrix}$$

(06.10.2003)

7. (a) Untersuchen Sie das Lösungscverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= b_2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Welche Beziehung muß zwischen den Größen b_1, b_2 und b_3 bestehen, damit das Gleichungssystem lösbar ist? Wählen Sie dementsprechende Werte und berechnen Sie die allgemeine Lösung.

(b) Berechnen Sie den Rang der Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(04.03.2004)

8. (a) Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Welche Beziehung muß zwischen den Größen $b_1 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$ bestehen, damit das Gleichungssystem lösbar ist? Wählen Sie dementsprechende Werte und berechnen Sie dafür die allgemeine Lösung.

(b) Für welche reellen oder komplexen Werte von t verschwindet die Determinante der folgenden Matrix B:

$$B = \begin{pmatrix} t+1 & 2 & -t \\ -2 & t-2 & 0 \\ t & 2 & t \end{pmatrix}$$

(30.07.2004)

9. (a) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters b:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 + bx_3 &= 4 \end{aligned}$$

Für welchen Wert von b ist dieses Gleichungssystem überhaupt lösbar? Geben Sie eine allgemeine Lösung an.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang von C abhängig vom Wert des Parameters b?

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 5 & b & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(28.02.2005)

10. (a) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters b:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + bx_3 &= 3 \end{aligned}$$

Welche Bedingung muß b erfüllen, damit dieses Gleichungssystem überhaupt lösbar ist? Geben Sie eine allgemeine Lösung an.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang von C abhängig vom Wert des Parameters a?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 5 & a & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(29.08.2005)

11. (a) Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters b:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 3 \\ 8x_1 + 9x_2 + bx_3 &= 4 \end{aligned}$$

Welche Bedingung kan man an b stellen, so daß dieses Gleichungssystem lösbar ist? Geben Sie sämtliche Lösungen an.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang von C abhängig vom Wert des Parameters b?

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 5 & b & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(13.03.2006)

12. Betrachten Sie folgendes Lineares Gleischungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ -2x_1 + ax_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(a) Diskutieren Sie die Lösungsstruktur dieses inhomogenen und des zugehörigen homogenen LGS in Abhängigkeit des reellen Parameters a.

(b) Berechnen Sie die Lösung des inhomogenen LGS für $a = 4$ und die Lösung des homogenen LGS für $a = 0$.

(28.02.2007)

13. Betrachten Sie folgendes lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} 2ax_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ -2x_1 + ax_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(a) Diskutieren Sie die Lösungsstruktur diese inhomogenen und des zugehörigen LGS in Abhängigkeit des reellen Parameters a.

(b) Berechnen Sie die Lösung des inhomogenen LGS für $a = 0$ und des homogenen LGS für $a = 3$. (13.08.2007)

14. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 1x_3 &= a \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Welche Beziehung muss zwischen den Größen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ bestehen, damit das Gleichungssystem lösbar ist? Wählen Sie dementsprechende Werte und berechnen Sie die allgemeine Lösung. (09.01.2008)

15. Betrachten Sie das folgende Lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Diskutieren Sie die Lösbarkeit und die Lösungsstruktur des LGS in Abhängigkeit der reellen Parameter a und b.

(b) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des LGS für einen von Ihnen passend gewählten Satz von Werten der Parameter a und b.

(26.02.2008)

16. Berechnen Sie die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang von C abhängig von den Werten der Parameters a und b?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ a & 3 & -1 & -2 \\ 5 & b & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(26.02.2008)

17. Betrachten Sie folgendes lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} x + ay + 2z &= 2 \\ 4x + 6y + az &= 6 \\ 2x + 3y + 6z &= 3 \end{aligned}$$

(a) Diskutieren Sie die Lösungsstruktur diese inhomogenen und des zugehörigen homogenen LGS in Abhängigkeit des reellen Parameters a.

(b) Berechnen Sie die Lösung des inhomogenen LGS für $a = 12$ und für $a = 3$.

(05.08.2008)

18. Berechnen Sie die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang von C abhängig von den Werten der Parameter a und b?

$$C = \begin{pmatrix} a & 3 & 4 & 1 \\ 3 & a & b & 2 \\ a & 3 & 1 & 1 \\ 5 & a & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Erläutern und begründen Sie die Abhängigkeit der Determinante vom Parameter b !

(05.08.2008)

19. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + ax_2 + 6x_3 &= 1 \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Gibt es Werte des reellen Parameters a für die das Gleichungssystem genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat?

(b) Bestimmen und wählen Sie für jeden Fall - sofern möglich - die entsprechenden Werte für a und berechnen Sie die jeweils zugehörige Lösung, bzw. bestimmen Sie den Wert von a für den es ggf. keine Lösung gibt.

(c) Begründen Sie in jedem Fall möglichst detailliert das Lösungsverhalten des Systems

(6.1.2009)

20. Betrachten Sie folgendes lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= a_1 \\ 9x_1 + 6x_2 + 11x_3 &= a_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= a_3 \end{aligned}$$

(a) Diskutieren Sie die Lösungsstruktur des zugehörigen homogenen LGS sowie die des inhomogenen LGS in Abhängigkeit der reellen Parameter a_1, a_2, a_3.

(b) Berechnen Sie die Lösung des inhomogenen LGS für einen geeignet gewählten Parametersatz, für den das LGS lösbar ist.

(18.02.2009)

21. Berechnen Sie die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang von C abhängig von den Werten der reellen Parameter a und b?

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & 3 & a & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & b & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Erläutern und begründen Sie die Abhängigkeit der Determinante vom Parameter b

(18.02.2009)

22. Betrachten Sie folgendes lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + 4\,x_3 &= 0 \\ 4\,x_1 + 2\,x_2 + a\,x_3 &= 0 \\ x_1 + a\,x_2 + 2x_3 &= 15 \end{aligned}$$

(a) Diskutieren Sie die Lösungsstruktur diese inhomogenen und des zugehörigen homogenen LGS in Abhängigkeit des reellen Parameters a.

(b) Berechnen Sie die Lösung des inhomogenen LGS für $a = 2$ und für $a = 8$.

(24.08.2009)

23. Berechnen Sie die Determinante der Matrix C. Wie groß ist der Rang von C abhängig von den Werten der Parameter a und b?

$$C = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 & 4 \\ a & 1 & 2 & b \\ 3 & a & 2 & 1 \\ a & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Begründen Sie die Art der Abhängigkeit der Determinante vom Parameter b ! (24.08.2009)

24. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= -1 \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Gibt es Wertemengen des reellen Parameters a für die das Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat? Bestimmen Sie für jeden dieser Fälle die entsprechenden Wertemengen von a.

(b) Berechnen Sie - falls möglich - für jeden Fall, für den es genau eine oder mehrere Lösungen gibt, die entsprechende Lösungsmenge des LGS. Wählen Sie dazu je einen repräsentativen Wert für a aus der jeweiligen Wertemenge von a.

(c) Begründen Sie in jedem Fall möglichst detailliert das Lösungsverhalten des Systems.

(07.01.2010)

25. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 &= b \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Welche Beziehung muss zwischen den Parametern a und b bestehen, damit das Gleichungssystem lösbar ist? Wählen Sie einen dementsprechenden Parametersatz und berechnen Sie die zugehörige Lösung. (08.03.2010)

26. Berechnen Sie die Determinante der Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$$

(08.03.2010)

27. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + a\,x_3 &= 1 \qquad a \in \mathbb{R} \\ a\,x_1 + 3\,x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Berechnen Sie für jeden Fall, für den das Gleichungssystems lösbar ist, die, eine oder die allgemeine Lösung. (23.08.2010)

28. Berechnen Sie die Determinante der Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 1+b & 1+b & 1 \\ 1 & 1+c & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1+d \end{pmatrix}$$

(23.08.2010)

29. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten das folgende lineare inhomogene und das zugeordnete homogene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a\,x_1 - x_2 + x_3 &= 2 & \qquad a\,x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + a\,x_2 + 2x_3 &= -2 & \qquad 3x_1 + a\,x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 & \qquad x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(a) Diskutieren Sie die möglichen Lösungsmannigfaltigkeiten der Gleichungssysteme in Abhängigkeit vom Wert des reellen Parameters a .

(b) Berechnen Sie für alle möglichen Fälle je eine exemplarische Lösung für einen von Ihnen gewählten Wert von a.

(c) Begründen Sie in jedem Fall möglichst detailliert das Lösungsverhalten des Systems.

(15.01.2011)

30. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 &= -1 \\ -4\,x_1 - 8\,x_2 - 3\,x_3 &= 7 \qquad a \in \mathbb{R} \\ -2\,x_1 - 5\,x_2 - 2x_3 &= a \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems. Gibt es Werte für a, für die das inhomogene Gleichungssystem Lösungen hat? Wie viele Werte können dies maximal sein? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie ggf. diese Lösungen.

(21.03.2011)

31. Berechnen Sie die folgende Determinante durch elementare Umformungen **ohne** die explizite Berechnung von $(3, 3)$ - oder $(2, 2)$ - Unterdeterminanten:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & -4 & 6 \\ 7 & -2 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & -3 & \pi \end{vmatrix}$$

(21.03.2011)

32. Untersuchen Sie das Lösungsverhalten des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 + & x_2 + & x_3 & = & a \\ x_1 + & (1+a)\,x_2 + & x_3 & = & 2\,a\,, \quad a,b \in \mathbb{R} \\ x_1 + & x_2 + & (1+a)\,x_3 & = & b \end{array}$$

Bestimmen Sie die Lösungen des inhomogenen und des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit der reellen Parameter a und b.

(25.07.2011)

33. Zeigen Sie:

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

(25.07.2011)

34. (a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -p \\ 1 & 2\,q \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p & 0 \\ q & q \end{pmatrix}$$

Für welche Werte der Parameter p und q gilt $AB = BA$?

(b) Gegeben sei die Koeffizientenmatrix A und die rechte Seite $\vec{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

i. Welcher Bedingung müssen u, v und w genügen, damit das Gleichungssystem $A\,\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist?

ii. Es sei $u = 0$ und $v = 1$. Für welchen Wert von w ist das Gleichungssystem lösbar und wie lautet die Lösung?

(10.01.2012)

35. (a) Berechnen Sie die Matrizen $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Bestimmen Sie die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit der reellen Parameter a und b.

$$\begin{array}{rrrcl} a^2 x_1 + & 5\,x_2 + & x_3 & = & b \\ a\,x_1 + & (a+3)\,x_2 + & 3\,x_3 & = & 0\,, \quad a,b \in \mathbb{R} \\ x_1 + & 2\,x_2 + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(19.03.2012)

36. Berechnen Sie für alle Werte der reellen Parameter a, $b \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ a & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & b \end{vmatrix}$$

(19.03.2012)

37. (a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 12 \\ 3 & 7 & -9 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{E}$$

mit der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$. Berechnen Sie $\mathbf{A^2}$ und auf möglichst einfache Art und Weise $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{B^2}$

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 so, dass das die Parabel

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

durch die Punkte mit den Koordinaten $(x, y) = (2, -3)$, $(9, 4)$ und $(t, 4)$ verläuft. Finden Sie die Lösungen für alle $t \in \mathbb{R}$

(30.07.2012)

38. Bestimmen Sie die Nullstellen von

$$D(x) = \begin{vmatrix} x^2 + x - 6 & 4x - 8 & 14 \\ x^2 - 3 & 3x - 5 & 7 \\ x - 3 & x - 3 & 6 \end{vmatrix}$$

(30.07.2012)

39. Gegeben sei die Koeffizientenmatrix A und die rechte Seite $\vec{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Diskutieren Sie die Lösungsstruktur des homogenen $A\vec{x} = \vec{0}$ und des inhomogenen $A\vec{x} = \vec{b}$ Gleichungssystems in Abhängigkeit des reellen Parameters a.

(b) Bestimmen Sie die nichttriviale Lösung des homogenen, sowie je eine Lösung für die verschiedene Lösungstypen des inhomogenen Systems.

(10.01.2013)

40. (a) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ y + z &= a \\ by + z &= 2 \end{aligned}$$

i. Für welche Werte von a und b hat das Gleichungssystem keine Lösung?
ii. Für welche Werte von a und b hat das Gleichungssystem genau eine Lösung?
iii. Für welche Werte von a und b hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

(b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 15x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 17x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(22.02.2013)

41. (a) Bewerten Sie folgenden Aussagen mit ***richtig*** oder ***falsch***:
► Sie brauchen **keine Begründungen** anzugeben!
i. $det((2A)^{-1}(A^T)(2A^T)) = det(A)$ für alle regulären Matrizen A.
ii. Gilt: $det(AB^{-1}) = det(A^{-1}B)$, so gilt auch: $A = B$.

iii. Die quadratischen Matrizen A und A^T haben immer den gleichen Rang.

iv. $A = (a_{ij})$ sei die 2013×2013 Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, für } i \leq j, \\ 0 & \text{, für } i > j. \end{cases}$$

Dann besitzt A eine Inverse.

(b) Von der Matrix A und ihrer Inversen A^{-1} sind folgende Elemente bekannt, x, y und z sind unbekannt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & z & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ y & -3 & -4 \\ 0 & z & z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Matrix X so, dass gilt: $A^{-1}XA = A^2 + A$

(22.02.2013)

2.4 Funktionen

1. (a) Lösen Sie die Gleichung

$$\sin(x)\sin(2x) = 2\cos(x)$$

   (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der Hyperbelfunktionen

$$\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$$

(22.03.2001)

2. (a) Lösen Sie die Gleichung

$$\cos(x)\cos(2x) = 2\cos(x)$$

   (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der trigonometrischen Funktionen

$$\cos(2x) + \sin^2(x) = \cos^2(x)$$

(29.08.2001)

3. Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der trigonometrischen Funktionen

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$$

(04.03.2002)

4. Zeigen Sie unter Verwendung der Eulersch'en Beziehung die Richtigkeit folgender Beziehung

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

(30.08.2002)

5. (a) Bestimmen Sie die reellen Lösungswerte von x der Gleichung

$$\sin(x)\sin(2x) = \cos(x)$$

   (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der Hyperbelfunktionen

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

(21.03.2003)

6. (a) Lösen Sie die Gleichung

$$\ln(x^3) + 3\ln(x^2) - \ln(2x) = 10$$

   (b) Bestimmen Sie die reellen Lösungswerte der Gleichung $\sin(2x) = \cot(x)$ im Intervall $x \in [-2\pi, 2\pi]$

(06.10.2003)

7. (a) Lösen Sie die Gleichung $\tan(x) = \sin(2x)$ für alle reelle Werte von x.
   (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der Hyperbelfunktionen

$$\cosh(2x) = \sinh^2(x) + \cosh^2(x) = 2\cosh^2(x) - 1.$$

(04.03.2004)

8. (a) Lösen Sie die Gleichung $\cot(x) = \cos(2x) + 1$ für alle reelle Werte von x.
   (b) Zeigen Sie entweder unter Verwendung der Eulerschen Relation oder der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$

(30.07.2004)

9. (a) Lösen Sie die Gleichung $\sin(x)(\cos(2x)+1) = \sin(2x)$ für alle reelle Werte von x.
   (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Eulerschen Formel

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x).$$

(28.02.2005)

10. (a) Lösen Sie die Gleichung $\sin(x)(\cos(2x) + 1) = 2\sin(2x)$ für alle reelle Werte von x.
    (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der hyperbolischen Funktionen

$$\coth(2x) = \frac{1 + \coth^2(x)}{2\coth(x)}.$$

(29.08.2005)

11. (a) Lösen Sie die Gleichung $\sin(2x)(\cos(4x)+1) = 2\sin(4x)$ für alle reelle Werte von x.
    (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der hyperbolischen Funktionen

$$\coth(6x) = \frac{1 + \coth^2(3x)}{2\coth(3x)}.$$

(13.03.2006)

12. (a) Lösen Sie die Gleichung $\cot(x)\sin(2x) = \cos(x)$ für alle reellen Werte von x.
    (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der hyperbolischen Funktionen

$$\tanh(6x) = 2\frac{\coth(3x)}{1 + \coth^2(3x)}$$

(28.02.2007)

13. (a) Lösen Sie für alle reellen Werte von x die Gleichung:

$$\tan(x)\cos(2x) = \sin(x).$$

    (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Definition der hyperbolischen Funktionen, dass gilt:

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x)}{1 + \cosh(x)}.$$

(13.08.2007)

14. (a) Lösen Sie für alle reellen Werte von x die Gleichung:

$$\ln(x^4) + 2\ln(x^2) - (\ln(2x))^2 = 10.$$

    (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Eulerschen Relation, dass gilt:

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x).$$

(26.02.2008)

15. (a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung:

$$-2\mathrm{e}^{4x} - 2\mathrm{e}^{2x} + \left(2\mathrm{e}^{2x}\right)^2 - 1 = 0.$$

    (b) Zeigen Sie unter Verwendung der Eulerschen Formel:

$$4\sin(x)^3 + \sin(3x) - 3\sin(x) = 0.$$

(05.08.2008)

16. (a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung:

$$\sinh(x)^2 \cdot \exp(x) - \cosh(x) = 0, \quad \text{mit} \quad \exp(x) = e^x.$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung der Eulerschen Formel:

$$\cos(3x) - 4\cos(x)^3 + 3\cos(x) = 0.$$

(18.02.2009)

17. (a) Lösen Sie die Gleichung:

$$4^{\,x} - 3^{\,x-\frac{1}{2}} = 3^{\,x+\frac{1}{2}} - 2^{\,2\,x-1}$$

(b) Finden Sie alle reellen Lösungen der Gleichung:

$$2\,\sin^2(x) + \sin^2(2\,x) = 2.$$

(24.08.2009)

18. (a) Lösen Sie die Gleichung:

$$2^{\,2^x} - 6^{\,x+\frac{1}{2}} - 6^{\,x-\frac{1}{2}} + 2^{\,2\,x+1} = 0$$

(b) Finden Sie alle reellen Lösungen der Gleichung:

$$2\,\cos^2(x) = 2 - \sin^2(2\,x).$$

(8.3.2010)

19. (a) Lösen Sie die Gleichung:

$$2^{\,4\,x} - 16^{\,x+\frac{1}{3}} - 16^{\,x+\frac{1}{2}} + a \cdot 2^{\,2\,x+1} = 0,\ a \in \mathbb{R}$$

Ist die Gleichung für alle Werte von a lösbar?

(b) Finden Sie alle reellen Lösungen der Gleichung:

$$2\,\sin^2(x) + \cos^2(2\,x) - 2 = 0$$

(23.08.2010)

20. Lösen Sie die Gleichung:

$$3\,a^{\,2\,x} - 2^{\,x+\frac{5}{2}} - 2^{\,x-\frac{1}{2}} + a^{\,2\,x+1} = 0, \quad a > 0$$

(21.03.2011)

21. (a) Vereinfachen Sie durch entsprechende Umformungen:

i. $f(x) = x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$. Bestimmen Sie den Definitionsreich von $f(x)$.

ii. $f(x) = \sin(\arctan(x))$

(b) Lösen Sie die Gleichung

$$a^{\alpha+x} + b a^{\beta-x} = c, \quad a, c > 0$$

(25.07.2011)

22. (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$2\,\cos^2(x) + \sin^2(2x) - 2 = 0$$

(b) Berechnen Sie aus den drei Gleichungen

$$(a\,b)^r = 3\ ,\ a^{-r} = \frac{1}{2}\ ,\ a^{\frac{1}{r}} = 16$$

die drei positiven Zahlen a, b, $r \in \mathbb{R}_+$.

(19.03.2001)

23. Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen der Gleichungen

(a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\ln(x)} + \left(\frac{4}{3}\right)^{\ln(x)} = \frac{25}{12}$

(b) $\tan(x) + \tan(2x) = 0$

(30.07.2012)

24. (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$\begin{array}{rl} (i) & \log_9(3^{-x^2}) = -2 \\ (ii) & \ln(\sqrt{x}) = \ln(3^2) - \ln(3) \end{array}$$

(b) Berechnen Sie aus den drei Gleichungen

$$(a\,b)^r = 5\ ,\ a^{-r} = \frac{1}{2}\ ,\ a^{\frac{1}{r}} = 16$$

die drei positiven Zahlen a, b, $r \in \mathbb{R}_+$.

(22.02.2013)

2.5 Komplexe Zahlen

1. Bestimmen Sie Betrag und Phase sowie alle Quadratwurzeln der komplexen Zahl

$$z = \frac{2-j}{j^3 + (j-1)^2}$$

(22.03.2001)

2. (a) Geben Sie die Bereiche in der komplexen Zahlenebene an, in denen ein Punkt z liegen kann, der folgende Ungleichungen erfüllt:

$$2 < |z| \le 7 \text{ und } -\frac{\pi}{4} < \arg(\mathrm{z}) \le \frac{\pi}{4}$$

   (b) Bestimmen Sie alle Werte von $\sqrt[4]{-8+8j\sqrt{3}}$, $j^2 = -1$.

(29.08.2001)

3. (a) z_1 und z_2 seien zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

   (b) Bestimmen Sie alle Werte von

$$\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{6j}\right)^{1/6}, \; j^2 = -1.$$

(04.03.2002)

4. (a) z_1 und z_2 seien zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

   (b) Bestimmen Sie durch explizite Rechnung alle Werte von

$$(1+j)^{1/4}, \; j^2 = -1.$$

   in Polarform und kartesischer Form.

(30.08.2002)

5. (a) Geben Sie die Bereiche in der komplexen Zahlenebene an, in denen ein Punkt z liegen kann, der folgende Ungleichungen erfüllt:

$$1 < |z| \le 2 \text{ und } 0 < \arg(\mathrm{z}) \le \frac{3\pi}{4}$$

   (b) Bestimmen Sie alle Werte von $\sqrt{-2+2j\sqrt{3-j}}$, $j^2 = -1$.

(21.03.2003)

6. (a) Bestimmen Sie alle Werte von

$$\sqrt[3]{\frac{(1+j)^2}{1-j}}, \; j^2 = -1$$

   in kartesischer Form.

   (b) Welche Bedingungen muss ein Punkt $z = x + jy$ der komplexen Zahlenebene erfüllen, um sich innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt $z_0 = a + jb$ und dem Radius r zu befinden?

(06.10.2003)

7. (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \left(\frac{2-2j}{2+2j}\right)^5, \; j^2 = -1.$$

(b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$z = \cot\left(\frac{\pi}{4} - j\ln(2)\right),\ j^2 = -1.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eulersche Formel für $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(04.03.2004)

8. (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^4 = \left(\frac{3-3j}{3+3j}\right)^9,\ j^2 = -1.$$

(b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$z = \tan(3-j),\ j^2 = -1.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eulersche Formel für $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(30.07.2004)

9. (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^6 + 2z^3 + 2 = 0,\ j^2 = -1.$$

(b) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$z = \tan\left(\frac{\pi}{4} - j\ln(3)\right),\ j^2 = -1.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eulersche Formel für $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(28.02.2005)

10. (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\ln(2)\right),\ j^2 = -1.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eulersche Formel für $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^5 = \left(\frac{4-4j}{4+4j}\right)^6,\ j^2 = -1.$$

(29.08.2005)

11. (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von

$$z = \sin(\pi + j\ln(3)),\ j^2 = -1.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Eulersche Formel für $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^6 = \left(\frac{3-4j}{3+4j}\right)^3,\ j^2 = -1.$$

(13.03.2006)

12. Betrachten Sie die komplexe Zahl

$$a = \frac{3-2j}{2j^3 + (j+2)^2},\ j^2 = -1.$$

(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase von a.

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung $z^4 = a$ und geben Sie diese in kartesischer Darstellung an.

(28.2.2007)

13. (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase der komplexen Zahl a,

$$a = \frac{1-2j}{2j^3 + (j+3)^2}, \quad j^2 = -1.$$

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^5 = b = \frac{j}{32}, \quad j^2 = -1.$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischer Darstellung an. Skizzieren Sie die Lage der Zahl b und aller Lösungen der Gleichung in der Gauß'schen Zahlenebene.

(13.08.2007)

14. (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase der komplexen Zahl a,

$$a = \frac{4-2j}{4j^3 + (2j+1)^2} + \frac{1}{1+j}, \quad j^2 = -1.$$

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^4 = b = 1 + j, \quad j^2 = -1.$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischer Darstellung an. Skizzieren Sie die Lage der Zahl b und aller Lösungen der Gleichung in der Gauß'schen Zahlenebene.

(26.02.2008)

15. (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase der komplexen Zahl a,

$$a = \frac{4-2j}{4j^5 + (2j^3+1)^2} + \frac{j}{1+2j}, \quad j^2 = -1.$$

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^5 = b = 1 - 2j, \quad j^2 = -1.$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischer Darstellung an. Skizzieren Sie die Lage der Zahl b und aller Lösungen der Gleichung in der Gauß'schen Zahlenebene.

(05.08.2008)

16. (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase der komplexen Zahl z_a,

$$z_a = \frac{1-j}{3j^3 + (1-j^3)^3} - \frac{1}{1-j}, \quad j^2 = -1.$$

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^4 = z_b = 8 - 4j, \quad j^2 = -1.$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischer Darstellung an. Skizzieren Sie die Lage der Zahl z_b und aller Lösungen in der Gauß'schen Zahlenebene.

(18.02.2009)

17. (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase der komplexen Zahl a:

$$a = \frac{2-j}{j^3 + (1+j)^4} + \frac{j}{1-j}, \quad j^2 = -1$$

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^2 = b = 1 + \sqrt{-1+j}$$

Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten und in kartesischer Darstellung an. Skizzieren Sie die Lage von b und aller Lösungen der Gleichung in der Gauß'schen Zahlenebene.

(8.3.2010)

18. (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase der komplexen Zahl a:

$$a = \frac{2+j}{j^5 + 2(1-j)^3} + \frac{j}{1-2j}, \quad j^2 = -1$$

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^2 = b = 1 + j - \sqrt{-2-j}$$

Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten und in kartesischer Darstellung an. Skizzieren Sie die Lage von b und aller Lösungen der Gleichung in der Gauß'schen Zahlenebene.

(23.08.2010)

19. (a) $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ seien zwei komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass **allgemein** gilt:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^3 = b = 1 + j\sqrt{3}$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischer Darstellung an. Skizzieren Sie die Lage von b und aller Lösungen der Gleichung in der Gauß'schen Zahlenebene.

(21.3.2011)

20. (a) Welche Menge in der komplexen Ebene wird durch

$$\mathcal{M} = \left\{ z \,\middle|\, 1 \leq |\mathrm{z}| < 2, \frac{\pi}{4} \leq \arg(\varphi) < \frac{3\pi}{4} \right\}$$

beschrieben?

(b) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

$$z^2 = b = 1 + j\sqrt{1 + \frac{1-j}{1+j}}$$

Geben Sie die Lösungen in kartesischer Darstellung an. Skizzieren Sie die Lagen von b und aller Lösungen der Gleichung in der Gauß'schen Zahlenebene.

(25.07.2011)

21. (a) Welche Menge in der komplexen Ebene wird durch

$$\mathcal{M} = \{z = x + jy \in \mathbb{C} \,|\, |4z - 5j| \leq \mathfrak{Im}(4z - 3j) \ \cap \ |z + j| \leq 4\}, \ j^2 = -1$$

beschrieben? Bilden Sie dazu die Durchschnittsmenge der Mengen

$$\mathcal{M}_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |4z - 5j| \leq \mathfrak{Im}(4z - 3j)\} \text{ und } \mathcal{M}_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z + j| \leq 4\},$$

(b) Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile folgender komplexer Zahlen $z = x + jy$:

i. $z = \left(1 + \sqrt{3}j\right)^7$

ii. $z = \dfrac{2+3j}{4-5j}$

iii. $z^2 = 1 + j$

(19.03.2012)

22. (a) Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile folgender komplexer Zahlen $z = x + jy$:

i. $z = \left(\dfrac{1}{j\left(1 - \sqrt{3}\,j\right)}\right)^5$

ii. $z = \left(1 + j^3\right) \cdot \dfrac{1 + 3j}{4 - 6j}$

iii. $z = (1 - j)^{\frac{1}{3}}$

(b) Welche komplexen Zahlen erfüllen die Gleichung $|z + 1 + j| = |z - 1 - j|$?

(30.07.2012)

23. (a) Welche Figur in der komplexen Ebene wird durch

$$\mathcal{M} = \left\{ z = x + jy \in \mathbb{C} \mid z = \frac{t}{2\pi} e^{j\,t}, t \in [0, 4\pi] \right\}, \; j^2 = -1$$

beschrieben? Skizzieren Sie die Figur.

(b) Bestimmen Sie die Real- und Imaginärteile folgender komplexer Zahlen $z = x + jy$:

i. $z = (3 + 3j)^7$

ii. $z = \dfrac{2 - 3j}{-4 + 5j}$

iii. $z^2 = 1 + j$

(22.02.2013)

Kapitel 3

Mathematik 2

3.1 Differentialrechnung

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen nach der Variablen x. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

1. $f(x) = \cos(x)\, x^{\cos(2x)} + \sqrt[x]{\ln(x)}$ (07.08.2001)
2. $f(x) = \sin(x)\, x^{\sin(3x)} + \sqrt[x]{\exp(x)}$ (04.04.2002)
3. $f(x) = x^4 \cot(x^4) + x^2 \arctan(\frac{1}{x})$ (09.08.2002)
4. $f(x) = x^3 \cot(x^5) + x^3 arccot(\frac{1}{x^2})$ (27.03.2003)
5. $f(x) = \sinh(x^3) \ln^2(ax) + \cos(x^2) \tan(x^2)$, a reell (10.10.2003)
6. $f(x) = x^5 \coth(2x) \ln(bx) - \sin(x^4) \cot(x^4)$, b reell (07.04.2004)
7. $f(x) = x^a \sinh(4x) \exp(ax) - \cos^2(x^2) \tan(x^2)$, a reell (06.08.2004)
8. $f(x) = x^a \cosh(-ax) \exp(-3x) - \sin^2(x^4) \cot(x^4)$, a reell (07.03.2005)
9. $f(x) = x^b \cos(4ax) \exp(-ax) - \sinh^3(x^2) \coth(x^2)$, a, b reell (26.07.2005)
10. $f(x) = x^b \tan(x^3) - x^4 \cdot arccot(\frac{1}{x^2})$, b reell (01.03.2006)
11. $f(x) = x^b \sin(4bx) \exp(-ax^2) - \sinh^3(x^4) \coth(x^4)$, a,b reell (05.03.2007)
12. $f(x) = \exp(\sqrt{\ln(ax)}) + \sin(bx) x^{\tan(x)}$, a,b reell (21.06.2007)
13. $f(x) = \exp((\ln(ax))^2) + \cot(x \sin(x^2))$, a reell (20.08.2007)
14. $f(x) = \cos(x) \ln(x)^{\sin(x)} + \cos(\mathrm{e}^x \cos(x^3))$ (03.03.2008)
15. $f(x) = \sin(x) \arctan(x)^{x^n} + \mathrm{e}^{\cos(x) \mathrm{e}^{x^3}}$ (16.06.2008)
16. $f(x) = \cos(x^2)(2x)^{\cos(2x)} + \cos(\tan(x^2) \cos(x^2))$ (28.07.2008)
17. $f(x) = \cos(x) e^{\cos(bx)^2} + \sin(\sin(\sin(x)^2))$ (05.03.2009)
18. $f(x) = \cos(x)\, (\tan(x))^{\ln(x^2)} + \mathrm{e}^{\sin(x) \cot(x^2)}$ (06.07.2009)
19. $f(x) = \sin(x^2)\ \sin(x^2)^{\cos(x^2)-1} + \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\cosh(x)\, e^{\sinh(x)}}}$ (25.08.2009)
20. $f(x) = \sin(x^2)\, e^{\cos(ax) \ln(bx) - bx} + \sin(\cos((e^x)^2))$ (09.03.2010)
21. $f(x) = \cos(\sqrt{\sin(ax)}) + \cos(bx)\, e^{e^{n \ln(c\, x^2)}})$ (02.06.2010)
22. $f(x) = \sin(\sqrt{x})\ \cot(x^2)\, e^{x^n} + \cos(e^{\sin(x^2)})$ (26.08.2010)
23. $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}\, a^{\sin(bx) \ln(cx)} + \cos(\ln((e^x)^2))$, a,b,c $\in \mathbb{R}_+$ (22.03.2011)

24. $f(x) = \sinh\left(\tanh\left(\ln\left(2\,x\right)\right)\right) + \sqrt{a\cos\left(a\sqrt{x + \mathrm{e}^{ax}}\right)}, \quad \mathrm{a} \in \mathbb{R}$ (15.06.2011)

    Hinweis: Prüfen Sie, ob Vereinfachungen möglich sind.

25. $f(x) = \cosh\left(\ln(a\tanh(b\sin(x)))\right) + \cos\left(1 - \sin^2(x)\right)\, b^{\cos(bx)} \quad \mathrm{a,b} \in \mathbb{R}_+$ (02.08.2011)

26. Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ nach der Variablen x:

    $$f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{\,x^2} + \ln\left(x\right)}$$

    Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich! (02.02.2012)

27. Betrachten Sie die Funktion

    $$f(x) = \tan\left(\arcsin\left(x^2\right)\right)$$

    Bestimmen Sie die Tangente $t(x)$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

    Welchen Wert hat $f(x_0)$ an der Nullstelle von $t(x)$: $t(x_0) = 0$? Schätzen Sie diesen Wert ab. (15.06.2012)

28. Betrachten Sie die Funktion

    $$f(x) = \sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right)\right), \; x > 0$$

    (a) Bestimmen Sie die Sekante, die durch die Kurvenpunkte bei $x = 0$ und $x = 1$ geht.

    (b) In welchem Punkt berührt die Tangente mit der gleichen Steigung wie diese Sekante die Funktion $f(x)$?

    (c) In welchen Punkten schneidet diese Tangente die x- und die y-Achse?

    (22.08.2012)

29. Betrachten Sie die Funktion

    $$y = f(x) = e^{a\ln(x) + b}, \; a, b \in \mathbb{R}$$

    Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Steigung der Funktion bei $x = e$ den Wert 10 hat und ihre Krümmung dort verschwindet. Skizzieren Sie die Funktion und finden Sie eine Erklärung für Ihr Ergebnis. (28.02.2013)

3.2 Grenzwerte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{\cos(x)-1}{x}\ln(x)\right)$ (07.08.2001)
2. $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{\sin(x)-x}{2x^2}\ln^2(x)\right)$ (04.04.2002)
3. $\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(\frac{\sin(x)}{x})}{\cos(x)-1}$ (09.08.2002)
4. $\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin(3x)-3x}{x(\cos(2x)-1)}$ (27.03.2003)
5. Für welche reellen Werte von a existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{x(\cos(2x)-1)}{\sin(4x)-ax}\ln(x)\right),$$

und für welche(n) Wert(e) existiert er nicht?

(10.10.2003)
6. $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$ (07.04.2004)
7. $\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(1-\cos(x))}{\ln(x)}$ (06.08.2004)
8. $(a) \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}$ $(b) \lim_{x\to\pi} (\sin(x))^{\sin(x)}$ (07.03.2005)
9. $\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x-\sin(x))}{\ln(x)}$ (26.07.2005)
10. $\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin(x^2)}{x\sin(x)}$ (01.03.2006)
11. $\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(2x-\sin(2x))}{\ln(x)}$ (05.03.2007)
12. $\lim_{x\to 0_+} \frac{x\sin(ax)}{1-\cos(bx)}$ (21.06.2007)
13. $\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos(ax))}{\sin(bx^3)}$, a, b reell (20.08.2007)
14. $\lim_{x\to 0} \frac{x(x-\sin(ax))}{1-\cos(bx)}$, a, b reell (03.03.2008)
15. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)-1}{x(2x-e^{bx}+e^{-bx})}$, a, b reell (16.06.2008)
16. Für welchen Wert des reellen Parameters a existiert der folgende Grenzwert? Berechnen Sie den Grenzwert für diesen Wert von a.
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\cos(ax)-1}\right)$, a reell (28.07.2008)
17. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1-\cos(2x))}{\ln(ax)}\right)$, a *reell* (05.03.2009)
18. $\lim_{x\to 0} \frac{x\,(x-\tan(a\,x))}{1-\cos(b\,x)}$, $a, b \neq 0$,reell. (06.07.2009)
19. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\,\sin(x)}-\cot^2(x)\right)$ (25.08.2009)
20. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos(x)^{\cos(2x)+1}$ (09.03.2010)
21. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)^2}{\sin(ax^2)}$, $a \neq 0,$ reell. (03.06.2010)
22. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x}-\cot(x))$ (26.08.2010)
23. $\lim_{x\to\pi} \sin(x)^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)-1}$ (22.03.2011)
24. Berechnen Sie den Grenzwert:
$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{\cos(x)-1}\right)$ (15.06.2011)

25. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}+\frac{1}{\ln(1-x)}\right)$ (02.08.2011)

26. $\lim_{x\to 1}\left[\ln(x)\,\ln(1-x)\right]$ (02.02.2012)

27. $\lim_{x\to\infty}\left(x\,\ln\left(\frac{a\,x+1}{a\,x-1}\right)\right), \quad a\in\mathbb{R}$ (15.06.2012)

28. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+x^3)-x}{\sin(x^3)\cos(x^3)}$ (22.08.2012)

29. Bestimmen Sie auf geeignete Weise den Grenzwert
$\lim_{x\to 0}\tanh(c\ln(x)),\; c\in\mathbb{R}$ in Abhängigkeit des Parameters c. (28.02.2013)

3.3 Integrale

1. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \cosh^5(x)dx,\ B = \int x^3 \ln(2x)\ln(3b)dx,\ C = \int \frac{x^2+2x+29}{x^3+4x^2+29x}dx$$

(07.08.2001)

2. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \sinh^5(2x)dx,\ B = \int x^2 \ln(3x)\ln(4a)dx,\ C = \int \frac{x^2+2x+28}{x^3+6x^2+28x}dx$$

(04.04.2002)

3. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{dx}{x\sqrt{9+16\ln^2(x)}},\ B = \int \frac{1}{x}\ln(\ln(x))dx,\ C = \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)(x-1)}dx$$

(09.08.2002)

4. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{dx}{x\sqrt{4-8\ln^2(x^2)}},\ B = \int x^3\ln^2(x)dx,\ C = \int \frac{x^3+x-1}{(x^2-4)(x+1)}dx$$

(27.03.2003)

5. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{\cos(x)\,dx}{1-\cos(x)},\ B = \int \sin(\ln(x))dx,\ C = \int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+x}dx$$

(10.10.2003)

6. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int_0^\infty \exp(-4x^2+\ln(x))dx,\ B = \int x\ln^2(4x)dx,\ C = \int \frac{1}{1+x^3}dx$$

(07.04.2004)

7. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x)}dx,\ B = \int \sin(x)\ln(\cos^2(x))dx,\ C = \int \frac{6x^3+8x+4}{(x^2+16)(x^2+36)}dx$$

(06.08.2004)

8. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x-1}}dx,\ B = \int \exp(-\delta t)\cos(\omega t)dt,\ C = \int \frac{3x+5}{(x-1)(x+5)(x+7)^2}dx$$

(07.03.2005)

9. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{(\exp(2x)+3)\exp(x)}{(\exp(2x)+16)(\exp(2x)+32)}dx,\ B = \int \frac{dx}{\sin(x)+2\cos(x)}$$

,

$$C = \int \frac{2x-1}{(x+1)(x+3)(x^2+16)}dx$$

(26.07.2005)

10. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+7}}dx,\ B = \int \exp(-\delta t)\sin(\omega t)dt,\ C = \int \frac{2x+4}{(x+2)(x+3)(x^2+36)}dx$$

(01.03.2006)

11. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{dx}{\sin(2x)+2\cos(x)},\ B = \int \frac{x}{\cos^2(x)}dx,\ C = \int \frac{2x-1}{(x+2)(x+4)(x^2+9)}dx$$

(05.03.2007)

12. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{\sin(x)dx}{\cos(x)+\sin(2x)},\ B = \int \frac{x}{\sin^2(x)}dx,\ C = \int \frac{x^3-x^2+1}{(x-2)(x-1)(x^2+2x+2)}dx$$

(21.06.2007)

13. Berechnen Sie **explizit** folgende Integrale

$$A = \int \frac{dx}{\sin(x)+\cos(x)+1}dx, \quad B = \int \cos(\ln(x))dx, \quad C = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^3+2x^2+x}dx$$

(20.08.2007)

14. Berechnen Sie **explizit** folgende Integrale

$$A = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(2x)}dx, \quad B = \int \frac{x}{(\tan(x))^2}dx, \quad C = \int \frac{x-1}{(x^2-1)(x+1)(x^2+4)}dx$$

(03.03.2008)

15. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int x^2\cos(x^3)\sin(2x^3)dx, \quad B = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x)\ln(3\sin(x)^n)dx$$

(16.06.2008)

16. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{x\sin(x^2)}{\cos(2x^2)}dx, \quad B = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(x)\ln((1+\cos(x))^3)dx$$
$$C = \int \frac{x^2-1}{(x^2-4)(x+1)(x^2+9)}dx$$

(28.07.2008)

17. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{x^2\cos(x^3)}{\sin(x^3)+1}dx, \quad B = \int_0^{\ln(2)} \cosh(x)\ln((1+\sinh(x))^2)dx$$
$$C = \int \frac{2x^3-3x^2+1}{(x^2+2x+4)(x-1)(x^2-9)}dx$$

(05.03.2009)

18. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int_0^{\sqrt{2\pi}} x\sin(x^2)\cos(2x^2)\,dx, \quad B = \int \frac{x\ \arctan(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(06.07.2009)

19. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^3}\,dx, \quad B = \int \frac{x^2\ \cos(x)}{\sin^3(x)}\,dx \quad C = \int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$$

(25.08.2009)

20. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{3\cos(x)+7\sin(x)}{5\cos(x)+2\sin(x)}\,dx \quad B = \int \ln\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)\,dx \quad C = \int \frac{x^3-2\,x^2+4}{x^5-4\,x^4+4\,x^3}\,dx$$

(09.03.2010)

21. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)\cos(x)}{1+\cos(x)}\,dx, \quad B = \int_0^{\ln(2)} \sinh(x)\ln\left(1+\cosh(x)^2\right)\,dx$$

Es dürfen nur die Grundintegrale aus dem Skript verwendet werden. (03.06.2010)

22. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\,dx \quad B = \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\,dx \quad C = \int \frac{x^5+1}{x^6+x^4}\,dx$$

Es dürfen nur die Grundintegrale aus dem Skript verwendet werden. (26.08.2010)

23. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}\,dx \quad B = \int \cosh(x)\ln(1+e^x)\,dx \quad C = \int \frac{x^3-2\,x^2+1}{x^5-3\,x^4+3\,x^3-x^2}\,dx$$

Es dürfen nur die Grundintegrale aus dem Skript verwendet werden. (22.03.2011)

24. Berechnen Sie ***explizit*** (nur die Rückführung auf Grundintegrale ist erlaubt, keine Formelsammlung) folgende Integrale

$$A = \int_0^\infty \frac{1}{\sinh(x) + 3\cosh(x)}\,dx, \quad B = \int \frac{x}{\sinh^2(x)}\,dx$$

Bevor Sie das Integral A berechnen, überlegen Sie, was das Ergebnis sein könnte. Skizzieren Sie Ihre Überlegungen. (15.06.2011)

25. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{1}{a^2\sin^2(x) + b^2\cos^2(x)}\,dx, \quad B = \int x\,\sin(a\,x)\,e^{b\,x}\,dx, C = \int \frac{x^3 + 2\,x^2 + x - 3}{x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 2}\,dx$$

$a,\, b \in \mathbb{R}$ (02.08.2011)

26. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \tan^3(x)\,dx, \quad B = \int x^2\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\,dx \quad C = \int \frac{x^2 - x - 2}{x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 8x - 4}\,dx$$

(02.02.2012)

27. Berechnen Sie die Integrale

$$A = \int \frac{1 - 3\sqrt{x}}{1 + 3\sqrt{x}}\,dx,$$

$$B = \int_0^1 x^2\left(\ln\left(x^3\right)\right)^3 dx$$

Begründen Sie das numerische Ergebnis von B mathematisch exakt! (15.06.2012)

28. Berechnen Sie die Integrale

$$A = \int \frac{4x}{\sqrt{1 - x^2}\,(3 + x^2)}\,dx$$

$$B = \int x^2\,\ln(\sqrt[4]{x^2 + 1})\,dx$$

(22.08.2012)

29. Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{3}x}}{1 + e^x}\,dx$$

(22.08.2012)

30. Berechnen Sie ***explizit*** folgende Integrale

$$A = \int \frac{1}{x}\cot^3(a\ln(bx))\,dx,\ a, b \in \mathbb{R}, \quad B = \int \frac{12x^3 + 36}{\sqrt[5]{3x + 2}}\,dx$$

(28.02.2013)

31. Berechnen Sie ***explizit*** das folgende Integral

$$C = \int \frac{x^4 + 5\,x^3 + 16\,x^2 + 26\,x + 22}{x^3 + 3\,x^2 + 7\,x + 5}\,dx$$

und als Alternative oder als Zusatzaufgabe (3 Punkte) berechnen Sie:

$$C = \int \frac{1}{1 + x^4}\,dx$$

Hinweis und Vorschlag: Bestimmen Sie hier zunächst die komplexen Nullstellen des Nenner und faktorisieren Sie ihn dann in zwei reelle Polynome 2. Grades als Grundlage für die PBZ. (28.02.2013)

3.4 Taylorreihen

1. Entwickeln Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

durch Reihenentwicklung eine Näherungsformel, deren Fehler im Intervall $|x| \leq 1$ kleiner als 0.001 ist. Sie können zur Lösung bekannte Taylorreihen verwenden.

(07.08.2001)

2. Entwickeln Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^3}$$

durch Reihenentwicklung eine Näherungsformel, deren Fehler im Intervall $|x| \leq 0.5$ kleiner als 0.001 ist. Sie können zur Lösung bekannte Taylorreihen verwenden.

(04.04.2002)

3. Bestimmmen Sie genügend viele Glieder der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^5}}$$

um die Funktion an der Stelle $x = 0.5$ auf sechs Dezimalstellen genau auszuwerten.

(09.08.2002)

4. Bestimmmen Sie genügend viele Glieder der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^5}}$$

um die Funktion an der Stelle $x = 0.5$ auf sechs Dezimalstellen genau auszuwerten. Berechnen Sie damit den Wert von $f(x)$ an dieser Stelle mit dieser Genauigkeit.

(27.03.2003)

5. Entwickeln Sie für die Funktion

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{2x^2}$$

durch Reihenentwicklung eine Näherungsformel, deren Fehler im Intervall $|x| \leq 0.7$ kleiner als $1.5 \cdot 10^{-4}$ ist. Sie können zur Lösung bekannte Taylorreihen verwenden.

(10.10.2003)

6. Entwickeln Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden bis zur vierten Dezimale genau:

$$I = \int_0^{\pi/6} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right)^2 dx.$$

Sie können bekannte Taylor-Reihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung.

(07.04.2004)

7. Entwickeln Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden bis zur dritten Dezimale genau:

$$I = \int_0^{0.6} x \exp(-x^2) dx.$$

Sie können bekannte Taylor-Reihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Wie viele Terme der Taylor-Reihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung.

(06.08.2004)

8. Entwickeln Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden auf sechs Dezimalen genau:

$$I = \int_0^{0.9} \frac{\sin(-x^2)}{x} dx.$$

Sie können bekannte Taylor-Reihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Wie viele Terme der Taylor-Reihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung.

(07.03.2005)

9. Entwickeln Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden bis zur vierten Dezimale genau:

$$I = \int_0^{0.9} x \tanh(-x^2) dx.$$

Sie können bekannte Taylor-Reihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Wie viele Terme der Taylor-Reihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung und vergleichen Sie die Fehlerabschätzung mit dem tatsächlichen Fehler.

????

(26.07.2005)

10. Bestimmmen Sie genügend viele Glieder der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^4)^{1/3}}$$

um die Funktion an der Stelle $x = 0.6$ auf fünf Dezimalstellen genau zu berechnen. Wie viele Terme der Taylor-Reihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung und vergleichen Sie die Fehlerabschätzung mit dem tatsächlichen Fehler.

(01.03.2006)

11. Berechnen Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden bis zur vierten Dezimale genau:

$$I = \int_0^{0.5} x^2 \tanh(-2x^2) dx$$

Sie können bekannte Taylorreihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Wie viele Terme der Taylorreihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung und vergleichen Sie die Fehlerabschätzung mit dem tatsächlichen Fehler.

(05.03.2007)

12. Berechnen Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden auf eine Genauigkeit von 1×10^{-9} :

$$I = \int_0^{0.5} \frac{1-\cos(x^2)}{x^4} dx$$

Sie können bekannte Taylorreihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Wie viel Terme der Taylorreihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung.

(20.08.2007)

13. Berechnen Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden auf eine Genauigkeit von 1×10^{-7} :

$$I = \int_0^{\pi/3} x \sin(-x^2) dx$$

Sie können bekannte Taylorreihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Wie viele Terme der Taylorreihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr

Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung.
Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals und vergleichen Sie es mit Ihrem Ergebnis. Wie groß ist der wirkliche Fehler? (0.5 Zusatzpunkte).

(03.03.2008)

14. Berechnen Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden auf eine Genauigkeit von 1×10^{-9} :

$$I = \int_0^{\pi/4} x^2(1 - \cos(-x^3))dx$$

Sie können bekannte Taylorreihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Wie viele Terme der Taylorreihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung.Wie groß ist der exakte Fehler? Vergleichen Sie ihn mit Ihrem Ergebnis und kommentieren Sie!

(28.7.2008)

15. Berechnen Sie das folgende Integral durch Reihenentwicklung des Integranden auf eine Genauigkeit von 1×10^{-7} :

$$I = \int_0^{0.5} \frac{x^3}{\sqrt[4]{1 + x^3}} dx$$

Sie können bekannte Taylorreihen unter Angabe der Quelle und der dort angegebenen Formel benutzen. Wie viele Terme der Taylorreihe benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung.

(05.03.2009)

16. Berechnen Sie die Reihenentwicklung des folgenden unbestimmten Integrals unter Benutzung bekannter Taylorreihen:

$$I(x) = \int \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\, dx$$

Berechnen Sie nun das das bestimmte Integral

$$I = \int_{0.1}^{0.2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\, dx$$

auf eine Genauigkeit von 1×10^{-4}. Wie viele Terme der Reihenentwicklung des Integrals benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine Fehlerabschätzung. (25.08.2009)

17. Berechnen Sie die ersten 5 Terme der Reihenentwicklung des folgenden unbestimmten Integrals unter Benutzung bekannter Taylorreihen:

$$I(x) = \int \sqrt{\cos(x)}\, dx$$

Berechnen Sie nun das das bestimmte Integral

$$I = \int_0^{\pi/6} \sqrt{\cos(x)}\, dx$$

auf eine Genauigkeit von 1×10^{-3}. Wie viele Terme der Reihenentwicklung des Integrals benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine möglichst exakte Fehlerabschätzung.

(09.03.2010)

18. Berechnen Sie die ersten 6 Terme der Reihenentwicklung des folgenden unbestimmten Integrals unter Benutzung bekannter Taylorreihen:

$$I(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + x^5}}\, dx$$

Berechnen Sie nun das das bestimmte Integral

$$I = \int_0^{0.4} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^5}}\, dx$$

auf eine Genauigkeit von 1×10^{-10}. Wie viele Terme der Reihenentwicklung des Integrals benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine möglichst exakte Fehlerabschätzung. (26.08.2010)

19. Berechnen Sie ein Polynom $P_n(x)$ als Näherungsfunktion für die Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)},$$

die diese im Intervall $I = [0, 2]$ mit einer absoluten Genauigkeit von $\epsilon = 0.1$ approximiert.
Wie viele Terme der Reihenentwicklung benötigen Sie? Begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine möglichst exakte, zumindest mit einer heuristischen Fehlerabschätzung.
Sie dürfen dazu bekannte Taylorreihen unter Angabe der Quelle und der verwendeten Formel verwenden. (22.03.2011)

20. Berechnen Sie das Integral

$$\mathcal{J} = \int_0^{\frac{2}{3}} \cos(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\, \mathrm{dx}$$

mit Hilfe einer Reihenentwicklung auf eine Genauigkeit von 5 Dezimalstellen. Führen Sie eine Fehlerabschätzung durch und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem tatsächlichen Fehler.

Sie dürfen dazu bekannte Taylorreihen unter Angabe der verwendeten Formel verwenden. (02.08.2011)

21. Berechnen Sie ein Polynom $P_4(x)$ vom Grad 4 als Näherungsfunktion für die Funktion

$$f(x) = (1+x)^2 \ln(1+x)$$

Zeigen Sie, dass der Fehler $\epsilon(x) = |f(x) - P_4(x)|$ des Polynoms im Intervall $x \in [0, 0.1]$ kleiner ist als $\frac{1}{3}\, 10^{-6}$. (02.02.2012)

22. Berechnen Sie das Taylor'sche Näherungspolynom 2. Ordnung, $P_2(x)$, der Funktion

$$f(x) = \ln\big(1+\sin(x)\big)$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass gilt

$$|f(x) - P_2(x)| \leq 2 \cdot 10^{-4} \quad \text{für} \quad x \in [0, 0.1]$$

Bemerkung: Sollten Sie das Leibnitz-Kriterium verwenden wollen, so müßten Sie zunächst zeigen, dass die Taylorreihe von $f(x)$ alternierend ist. (22.08.2012)

23. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4+x}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Form der Mac Laurin'schen Reihe (Taylor Reihe um $x = 0$) von $f(x)$ und berechnen Sie deren Konvergenzradius.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Form der Taylor Reihe von $f(x)$ um $x = 1$ und berechnen Sie deren Konvergenzradius.

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Form der Taylor Reihe von $g(x) = \ln(x+4)$ um $x = 1$ und berechnen Sie deren Konvergenzradius.

(d) Gibt es für die von Ihnen gefundenen Konvergenzradien eine gemeinsame Erklärung? Wenn ja, welche?

(28.02.2013)

3.5 Fourierreihen

1. Zeichnen Sie die folgende Funktion der Periode $T = 8$ und berechnen Sie ihre Fourier-Reihe:
$$f(t) = \begin{cases} 2-t & \text{für} \quad -4 \leq t \leq 0 \\ t-6 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$$
(24.03.1998)

2. Berechnen Sie die Fourier-Reihe der folgenden Funktion der Periode $T = 2\pi$:
$$f(t) = A\exp(t), \; t \in [0, 2\pi]$$
Geben Sie das Amplitudenspektrum bis $f = 5\omega$ an.
(xx.xx.xxxx)

3. Berechnen Sie die Fourier-Reihe der folgenden der Periode $T = 6$:
$$f(t) = \begin{cases} -t-4 & \text{für} \quad -3 \leq t \leq 0 \\ -4+t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 3 \end{cases}$$
Fertigen Sie zunächst eine Zeichnung der Funkton an und geben Sie das Linienspektrum (erste 5 Spektrallinien) an.
(Sept. 2000)

4. Berechnen Sie die Fourier-Reihe der folgenden Funktion mit der Periode $T = 4$:
$$f(t) = \frac{1}{8}\begin{cases} -t-4 & \text{für} \quad -2 \leq t \leq 0 \\ -4+t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$
Fertigen Sie eine Zeichnung der Funktion an, berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und geben Sie explizit das Linienspektrum der ersten vier Spektrallinien an.

5. Berechnen Sie die Fourier-Reihe der folgenden Funktion mit der Periode $T = 2$:
$$f(t) = \frac{1}{4}\begin{cases} -t^3-1 & \text{für} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ -2+t^3 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$
Fertigen Sie eine Zeichnung der Funktion an, berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und geben Sie explizit das Linienspektrum der ersten vier Spektrallinien an.
(27.03.2003)

6. Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion
$$f(t) = \frac{1}{\pi}(t-\pi)^2, \quad 0 \leq t < 2\pi,$$
die periodisch auf die Menge der reellen Zahlen fortgesetzt wird.

   Fertigen Sie eine Zeichnung der Funktion an, berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und geben Sie die Fourierreihe an. Welche Werte haben die ersten vier Fourierkoeffizienten?
(20.08.2007)

7. Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion
$$f(t) = (t-1)^2 - \frac{1}{2}, \quad 0 \leq t < 2,$$
die periodisch mit der Periode $T = 2$ auf die die Menge der reellen Zahlen fortgesetzt wird.

   Fertigen Sie eine Zeichnung der Funktion an, berechnen Sie die allgemeine Form der Fourierkoeffizienten a_n und b_n und geben Sie die Fourierreihe an. Welche Werte haben die ersten vier Fourierkoeffizienten von a_n und b_n? (28.07.2008)

8. Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$f(t) = t\,\cos(t), \quad -\pi \le t < \pi,$$

die periodisch mit der Periode $T = 2\pi$ auf die die Menge der reellen Zahlen fortgesetzt wird.

Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an, berechnen Sie die allgemeine Form der Fourierkoeffizienten a_n und b_n und geben Sie die Fourierreihe an. Welche Werte haben die ersten vier Fourierkoeffizienten von a_n und b_n? (25.08.2009)

9. Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) = \sinh(ax), \quad -\pi \le x < \pi, \quad a \in \mathbb{R},$$

die periodisch auf die Menge der reellen Zahlen fortgesetzt wird.

Fertigen Sie eine Zeichnung der Funktion an, berechnen Sie die Fourierkoeffizienten und geben Sie die Fourierreihe an. Skizzieren Sie das Spektrum der periodischen Funktion für die ersten fünf Fourierkoeffizienten. (26.08.2010)

10. Gegeben sei die periodische Funktion $f(t)$ der Periode $T = \pi$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\sin(t), \qquad 0 \le t \le \pi$$

- Bestimmen Sie die zugehörige Kreisfrequenz ω und berechnen Sie die Fourierreihe von $f(t)$
- Berechnen und vergleichen Sie die Integrale

$$\mathcal{J}_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{5} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right\}dt$$

Kommentieren und erklären Sie die unterschiedlichen Werte der beiden Integrale!

Bemerkung: Sie dürfen Integraltafeln benutzen! (02.08.2011)

3.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

   $$y''(x) - 3y'(x) = (3x + 2)\exp(3x) + \sin(3x)$$

   Wie lautet die Lösungsschar, die durch den Punkt $P(x = 0, y = 1)$ geht?

   (07.08.2001)

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

   $$y''(x) - 2y'(x) = (2x + 2)\exp(3x) + \cos(3x)$$

   Gibt es eine Lösungsschar, die durch den Punkt $P(x = 0, y = 2)$ geht? Wenn ja, geben Sie diese an!

   (04.04.2002)

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

   $$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (2x + 2)\exp(x) + 2\sin(x) + \cos(3x)$$

   Wie lautet die Lösungsschar, die die Bedingung $y'(0) = 1$ erfüllt?

   (10.10.2003)

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

   $$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \cos(x)\exp(x) + x\ \exp(-x).$$

   Wie lautet die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

   $$y(0) = 0, y'(0) = 1?$$

   (07.04.2004)

5. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

   $$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = x\ \exp(x) + \sin(x).$$

   Wie lautet die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

   $$y(0) = 0, y'(0) = 0?$$

   (06.08.2004)

6. Bestimmen Sie die homogene und die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

   $$y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = x + \exp(-x)\sin(\sqrt{2}x).$$

   Wie lautet die Lösungsschar zu den Anfangsbedingungen

   $$y(0) = 0, y'(0) = \textit{ beliebig}?$$

   (07.03.2005)

7. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

   $$y''(x) + 4y'(x) + y(x) = \sin(x) + \sinh(2x).$$

   Wie lautet die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

   $$y(0) = 0, y'(0) = 0?$$

   (26.07.2005)

8. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = \sin(x) + \exp(5x).$$

Wie lautet die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0?$$

(01.03.2006)

9. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = \cos(2x) + \sinh(2x)$$

Wie lautet die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$y'(0) = 1, y(0) = 1?$$

(05.03.2007)

10. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = (x + 1)\sin(x)$$

Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
(03.03.2008)

11. Gegeben ist die Differentialgleichung (DGl)

$$y''(t) + 2y'(t) = (t + 1)e^{-2t} + \sin(2t)$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung. Wie lautet die spezielle Lösung der DGl zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$. Gibt es eine Lösungsschar, die durch den Punkt $y(t = 0) = 0$ geht? Wenn ja, bestimmen Sie sie. (6.1.2009)

12. Betrachten Sie die Differentialgleichung (DGl)

$$2y''(t) + 3y'(t) + y(t) = (t - 2)e^{-t} + 3\cos(t) - \sin(t)$$

Bestimmen Sie mittels geeigneter Ansätze für die Lösungsfunktion die allgemeine Lösung der homogenen und der inhomogenen DGl. Wie lautet die spezielle Lösung der DGl zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, und $y'(0) = 1$. Gibt es eine Lösungsschar, die die Anfangssteigung $y'(0) = 0$ besitzt? Wenn ja, bestimmen Sie diese. (27.02.2009)

13. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2e^x - 2\cos(x)$$

Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$.

(05.03.2009)

14. Bestimmen Sie mittels geeigneter Ansätze die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (DGL)

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = (2t + 1)e^{-2t} - 20\cos(-2t)$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen und der inhomogenen DGL. Wie lautet die spezielle Lösung der DGL zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Gibt es Lösungen, die durch den Punkt $y'(t = 0) = 1$ gehen? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

(05.01.2010)

15. Betrachten Sie die Differentialgleichung (DGl)

$$2y''(t) - 3y'(t) - 2y(t) \;=\; 50\,(t-1)e^{-t/2} + 68\cos(2t)$$

Bestimmen Sie mittels geeigneter Ansätze für die Lösungsfunktion die allgemeine Lösung der homogenen und der inhomogenen DGl. Wie lautet die spezielle Lösung der DGl zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, und $y'(0) = 0$. Gibt es Lösungen, die die zur Zeit $t = 0$ die Steigung $y'(0) = 1$ besitzen? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

(02.03.2010)

16. Gegeben ist die Differentialgleichung (DGl)

$$y''(x) - 2\,y'(x) + 5\,y(x) = e^{x}(\cos(2x) + 1)$$

Bestimmen Sie die allgemeine Losung der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung. Wie lautet die spezielle Losung der DGl zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 1$? Gibt es Lösungen, die durch den Punkt y(0) = 0 geht? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

(09.03.2010)

17. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) - \tan(x)\,y(x) + 2\,\sin(x) = 0$$

(a) Bestimmen und diskutieren Sie die allgemeine Lösung.

(b) Bestimmen und diskutieren Sie die speziellen Lösungen zu $y(0) = 0$ und $y(0) = 1$.

(15.01.2011)

18. Gegeben ist die Differentialgleichung (DGl)

$$2\,y''(x) + 2\,y'(x) + y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Bestimmen Sie die allgemeine Losung der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung. Wie lautet die spezielle Losung der DGl zu den Anfangsbedingungen $y(0) = -\frac{1}{6}$, $y'(0) = \frac{1}{12}$? Gibt es Lösungen, die durch den Punkt $y'(0) = \frac{1}{3}$ gehen? Wenn ja, bestimmen Sie diese. (22.03.2011)

19. Betrachten Sie die folgende lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2y' + \left(1 + \omega^2\right) y = e^{kt} cos(\omega t), \quad k,\, \omega \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie für $k = -1$ und jeweils für $\omega = 0$ und $\omega = 2$ die allgemeine Lösung $y_h(t)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und geben Sie die jeweiligen Ansätze für die speziellen Lösungen $y_{sp}(t)$ an.

(b) Es sei nun $k = 0$.
Geben Sie für beliebiges $\omega \neq 0$ einen Ansatz für die spezielle Lösung $y_{sp}(t)$ an. Berechnen Sie eine spezielle Lösung und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

(c) Berechnen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = \dfrac{1}{1 + 4\omega^2}$ und $y'(0) = 0$.

(10.1.2012)

20. Gegeben ist die Differentialgleichung (DGl)

$$\tan(x)\,y'(x) + \left(1 + \tan^2(x)\right) y(x) = \tan(x) \quad \text{für} \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Bestimmen Sie die allgemeine Losung der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung. Wie lautet die spezielle Losung der DGl mit $\lim\limits_{x \to 0_+} y(x) = 0$? (02.02.2012)

21. Betrachten Sie die Differentialgleichung (DGl)

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) = s(t) \tag{3.1}$$

mit zunächst unbekannten Koeffizienten a_1 und a_0 und unbekannter Inhomogenität $s(x)$. Die beiden Funktionen

$$y_1(t) = \sin(t) + 2\,e^t$$
$$y_2(t) = \sin(t) + e^t - e^{-t}$$

seien Lösungen dieser DGl.

(a) Bestimmen Sie mit dieser Information die unbekannten Größen der Differentialgleichung (3.1),

(b) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und

(c) die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 3$ und $y'(0) = 2$.

22. (a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$ty' = \frac{1}{y+1}, \quad y(0) = 0$$

Für welche Werte von t ist die Lösung definiert?

(b) Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem mit dem reellen Parameter a

$$y'' - 2y + y' = e^{at}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

i. Bestimmen Sie die Lösung für $a \neq 1$
ii. Bestimmen Sie die Lösung für $a = 1$
iii. Zeigen Sie, dass sich die Lösung aus (ii) sich als Grenzfall der Lösung aus (i) ergibt.

(28.02.2013)

Kapitel 4

Mathematik 3

4.1 Laplacetransformation

1. Berechnen Sie explizit aus der Definitionsgleichung der Lapacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ folgender Funktionen $f(t)$ (Sie dürfen Integraltafeln benutzen)

$$\text{a) f(t)} = \begin{cases} \sin(t) & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \pi \\ t & \text{für} \quad t \geq \pi \end{cases} \qquad \text{b) f(t)} = \text{t}^3 \exp(-2\text{t}).$$

   Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s existieren die Laplacetransformierten in a) und b) ?

   (14.03.1998)

2. Berechnen Sie unter Anwendung geeigneter Sätze zur Laplace - Transformation die inverse Laplacetransformierte der Funktion

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2 - 2s + 5}.$$

   (14.03.1998)

3. Berechnen Sie die Faltung $f(t) = t * e^t$ und deren Laplacetransformierte $F(s) = \mathcal{L}\{t * e^t\}$.

   (14.03.1998)

4. Berechnen Sie explizit aus der Definitionsgleichung der Lapacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktionen $f(t)$ (Sie dürfen Integraltafeln benutzen)

$$\text{a) f(t)} = \begin{cases} \sin(t) & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 1 & \text{für} \quad t \geq \pi/2 \end{cases} \qquad \text{b) f(t)} = \text{t}^3 \exp(-5\text{t}).$$

   Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s existieren die Laplacetransformierten in a) und b) ?

   (01.03.2002)

5. Berechnen Sie ***explizit*** ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ folgender Funktion $f(t)$. Sie dürfen Integraltafeln unter Angabe der **Quelle** und der **benutzten Formel** benutzen

$$f(t) = t \cdot \cosh(2t) \cdot \exp(-2t)$$

   Für welchen Wertebereich der Laplacetransformierten s ist die Laplacetransformierte definiert? Begründen Sie Ihre Antwort! (02.08.2007)

6. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1-s}{(s^2+4)(s-2)}$$

   (02.08.2007)

7. Berechnen Sie ***explizit*** ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ folgender Funktion $f(t)$. Sie dürfen Integraltafeln unter Angabe der **Quelle <u>und</u> der benutzten Formel** benutzen

$$f(t) = \begin{cases} t\cos(2t+\pi) & \text{für} \quad 0 \le t \le \pi \\ t & \text{für} \quad t \ge \pi \end{cases}$$

Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s ist die Laplacetransformierte $F(s)$ definiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

(08.01.2008)

8. Bestimmen Sie mit geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{4s-6}{s^2+4s+13} \cdot e^{-4(s-1)}$$

(08.01.2008)

9. Berechnen Sie ***explizit*** ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ folgender Funktion $f(t)$. Sie dürfen Integraltafeln unter Angabe der **Quelle** und der **benutzten Formel** benutzen

$$f(t) = t^2 \cdot \cosh(t+b) \cdot \exp(t), \;\; b \; reell$$

Für welchen Wertebereich der Laplacetransformierten s ist die Laplacetransformierte definiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

(12.03.2008)

10. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1-2s}{(2s^2+4)(s^2-1)}$$

(12.03.2008)

11. Berechnen Sie ***explizit*** ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ folgender Funktion $f(t)$. Sie dürfen Integraltafeln unter Angabe der **Quelle** und der **benutzten Formel** benutzen

$$f(t) = t \cdot \sinh(2t-b) \cdot \exp(at-b), \;\; a, b \; reell$$

Für welchen Wertebereich der Laplacetransformierten s ist die Laplacetransformierte definiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

(05.08.2008)

12. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1+s+s^2+s^3}{(s^2+9)(2s^2-1)}$$

(05.08.2008)

13. Berechnen Sie ***explizit*** ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ folgender Funktion $f(t)$. Sie dürfen Integraltafeln unter Angabe der **Quelle <u>und</u> der benutzten Formel** und / oder Sätze zur Laplacetransformation unter deren Angabe benutzen.

$$f(t) = \begin{cases} t\sin(\pi t) & \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \text{für} \quad t \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s ist die Laplacetransformierte $F(s)$ definiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

(6.1.2009)

14. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:
$$F(s) = \frac{s+1}{(4s^2+16)(4s^2-9)}$$
(6.1.2009)

15. Berechnen Sie ***explizit*** ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation **oder** unter der Verwendung geeigneter Sätze die Laplacetransformierte $F(s)$ der folgenden Funktion $f(t)$.
$$f(t) = t^2 \cdot \cosh(at-b)e^{-at+b}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$
Sie dürfen bei der expliziten Berechnung Integraltafeln unter Angabe der **Quelle** und der **benutzten Formel** benutzen, bei der Verwendung von Sätzen sind diese anzugeben. Für welchen Wertebereich der Laplace- variablen s ist die Laplacetransformierte definiert? Begründen Sie Ihre Antwort nachvollziehbar!
(27.02.2009)

16. Berechnen Sie ***explizit*** ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktion $f(t)$:
$$f(t) = t \cdot \sin^3(\omega \cdot t), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$
Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s ist die Laplacetransformierte definiert?

Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Sie dürfen Integraltafeln unter Angabe der Quelle und der benutzten Formel benutzen.
(18.08.2009)

17. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:
$$F(s) = \frac{2\,s^3 - s^2 - 1}{(s+1)^2\,(s^2+1)^2}$$
(18.08.2009)

18. Berechnen Sie ***explizit*** ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ folgender Funktion $f(t)$. Sie dürfen Integraltafeln unter Angabe der **Quelle <u>und</u> der benutzten Formel** und / oder Sätze zur Laplacetransformation unter deren Angabe benutzen.
$$f(t) = \begin{cases} t\cos(\pi t) & \text{für} \quad 0 \le t < 2 \\ 2te^{2-t} & \text{für} \quad t \ge 2 \end{cases}$$
Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s ist die Laplacetransformierte $F(s)$ definiert? Begründen Sie Ihre Antwort!
(5.1.2010)

19. Bestimmen Sie mit geeigneten Sätzen der Laplacetransformation die Laplacetransformierte $F(s)$ der Originalfunktion $f(t)$:
$$f(t) = t(t-1)e^{-(t-5)}\sin(3t)\cos(3t)$$
Geben Sie die von Ihnen benutzten Sätze an der entsprechenden Stelle an. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.
(5.1.2010)

20. Berechnen Sie ***explizit***, ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation und **ohne** die Verwendung bekannter Sätze zur Laplacetransformation, die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktion $f(t)$:

$$f(t) = \cos^2(t)\,\sinh(t)\,.$$

Führen Sie die Berechnung durch Rückführung des Laplaceintegrals auf **Grundintegrale** der Integralrechnung durch. Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s ist die Laplacetransformierte definiert? Begründen Sie Ihre Antwort im Verlauf der Rechnung ausführlich, nachvollziehbar und nicht nur formal an den entsprechenden Stellen! (02.03.2010)

21. Berechnen Sie die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktion $f(t)$:

$$f(t) = t^2\,\sinh(at+b)\,e^{-at-b},\;\; a,b \in \mathbb{R}$$

unter Verwendung geeigneter Sätze, sowie durch Rückführung der Integrale auf **Grundintegrale** der Integration durch. Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen existiert die Laplacetransformierte? Begründen Sie wiederum Ihre Antwort inhaltlich und nachvollziehbar im Verlauf der Rechnung! (02.03.2010)

22. Berechnen Sie ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation und/oder unter der Benutzung geeigneter Sätze die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktion $f(t)$:

$$f(t) = t\cdot\cos^2(\omega\,t)\,e^{-t}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie das Ergebnis so geschlossen wie möglich dar. Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s ist die Laplacetransformierte definiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Sie dürfen Integraltafeln (aber keine Tafeln zu Laplace-Transformation) unter Angabe der Quelle und der benutzten Formel benutzen. (30.08.2010)

23. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2-4}{(s+1)\cdot(s^2+2\,s+2)}$$

(30.08.2010)

24. Bestimmen Sie mit geeigneten Methoden und Sätzen der Laplacetransformation die Originalfunktion $f(t)$ der Bildfunktion

$$F(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{2\,s+1}{s^2\,(s+1)}\,e^{-2\,s}$$

Geben Sie die von Ihnen benutzten Sätze an der entsprechenden Stelle an.
Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich. (15.01.2011)

25. Betrachten Sie die Bildfunktion

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)\,(s+2)^2}$$

(a) Welches Zeitverhalten der Originalfunktion erwarten Sie, ohne dass Sie eine Rücktransformation durchgeführt haben? Welchen Definitionsbereich $D_F \in \mathbb{C}$ erwarten Sie daher für die Bildfunktion?

(b) Berechnen Sie das Verhalten der Zeitfunktion $f(t)$ bei $t=0$ und im limes $t\to\infty$?

(c) Erscheinen Ihnen Ihre Ergebnisse glaubwürdig, plausibel und konsistent?
Begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

(15.01.2011)

26. Berechnen Sie ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation und/oder unter der Benutzung geeigneter Sätze die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktion $f(t)$:

$$f(t) = \omega\, t \cdot \cos(\omega\, t + \phi)\, e^{-(\omega\, t+\phi)}, \quad \omega \in \mathbb{R}_+, \phi \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie das Ergebnis so geschlossen wie möglich dar. Für welchen Wertebereich der Laplacevariablen s ist die Laplacetransformierte definiert? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Sie dürfen Integraltafeln (aber keine Tafeln zu Laplace-Transformation) unter Angabe der Quelle und der benutzten Formel benutzen. (25.08.2011)

27. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s^2 + s - 1}{(s^2 + 1)\,(s^2 + 2\,s + 5)}$$

(25.08.2011)

28. Berechnen Sie explizit[1] und/oder unter Benutzung von geeigneten Sätzen[2] zur Laplacetransformation einen geschlossenen Ausdruck für die Laplacetransformierte $F(s)$ von

$$f(t) = e^{-2(t-1)}\, t\, \sin(\omega(t-1))\, \Theta(t-1)$$

$$\text{mit} \quad \Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t > 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}$$

Für welche Werte von s ist $F(s)$ definiert? Begründen Sie dies mathematisch nachvollziehbar und stichhaltig. (10.1.2012)

29. (a) Berechnen Sie die Originalfunktion[3] von

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)\,(s^2 + 4\,s + 1)}$$

(b) Betrachten Sie die Laplacetransformierte

$$F(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 2s - 3}$$

Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten der Originalfunktion $f(t)$ bei $t = 0$ und für $t \to \infty$ im Bild- und im Originalraum. Kommentieren und erklären Sie Ihre Ergebnisse.

(10.1.2012)

30. Berechnen Sie ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation und/oder unter der Benutzung geeigneter Sätze die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktionen:

$$f(t) = |\cos(\omega t)|\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}_+$$
$$g(t) = |\cos(\omega t)|\, e^{-t}$$

Erläutern Sie Ihre Rechnung und stellen Sie das Ergebnis so geschlossen wie möglich dar. (22.3.2012)

[1] Sie dürfen die beigefügten Grundintegrale verwenden, ansonsten nur die Laplacetransformierten der 1, von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$.

[2] deren Verwendung ist jeweils anzugeben!

[3] die Verwendung der oben angegebenen Laplacetransformierten und von Sätzen zur Laplacetransformation ist wie oben erlaubt

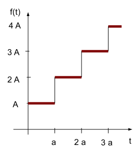
31. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{a + b\, s^2}{s^4 - \omega^4}\,, \qquad a\,, b \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{R}_+$$

(22.3.2012)

32. Berechnen Sie ausgehend von der Definitionsgleichung der Laplacetransformation und/oder unter der Benutzung geeigneter Sätze die Laplacetransformierte $F(s)$ der Treppenfunktion:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{für} \quad 0 < t < a \\ 2A & \text{für} \quad a < t < 2a \\ 3A & \text{für} \quad 2a < t < 3a \\ \ldots & \text{usw.} \quad \ldots \end{cases}$$



(30.08.2012)

33. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{3\, a^2}{s^3 + a^3}\,, \qquad a \in \mathbb{R}$$

(30.08.2012)

34. Berechnen Sie die Laplacetransformierte von $f(t) = \cos^2(t)$ sowohl über die Definitionsgleichung der Laplacetransformation als auch mit Hilfe des Satzes für periodische Funktionen. Sind beide Ergebnisse gleich? Bestimmen und begründen Sie in beiden Fällen den Konvergenzbereich der Laplacetransformation. (11.01.2013)

35. Berechnen Sie explizit[4] und/oder unter Benutzung von geeigneten Sätzen[5] zur Laplacetransformation einen geschlossenen Ausdruck für die Laplacetransformierte $F(s)$ von

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-at}\,(1 - 2at)$$

Hinweis: $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt,\ \lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$ (11.01.2013)

36. (a) Berechnen Sie die Originalfunktion[6] von

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)^2\,(s^2 + 2\,s + 2)^2}$$

Begründen Sie den Zusammenhang der Struktur Ihrer Lösung mit dem Polstellenplan von $F(s)$.

(b) Zusatzaufgabe (+ 2 Punkte): Betrachten Sie die Laplacetransformierte

$$F(s) = \frac{s - 1 + e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}$$

und bestimmen Sie die zugehörige Originalfunktion.

(11.01.2013)

[4] Sie dürfen die beigefügten Grundintegrale verwenden, ansonsten nur die Laplacetransformierten der 1, von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$.

[5] deren Verwendung ist jeweils anzugeben!

[6] die Verwendung der oben angegebenen Laplacetransformierten und von Sätzen zur Laplacetransformation ist wie oben erlaubt

37. (a) Berechnen Sie die Laplacetransformierte $F(s)$ der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le t < 2 \\ e^2\, e^{-t} & \text{für} \quad t > 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie durch eine explizite Betrachtung den Konvergenzbereich von $F(s)$.

(b) Gegeben sei die Laplacetransformierte einer Zeitfunktion $f(t)$ in der Form: $\mathcal{L}\{t\, f(t)\} = \dfrac{1}{s\,(s^2+1)}$. Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $\mathcal{L}\{e^{-t}\, f(2\,t)\}$.

(07.03.2013)

38. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''\,(t) + 4\,y\,(t) = g(t) = \begin{cases} -\dfrac{(t-2\,\pi)^2}{4\pi^2} + 1 & 0 \le t < 2\,\pi \\ \sin\,(t) + 1 & t \ge 2\,\pi \end{cases},$$

$$y'(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

Berechnen Sie die Laplacetransformierte $F(s) = \mathcal{L}\{y\}$ von $y(t)$.
Berechnen Sie **nicht** die Lösung $y = y(t)$! (07.03.2013)

39. Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren die Originalfunktion $f(t)$ der Laplacetransformierten $F(s)$:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s-1)^2(s^2-4s+5)^2}$$

(07.03.2013)

40. Zusatzaufgabe (Antworten Sie ohne Begründung)

Die Rücktransformation von

$$F(s) = \frac{2\,s+1}{s^2+4s+13}$$

ist

(a) $f(t) = e^{2t}(2\cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t))$

(b) $f(t) = e^{-2t}(2\cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t))$

(c) $f(t) = 2\cos(3(t+2)) - \frac{1}{3}\sin(3(t+2))$

(d) $f(t) = 2\cos(3(t-2)) - \frac{1}{3}\sin(3(t-2))$

(07.03.2013)

4.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen und Laplacetransformation

1. Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \quad \text{mit} \quad \mathrm{y}(0) = -1,\ \mathrm{y}'(0) = 0.$$

(14.03.1998)

2. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Differentialgleichung

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \exp(t)\sin(t)$$

für die Anfangsbedingungen $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$. Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung? (02.08.2007)

3. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Differentialgleichung

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{t}\cos(2t)$$

für die Anfangsbedingungen $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung.

(08.01.2008)

4. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Differentialgleichung

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \exp(-2t)\sin(t)$$

für die Anfangsbedingungen $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$. Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung?

(12.03.2008)

5. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Differentialgleichung

$$y''(t) - 2y'(t) + 6y(t) = \exp(-2t)\cosh(2t)$$

für die Anfangsbedingungen $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$. Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung?

(05.08.2008)

6. Lösen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Differentialgleichung

$$y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = e^{-4t}\sinh(t)$$

für die Anfangsbedingungen $y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{39}{40}$. Wie lauten die allgemeinen Lösungen der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung? (27.02.2009)

7. Bestimmen Sie mit der Methode der Laplacetransformation die allgemeinen Lösungen der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung von

$$y''(t) + 3y'(t) + 3y(t) = e^{-\frac{3}{2}t}\cos(2t)$$

Wie lautet die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = -\dfrac{3}{13}$ und $y'(0) = \dfrac{4}{13}$?

(18.08.2009)

8. Berechnen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die allgemeine homogene und inhomogene Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = e^{t}\sin(t)$$

Wie lautet die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$? (02.03.2010)

9. Bestimmen Sie mit der Methode der Laplacetransformation die allgemeinen Lösungen der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^t \sin(t)$$

Wie lautet die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = -\frac{2}{3}$, $y'(0) = 1$? (30.08.2010)

10. Bestimmen Sie mit der Methode der Laplacetransformation die allgemeinen Lösungen der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = e^t \sin(\sqrt{2}\, t)$$

Wie lautet die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$?
,
(25.08.2011)

11. Bestimmen Sie ausschließlich mit der Methode der Laplacetransformation die allgemeinen Lösungen der inhomogenen und der zugeordneten homogenen Differentialgleichung

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t < 1 \\ e^{1-t} & \text{für} \quad 1 \le t \end{cases}$$

Wie lautet die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$? (22.3.2012)

12. Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\,\kappa\,\dot{x}(t) + 25\,x(t) = f(t) \tag{4.1}$$

(a) Lösen Sie mittels Laplace-Transformation die homogene Differenzialgleichung für $\kappa = 3$ und den Anfangsbedingungen $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$.

(b) Lösen Sie mittels Laplace-Transformation die inhomogene Differenzialgleichung für $\kappa = 0$ und den Anfangsbedingungen $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ für

i. $f(t) = \cos(3\,t)$

ii. $f(t) = \cos(5\,t)$

Warum sind in den beiden Fällen die Lösungsfunktionen verschieden, obwohl jeweils eine harmonische Anregung $f(t)$ vorliegt?

(c) Lösen Sie mittels Laplace-Transformation die inhomogene Differenzialgleichung für $\kappa = 0$ und den Anfangsbedingungen $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ für

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \in [0, T] \\ 0 & \text{für} \quad t \in (T, \infty) \end{cases} \quad , T > 0, \text{ fest} \tag{4.2}$$

Kann man die Dauer des Anregungsimpulses so wählen, dass das System nach Ende der Anregung ($t > T$) nicht mehr schwingt? Wie müsste T dann gewählt werden?

(30.08.2012)

13. Bestimmen Sie ausschließlich mit der Methode der Laplacetransformation die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) + y(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für} \quad 0 \le t < 2\pi \\ 0 & \text{für} \quad t \ge 2\pi \end{cases}$$

zu den Anfangsbedingungen $y(0) = a$, $a \in \mathbb{R}, y'(0) = 0$. Diskutieren Sie die Zusammensetzung und den zeitlichen Verlauf der Lösung in Abhängigkeit vom Wert des Parameters a. (07.03.2013)

4.3 Funktionen mehrerer Variabler

1. Gegeben sei die Funktion zweier Variablen

$$z = f(x, y) = x^3y^2(12 - x - y).$$

Welche Definitionsbereiche besitzt diese Funktion und ihre ersten partiellen Ableitungen? Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y)$ für positive x und y.

(14.03.1998)

2. Gegeben sei die Funktion zweier Variablen

$$z = f(x, y) = (x - y)(xy - 4).$$

Welche Definitionsbereiche besitzt diese Funktion und ihre ersten partiellen Ableitungen? Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y)$.

(13.08.1999)

3. Gegeben sei die Funktion zweier Variablen

$$z = f(x, y) = (x - 2y)(xy - 8).$$

Welche Definitionsbereiche besitzt diese Funktion und ihre ersten partiellen Ableitungen? Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y)$.

(03.04.2000)

4. Gegeben sei die Funktion zweier Variablen

$$z = f(x, y) = xy(10 - 2x - 5y).$$

Welche Definitionsbereiche besitzt diese Funktion und ihre ersten partiellen Ableitungen? Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y)$.

(27.07.2000)

5. Gegeben sei die Funktion zweier Variablen

$$z = f(x, y) = 2xy(10 - x - 6y).$$

Welche Definitionsbereiche besitzt diese Funktion und ihre ersten partiellen Ableitungen? Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y)$.

(13.03.2001)

6. Gegeben sei die Funktion zweier Variablen

$$z = f(x, y) = x^3y^3(1 - x + y).$$

Welche Definitionsbereiche besitzt diese Funktion und ihre ersten partiellen Ableitungen? Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y)$.

(08.08.2001)

7. Gegeben sei die Funktion zweier Variablen

$$z = f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 20xy + 10x - 6y + 10.$$

Welche Definitionsbereiche besitzt diese Funktion und ihre ersten partiellen Ableitungen? Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x, y)$.

(01.03.2002)

8. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktionen

$$\text{a) } \mathrm{f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 12y} \quad \text{b) } \mathrm{f(x,y) = e^x(2x + y^2)}$$

(16.03.2005)

9. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktionen

$$\text{a) } \mathrm{f(x,y) = \frac{1 + x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}} \quad \text{b) } \mathrm{f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy, a > 0}$$

(17.08.2005)

10. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktionen

$$\text{a) } \mathrm{f(x,y) = 4(x-2)(y^2 + 10y) + 3x^3} \quad \text{b) } \mathrm{f(x,y) = \frac{1 + x + y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}}$$

(07.03.2006)

11. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 4(x^2 - 4)(y^2 + 10y) + 3y^3$$

(23.02.2007)

12. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 4(x^2 - 4)(y^2 - 4) + 3y^2$$

(02.08.2007)

13.
- Skizzieren Sie das Gebiet $\boldsymbol{B}$ im 3. und 4. Quadranten der (x,y)-Ebene, das begrenzt wird durch die Kreise um den Ursprung mit dem Radius $r = 2$ und $r = 3$ und die Kurven $y = \frac{x}{2}$ und $y = -\frac{x}{4}$.
- Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = 2 \cdot x^2 + y^2$ das Doppelintegral über das Gebiet $\boldsymbol{B}$

(02.08.2007)

14. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 4x(x-2)(y^2 - 4) + 3y^2$$

(12.03.2008)

15. (a) Skizzieren Sie das Gebiet $\boldsymbol{B}$ im 1. und 2. Quadranten der (x,y)-Ebene, das begrenzt wird durch die Kreise um den Ursprung mit dem Radius $r = 3$ und $r = 5$ und die Kurven $y = \pi x$ und $y = -\frac{1}{\pi}x$.

    (b) Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = x \cdot y$ das Doppelintegral über das Gebiet $\boldsymbol{B}$

(12.03.2008)

16. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = 4x^2(x^2 - 2)(y^2 - 4) + y^2$$

(05.08.2008)

17. (a) Skizzieren Sie das Gebiet $\boldsymbol{B}$ in der (x, y)-Ebene, das begrenzt wird durch die Funktionen $y = 6 - (x-2)^2$ und $y = (x-2)^2 - 4$

(b) Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y) = x \cdot y$ das Doppelintegral über das Gebiet $\boldsymbol{B}$. Vereinfachen Sie ihr Ergebnis so weit wie möglich.

(05.08.2008)

18. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 4x^2(x^2-2)(y^2-1) - 5y^2$$

(27.02.2009)

19. (a) Skizzieren Sie das Gebiet $\mathbf{A}$ in der (x, y)-Ebene, das begrenzt wird durch die Funktionen $y = x^3 - 4 \quad$ und $y = 4x^2 - 4$

(b) Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ das Doppelintegral über das Gebiet $\mathbf{A}$.

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbf{A}} f(x, y) dA$$

(27.02.2009)

20. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{(a-x)\,(a-y)\,(x+y-a)}$$

(18.08.2009)

21. (a) Skizzieren Sie das Gebiet $\mathcal{B}$ in der (x, y)-Ebene, das durch die Ungleichung $x^2 + y^2 \leq 2\,x$ beschrieben wird.

(b) Berechnen Sie mit der Funktion $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{\,2}$ das Doppelintegral $\iint_{\mathcal{B}} f(x, y)\, dx\, dy$ durch eine geeignete Parametrisierung des Integrals.

(18.08.2009)

22. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{-2xy}$$

(02.03.2010)

23. Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = (x-1)^3 + y^3 - 3\,(x-1)\,y$$

(30.08.2010)

24. (a) Skizzieren Sie das Gebiet $\mathcal{B}$ in der (x, y)-Ebene

$$\mathcal{B} = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} < 1,\ -2\,x \leq y \leq x \right\}$$

(b) Berechnen das Doppelintegral

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x, y)\, dx\, dy, \quad \text{mit} \quad f(x, y) = x\, y\, e^{-x^2 - y^2}$$

durch eine geeignete Parametrisierung des Integrals.

(30.08.2010)

25. (a) Berechnen Sie die Punkte, in denen die Tangente an die Kurve

$$f(x, y) = x^4 + 4y^2 - 2x^2 - 2y - 2 = 0$$

parallel oder senkrecht zur x-Achse verläuft

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Flächen, die durch die Funktionen

$$xy = \frac{a^2}{2}, \quad xy = 2a^2$$
$$y = \frac{x}{2}, \qquad y = 2x$$

eingeschlossen werden (25.08.2011)

26. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x\,y\,e^{y - x^2}\,, \qquad x\,,y \in \mathbb{R}$$

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von $f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert von $f(x,y)$ im Gebiet

$$\mathcal{A} = \big\{(x,y)\,|\,x^2 - 3 \le y \le 0\big\}\,.$$

(22.3.2012)

27. (a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet und berechnen Sie das Doppelintegral

$$\mathcal{J} = \iint_{\mathcal{B}} x\,y\,dS \text{ mit } \mathcal{B} = \Big\{(r,\varphi)\;\Big|\;0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\, 1 \le r \le a\cos^2(\varphi)\Big\}\,.$$

(b) Gegeben sei das Doppelintegral

$$\mathcal{J} = \int_1^2 \left\{\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\right\}\,dx$$

Skizzieren Sie das Integrationsgebiet $\mathcal{B}$ und formulieren Sie das Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge.

(22.3.2012)

28. (a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + x\,y + \sin^2(x\,y\,z)$$

Berechnen Sie das vollständige Differential von $f(x,y,z)$ im Punkt $P = (1,1,\pi)$

(b) Berechnen Sie die Tangente an die Kurve

$$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$$

im Punkt $P = (1,2)$

(c) Welcher Punkt der Fläche

$$z(x,y) = \sqrt{1 + (x - 2\,y)^2}$$

hat den kleinsten Abstand zum Punkt $P = (1,-2,0)$?

(30.08.2012)

29. Berechnen Sie die Integrale

(a) der Funktion $f(x,y) = 3\,x\,y$ über das Gebiet, das von den Funktionen

$$y = 6x,\; y = \frac{6}{x},\; y = x - 1$$

und der x-Achse begrenzt wird.

(b) der Funktion $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ über das Gebiet, das von den Funktionen

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = 1,\; r(\varphi) = \frac{\varphi}{\pi},\; \varphi \in [\pi, 3\pi]$$

und der x-Achse begrenzt wird.

(30.08.2012)

30. (a) Skizzieren Sie das Integrationsgebiet $\mathcal{B}$ und berechnen Sie das Doppelintegral

$$\mathcal{J} = \iint_{\mathcal{B}} dS = \int_0^2 \int_{\frac{3}{2}x}^{\sqrt[3]{x/2}} dy\,dx$$

Wie groß ist die Fläche, die von den beiden Funktionen, die das innere Integral begrenzen, eingeschlossen wird? Ist sie gleich dem Wert des Doppelintegrals $\mathcal{J}$? Formulieren Sie weiterhin das Integral mit vertauschter Integrationsreihenfolge.

(b) Berechnen Sie das Doppelintegral

$$\mathcal{J} = \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \ln(x^2 + y^2 + 1)\,dx \right\} dy$$

Skizzieren Sie das Integrationsgebiet und berechnen Sie zur Kontrolle dessen Fläche, bevor Sie das Doppelintegral $\mathcal{J}$ berechnen.

(07.03.2013)

31. Zusatzaufgabe (Antworten Sie ohne Begründung)
Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge im folgenden Doppelintegral

$$\int_0^8 \int_{x/4}^{2} f(x,y)dydx = \int_r^s \int_p^q f(x,y)dxdy$$

Was ist q ?

(a) $4y$

(b) $16y^2$

(c) x

(d) 8

(07.03.2013)

4.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Müssen die Eigenvektoren von A zueinander orthogonal sein? Wenn ja, warum? Überprüfen Sie unter diesem Gesichtspunkt Ihr Ergebnis.

(14.03.1998)

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Müssen die Eigenvektoren von A zueinander orthogonal sein? Wenn ja, warum? Überprüfen Sie unter diesem Gesichtspunkt Ihr Ergebnis.

(13.08.1999)

3. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Müssen die Eigenvektoren von A zueinander orthogonal sein? Wenn ja, warum? Überprüfen Sie unter diesem Gesichtspunkt Ihr Ergebnis.

(03.04.2000)

4. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Müssen die Eigenvektoren von A zueinander orthogonal sein? Wenn ja, warum? Überprüfen Sie unter diesem Gesichtspunkt Ihr Ergebnis.

(27.07.2000)

5. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Müssen die Eigenvektoren von A zueinander orthogonal sein? Wenn ja, warum? Überprüfen Sie unter diesem Gesichtspunkt Ihr Ergebnis.

(13.03.2001)

6. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Müssen die Eigenvektoren von A zueinander orthogonal sein? Wenn ja, warum? Überprüfen Sie unter diesem Gesichtspunkt Ihr Ergebnis.

(08.08.2001)

7. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Müssen die Eigenvektoren von A zueinander orthogonal sein? Wenn ja, warum? Überprüfen Sie unter diesem Gesichtspunkt Ihr Ergebnis.

(26.07.2002)

8. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Müssen die Eigenvektoren von A zueinander orthogonal sein? Wenn ja, warum? Überprüfen Sie unter diesem Gesichtspunkt Ihr Ergebnis.

(17.04.2003)

9. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Wählen Sie für a einen geeigneten Wert, damit A orthogonale Eigenvektoren besitzt. Begründen Sie Ihre Wahl.

   (b) Berechnen Sie mit diesem Wert von a die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von A.

(18.08.2004)

10. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems:

$$A = \begin{pmatrix} 9+3j & 0 & 3j \\ 0 & 9+3j & -4j \\ -3j & 4j & 9+3j \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren sind in normierter Form anzugeben.

(16.03.2005)

11. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & 0 \\ -j & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren sind in normierter Form anzugeben. Warum sind die Eigenwerte reell? Stehen die Eigenvektoren senkrecht aufeinander? Begründen Sie Ihr Ergebnis.

(17.08.2005)

12. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems:

$$A = \begin{pmatrix} 4+2j & 0 & 2j \\ 0 & 4+2j & -6j \\ -2j & 6j & 1+2j \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren sind in normierter Form anzugeben.

(07.03.2006)

13. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie die Eigenvektoren in normierter Form an. Was können Sie über die Eigenschaften der Eigenvektoren aussagen? Begründen und überprüfen Sie Ihre Aussage!

(23.02.2007)

14. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Normieren Sie die Eigenvektoren. Welche Eigenschaften haben die Eigenvektoren? Begründen und verifizieren Sie Ihre Aussage!

(02.08.2007)

15. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & j \\ 0 & 1 & 1 \\ -j & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; j^2 = -1.$$

Normieren Sie die Eigenvektoren. Welche Eigenschaften haben die Eigenvektoren? Begründen und verifizieren Sie Ihre Aussage! (12.03.2008)

16. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & j & j \\ -j & 2 & 1 \\ -j & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; j^2 = -1.$$

Welche Eigenschaften haben die Eigenvektoren? Begründen und verifizieren Sie Ihre Aussage! Im Fall mehrfacher Eigenwerte, bestimmen Sie, falls möglich, einen zugeordneten Satz orthonormaler Eigenvektoren.

(05.08.2008)

17. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaften haben die Eigenvektoren? Begründen und verifizieren Sie Ihre Aussage! Im Fall mehrfacher Eigenwerte, bestimmen Sie, falls möglich, einen zugeordneten Satz orthonormaler Eigenvektoren.

(27.02.2009)

18. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ a & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Welche Eigenschaften haben die Eigenwerte, welche die Eigenvektoren? Gibt es dafür Begründungen? Wenn ja, geben Sie diese an.

(18.08.2009)

19. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Welche Eigenschaften haben die Eigenvektoren? Begründen und verifizieren Sie Ihre Aussage! Im Fall mehrfacher Eigenwerte bestimmen Sie, falls möglich, einen zugeordneten Satz orthonormaler Eigenvektoren. (02.03.2010)

20. Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Welche Eigenschaften haben die Eigenwerte, welche die Eigenvektoren? Gibt es dafür Begründungen? Wenn ja, geben Sie diese an. (30.08.2010)

21. Zeigen Sie, dass $\lambda = j$ Eigenwert der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 12 & -11 & 6 & 6 \\ 15 & -10 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$
ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A und geben Sie die zugehörigen Eigenräume an. (25.08.2011)

22. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A , geben Sie die zugehörigen Eigenräume an und kommentieren Sie Ihr Ergebnis:
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
Gibt es einen Vektor $\vec{v}$, der die Gleichung $A\vec{v} = 2\vec{v}$ erfüllt? (22.3.2012)

23. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
und geben Sie die zugehörigen Eigenräume an. Berechnen Sie eine Orthornormalbasis von Eigenvektoren und geben Sie eine orthornormale Matrix B und eine Diagonalbasis D an, so dass $B^T AB = D$ gilt. (30.08.2012)

24. Bestimmen Sie eine orthornormale Basis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der folgenden Matrix besteht:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Können Sie schon **vor** der Eigenwert- und -vektorberechnung Aussagen über die zu erwartenden Eigenwerte und die Struktur der Eigenvektoren machen?

Finden Sie eine Matrix Q derart, daß mit einer Diagonalmatrix D gilt: $A = QDQ^T$

(07.03.2013)

25. Zusatzaufgabe (Antworten Sie ohne Begründung)

Es seien A eine $n \times n$ - Matrix und λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$ zwei verschiedene Eigenwerte von A. Was ist richtig?

(a) λ ist Eigenwert von A^T

(b) λ ist Eigenwert von $-A$

(c) $\vec{u}$ sei Eigenvektor zum Eigenwert λ und $\vec{v}$ sei Eigenvektor zum Eigenwert μ. Dann sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig.

(07.03.2013)

Kapitel 5

Lösungen Mathematik 1

5.1 Vektorrechnung

1. (a) $(\vec{q}-\vec{p})\cdot\{(\vec{r}-\vec{p})\times(\vec{s}-\vec{p})\}\neq 0$.
   (b) $A_\Delta = \sqrt{5}$.
2. $A_\Delta = \frac{1215}{4}\cdot\sqrt{2}$.
3. (a) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq 0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}\neq 0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$,
   $A_\Delta = 2\cdot\sqrt{5}$.
   (b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
4. (a) $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\neq 0$, $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\neq 0$, $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})\neq 0$,
   $A_\Delta = 2\cdot\sqrt{5}$.
   (b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
5. (a) $(\vec{q}-\vec{p})\cdot\{(\vec{r}-\vec{p})\times(\vec{s}-\vec{p})\}\neq 0$.
   (b) $A_\Delta = \sqrt{86}$.
6. (a) $V=1331$, $C=(-9,6,2)$.
   (b) $A_\Delta = \frac{121}{2}$.
7. (a) $A_\Delta = 9$.
   (b) $V=10$.
   (c) $h=\frac{10}{3}$.
8. (a) $A_\Delta = 50\cdot\sqrt{3}$.
   (b) $V=\frac{50}{3}\cdot\sqrt{6}$.
9. (a) $\left|\vec{d_1}\right|=\sqrt{182}$, $\left|\vec{d_2}\right|=\sqrt{26}$, $\gamma\approx 40.89°$, $A_P = 13\cdot\sqrt{3}$.
   (b) $\delta\approx 35.26°$.
10. (a) $\left|\vec{d_1}\right|=\sqrt{165}$, $\left|\vec{d_2}\right|=\sqrt{29}$, $\gamma\approx 175.94°$, $A_P=\sqrt{6}$.
    (b) $\delta\approx 54.74°$.
11. (a) $\left|\vec{d_1}\right|=4\cdot\sqrt{14}$, $\left|\vec{d_2}\right|=6$, $\gamma\approx 168.51°$, $A_P = 4\cdot\sqrt{5}$.
    (b) $\delta\approx 23.58°$.
12. $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\cdot\sqrt{2}\\2\cdot\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $A_\Delta = 18\cdot\sqrt{2}$.

13. $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $A_\Delta = 4\cdot\sqrt{2}$.

14. (a) $(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{d}-\vec{a})\}=0$
    (b) $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\neq 0$, $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{d}-\vec{a})=0$
    (c) $A_\Delta=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{6}$.

15. (a) $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$, $A_\Delta = 4\cdot\sqrt{17}$
    (b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

16. (a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=3\cdot\begin{pmatrix}\cos(\frac{3\pi}{8})\\\sin(\frac{3\pi}{8})\\0\end{pmatrix}$
    (b) $\lambda=\frac{2}{3}$
    (c) $A_\Delta=4\cdot\sin(\frac{3\pi}{8})$

17. (a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=4\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\\sin(\varphi)\\0\end{pmatrix}$ $\;mit\;\varphi=\frac{3\pi}{5}$
    (b) $\lambda=\frac{3}{8\cos(\varphi)}$
    (c) $A_\Delta=\left|\frac{27}{4}\cdot\tan(\varphi)\right|\approx 20,77$; $\alpha=\angle(\vec{c},\vec{d})\approx 91,46^o$; $\beta=\gamma\approx 44,27^o$

18. (a) nein ($D\notin Ebene\,(ABC)$)
    (b) nein (alle Seitenlängen verschieden)
    (c) $\alpha=\angle(\vec{AB},\vec{AC})\approx 33,31^o$; $\beta=\angle(\vec{AB},\vec{BC})\approx 116,89^o$; $\gamma=\angle(\vec{AC},\vec{BC})\approx 29,79^o$
    $A_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{34+8\sqrt{2}}\approx 3,366$

19. $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$, $\lambda=-1+\sqrt{13}$, $\gamma=\angle(\vec{c},\vec{d})\approx 163,64^o$

$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{13}-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1-\sqrt{13}\end{pmatrix}$, $V_{Spat}=10\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)\approx 45,13$

20. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$
    (a) $\lambda=\frac{1}{2}$
    (b) $A_\Delta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\vec{c}|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\left|\vec{d}\right|=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\left|\vec{f}\right|=2$, $\alpha=\angle(\vec{c},\vec{f})=22,5^o$, $\beta=\angle(\vec{d},\vec{f})=67,5^o$
    (c) ja [in (x_1,x_2)-Ebene]

21. (a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})\;=\;0$
    $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=12\cdot\begin{pmatrix}-4\\7\\-1\end{pmatrix}$
    (b) $F=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}$

22. (a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})\;=\;76$
    $((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c})\times\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

(b) $\lambda = \frac{5}{2} - \sqrt{3}$

23. (a) $\lambda_1 = \frac{1}{12}$, $\lambda_2 = \frac{5}{8}$
    $A_{allg} = \lambda + 1 \quad A_{\lambda_1} = \frac{13}{12} \quad A_{\lambda_2} = \frac{13}{8}$

    (b) $4\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

24. (a) $\lambda = 1$, $\vec{a} = \frac{5}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c})$

    (b) $A = 50\sqrt{2}$

25. keine Lösungsangabe

26. (a) i. $2\,\vec{a}^2 - 15\,\vec{b}^2 + 12\,\vec{c}^2 - \vec{a}\vec{b} - 11\,\vec{a}\vec{c} - 11\,\vec{b}\vec{c}$
    ii. $-11\vec{a} \times \vec{b} - 5\vec{a} \times \vec{c} - 29\vec{b} \times \vec{c}$

    (b) $\vec{a_b} = \frac{3}{10}\,\vec{b}$; $\vec{a_{\perp b}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{19}{10} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

    (c) $\left|\vec{d_1}\right| = \sqrt{10 - 3\sqrt{3}}$; $\left|\vec{d_2}\right| = \sqrt{10 + 3\sqrt{3}}$; $A = \frac{5}{2}$ F.E.

27. (a) $\vec{c} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$

    (b) i. Gleichung lösbar für $k = -1$
    ii. $\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

28. (a) $d = \sqrt{\frac{2}{3}}$

    (b) i. zu zeigen: $\vec{PQ} \times \vec{PR} = \vec{s}$
    ii. $d = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}|}$

29. (a) $|\vec{s}| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2\,|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right| \cos(\gamma)}$

    (b) i. $\left|\vec{d_1}\right| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}(\lambda - 3) + (\lambda - 3)^2}$; $\left|\vec{d_2}\right| = \lambda + 3$;
    ii. $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\lambda + 3)$ F.E.
    iii. $A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \lambda = -1$

    (c) Die von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Ebene E_1 liegt zu der von den Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ aufgespannte Ebene E_2
    i. senkrecht
    ii. parallel

30. (a) Ansatz: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$ ...

    (b) i. $d(\lambda) = \sqrt{11\lambda^2 + 22\lambda + 17} = \sqrt{11(\lambda + 1)^2 + 6}$; $\quad d_{min} = d(-1) = \sqrt{6}$;
    $P(4, 1, 3)$ ist Lotfußpunkt des von C auf die Gerade gefällten Lotes
    ii. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$; Ebene$_{ABC}$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \vec{x} - 21 = 0$
    iii. $AD = n \rightarrow$ D in Ebene senkrecht zu ABC ;
    $AD \cdot AB = 0$; V$_{Tetraeder} = 11$

5.2 Ungleichungen

1. $\mathbb{L} = \left]-\infty, 1 - \sqrt{3}\right] \cup \left[1 + \sqrt{3}, \infty\right[$
2. $\mathbb{L} = \left]-\infty, 1 - \sqrt{7}\right] \cup \left[1 + \sqrt{7}, \infty\right[$
3. $\mathbb{L} = \left[\frac{-11-\sqrt{105}}{2}, \frac{-11+\sqrt{105}}{2}\right]$
4. $\mathbb{L} = \left]-\infty, \frac{11-\sqrt{137}}{2}\right] \cup \left[\frac{11+\sqrt{137}}{2}, \infty\right[$

5. $\mathbb{L} = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{23}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{23}}{2}, \infty\right[$

6. $\mathbb{L} = \left[3 \cdot \left(-3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right), 3 \cdot \left(-3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)\right]$

7. $\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, \infty\right[$

8. $\mathbb{L} = \left]-2, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, \frac{7}{4}\right[$

9. $\mathbb{L} = \left]-4, \frac{2}{3}\right[\cup \left]2, \infty\right[$

10. $\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]0, \infty\right[$

11. $\mathbb{L} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]x_s, \infty\right[$

12. $\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}, \infty\right[$

13. $\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]2, \infty\right[$

14. $\mathbb{L} = \left]-2, 1 - \sqrt{5}\right[\cup \left]0, 1 + \sqrt{5}\right[$

15. $\mathbb{L} = \left[1 - \sqrt{\frac{10}{3}}, 0\right] \cup \left]\frac{2}{3}, 1 + \sqrt{\frac{10}{3}}\right]$

16. $\mathbb{L} = \left]\frac{1-\sqrt{13}}{3}, 0\right[\cup \left]0, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{13}}{3}, \infty\right[$

17. $\mathbb{L} = \left]-\infty, 1 - \sqrt{6}\right[\cup \left]2, 1 + \sqrt{6}\right[$

18. $\mathbb{L} = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]2, \frac{5}{2}\right[\cup \left]3, \infty\right[$

19. $\mathbb{L} = \left]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}\right[$

20. $\mathbb{L} = \left]-\infty, -1\right] \cup \{0\} \cup \left]3, 4\right]$

21. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 101
    (b) $\mathbb{L} = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left[\frac{1-\sqrt{22}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left[0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{22}}{3}, \infty\right[$

22. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 101
    (b) $\mathbb{L} = \left]-\infty, -3\right[\cup \left[\frac{2-\sqrt{52}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left[0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left[\frac{2+\sqrt{52}}{3}, \infty\right[$

23. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 101
    (b) $\mathbb{L} = \left]-5, -1\right[\cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup \left]0, 1\right[\cup \left]3, \infty\right[$

24. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 101
    (b) $\mathbb{L} = \left]-\frac{1}{3}, 0\right] \cup \left[3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6}\right]$

25. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 101
    (b) $\mathbb{L} = \left[0, \frac{9-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left]1, \frac{9+\sqrt{33}}{4}\right]$

26. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 102
    (b) $\mathbb{L} = \left]-\frac{3}{2}, 1\right[\cup \left[\frac{23}{13}, \infty\right[$

27. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 102
    (b) $\mathbb{L} = \left]-\infty, \frac{5-\sqrt{61}}{2}\right] \cup \left]-1, 0\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{61}}{2}, \infty\right[$

28. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 102
    (b) $\mathbb{L} = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]1, 2\right[\cup \left[\frac{23}{11}, \infty\right[$

29. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 103
    (b) $\mathbb{L} = \left[\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, -2\right[\cup \left]1, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right]$

30. (a) Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 1, Seite 103
    (b) $\mathbb{L} = \left]\infty, -5\right[\cup \left]-5, -1\right[\cup \left[0, 2\right]$

5.3 Determinanten und Lineare Gleichungssysteme

1. (a) Unlösbar gdw. $a = 2$.
   Eindeutig lösbar gdw. $a \neq 2$.
   (b) Für $a = -1$: $x = -\frac{7}{6}$, $y = -\frac{5}{6}$, $z = 1$.

2. (a) $|A| = 766$
   (b) ∞ viele Lösungen; Gleichung 3 ist das 4/3-fache von Gleichung 1.

3. (a) $|A| = 0$
   (b) Eindeutig lösbar.

4. (a) $|A| = 0$
   (b) Eindeutig lösbar.

5. (a) Unlösbar gdw. $a = \frac{7}{3}$.
   Eindeutig lösbar gdw. $a \neq \frac{7}{3}$.
   (b) Für $a = -1$: $x = -\frac{7}{10}$, $y = -\frac{3}{5}$, $z = 1$.

6. (a) ∞ viele Lösungen; $\vec{x} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ 1 \\ \frac{13}{8} \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) $|A| = abcd + 4ab + 4ad + 4cd + 16$.

7. (a) Lösbar gdw. $b_3 = 2b_2 - b_1$.
   Für $b_1 = b_2 = b_3 = 1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Rg(C) = 2

8. (a) Lösbar gdw. $b_1 = 2b_2$.
   Für $b_1 = 2$ und $b_2 = 1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) $t_1 = 0$; $t_{2/3} = \frac{3 \pm j\sqrt{39}}{4}$

9. (a) Lösbar $\forall b \in \mathbb{R}$;

$$\vec{x} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & f\text{"}ur \quad b \neq 41 \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} & f\text{"}ur \quad b = 41 \end{cases}$$

   (b) $|C| = -16b$;

$$Rg(C) = \begin{cases} 3 & f\text{"}ur \quad b = 0 \\ 4 & f\text{"}ur \quad b \neq 0 \end{cases}$$

10. (a) Lösbar $\forall b \in \mathbb{R}$;

$$\vec{x} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & f\text{"}ur \quad b \neq 9 \\ \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} & f\text{"}ur \quad b = 9 \end{cases}$$

(b) $|C| = -10a - 42$;

$$Rg(C) = \begin{cases} 3 & f"ur \quad a = -21/5 \\ 4 & f"ur \quad a \neq -21/5 \end{cases}$$

11. (a) Lösbar $\forall b \in \mathbb{R}$;

$$\vec{x} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} & f"ur \quad b \neq 10 \\ \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} & f"ur \quad b = 10 \end{cases}$$

(b) $|C| = -12b - 24$;

$$Rg(C) = \begin{cases} 3 & f"ur \quad b = -2 \\ 4 & f"ur \quad b \neq -2 \end{cases}$$

12. (a) Inhom. LGS unlösbar gdw. $a \in \{-2, 4\}$. In diesem Fall hat das hom. LGS ∞ viele Lösungen.
Inhom. LGS eindeutig lösbar gdw. $a \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 4\}$. In diesem Fall hat das hom. LGS nur die triviale Lösung.

(b) $\mathbb{L}_{\text{inhom}} = \{\}$ für $a = 4$ und $\mathbb{L}_{\text{hom}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ für $a = 0$.

13. (a) Inhom. LGS unlösbar gdw. $a \in \{\frac{3}{2}, 3\}$. In diesem Fall hat das hom. LGS ∞ viele Lösungen.
Inhom. LGS eindeutig lösbar gdw. $a \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{3}{2}, 3\}$. In diesem Fall hat das hom. LGS nur die triviale Lösung.

(b) $\mathbb{L}_{\text{inhom}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ für $a = 0$ und $\mathbb{L}_{\text{hom}} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ für $a = 3$.

14. Lösbar gdw. $a = 2b - 1$.
Für $b = 0$, $a = -1$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. (a) eindeutig lösbar gdw. $a \neq b$.
∞ viele Lösungen, wenn $a = b$.

(b) Für $a = 2$ und $b = 3$: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

16. $|C| = 2b \cdot (1 - a)$;

$$Rg(C) = \begin{cases} 4 & f"ur \quad b \neq 0 \wedge a \neq 1 \\ 3 & f"ur \quad b = 0 \vee a = 1 \end{cases}$$

17. (a) Inhom. LGS hat ∞ viele Lösungen, wenn $a = 12$; unlösbar gdw. $a = \frac{3}{2}$. In beiden Fällen hat das hom. LGS ∞ viele Lösungen.
Inhom. LGS eindeutig lösbar gdw. $a \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{3}{2}, 12\}$. In diesem Fall hat das hom. LGS nur die triviale Lösung.

(b) $\mathbb{L}_{\text{inhom}}$ für $a = 12:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{1}{21} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{22}{7} \\ \frac{2}{21} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\mathbb{L}_{\text{inhom}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ für $a = 3$.

18. $|C| = -6a^2 + 6a + 18;$ d.h. $|C|$ unabhängig von b

$$Rg(C) = \begin{cases} 3 & f"ur \quad a \in \{\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\} \\ 4 & f"ur \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\} \end{cases}$$

19. (a) $detA = 0$ gdw. $a \in \{-\frac{4}{5}; 1\}$
    i. $a = 1:$ Inhom. LGS hat ∞ viele Lösungen; hom. LGS hat ∞ viele Lösungen.
    ii. $a = -\frac{4}{5}:$ Inhom. LGS hat keine Lösung; hom. LGS hat ∞ viele Lösungen.
    iii. $a \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{4}{5}; 1\}:$ Inhom. LGS hat genau eine Lösung; hom. LGS hat nur die triviale Lösung.

    (b) i. $a = 1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
    ii. $a = -\frac{4}{5}:\ \mathbb{L}_{\text{inhom}} = \{\ \}$
    iii. $a = 0:\ \vec{x} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

20. (a) $detA = 0 \Rightarrow$
    i. hom. LGS hat ∞ viele Lösungen; inhom. LGS hat ∞ viele oder keine Lösungen
    ii. inhom. LGS ist lösbar, wenn $a_1 - a_2 + 3a_3 = 0$

    (b) gewählt: $a_1 = a_2 = 1\,, a_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

21. $|C| = -3a^2 + 3a + 3;$ d.h. $|C|$ und Rang C unabhängig von b

$$Rg(C) = \begin{cases} 3 & f"ur \quad a \in \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\} \\ 4 & f"ur \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\} \end{cases}$$

22. (a) $detA = 0$ gdw. $a \in \{\frac{1}{2}; 8\}$
    i. $a = 8:$ Inhom. LGS hat ∞ viele Lösungen; hom. LGS hat ∞ viele Lösungen.
    ii. $a = -\frac{1}{2}:$ Inhom. LGS hat keine Lösung; hom. LGS hat ∞ viele Lösungen.
    iii. $a \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}; 8\}:$ Inhom. LGS hat genau eine Lösung; hom. LGS hat nur die triviale Lösung.

    (b) i. $a = 8:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
    ii. $a = 2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

23. $|C| = 3a^2 + 6a - 27;$ d.h. $|C|$ und Rang C unabhängig von b

$$Rg(C) = \begin{cases} 3 & f"ur \quad a \in \{-1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10}\} \\ 4 & f"ur \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10}\} \end{cases}$$

24. (a) $detA = 0$ gdw. $a \in \{-1; 1\}$
    i. $a = -1:$ Inhom. LGS hat ∞ viele Lösungen; hom. LGS hat ∞ viele Lösungen.
    ii. $a = 1:$ Inhom. LGS hat keine Lösung; hom. LGS hat ∞ viele Lösungen.
    iii. $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}:$ Inhom. LGS hat genau eine Lösung; hom. LGS hat nur die triviale Lösung.

    (b) i. $a = -1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
    ii. $a = 1:\ \mathbb{L}_{\text{inhom}} = \{\ \}$
    iii. $a = 0:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

25. LGS lösbar, wenn $a + b - 2 = 0$; allgemeine Lösung für $a = 0 \quad$ und $b = 2:$
    $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

26. $|C| = abcd + abc + acd + abd + bcd$

27. $detA = 0$ gdw. $a \in \{3; 8\}$
    (a) $a = 3:$ LGS hat ∞ viele Lösungen;
    $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ ist eine allgemeine Lösung
    (b) $a = 8:$ LGS ist unlösbar
    (c) $a \in \mathbb{R}\backslash\{3; 8\}:$ LGS hat genau eine Lösung;
    Lösung für $a = 0$: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

28. $|C| = -cd - 2bcd + ac + 2abc$

29. (a) wenn $detA = 0$, d.h. $a \in \{\frac{-3-\sqrt{29}}{2}; \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\}$
    i. hom. LGS hat ∞ viele Lösungen:
    $$\vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{(\pm 1+\sqrt{29})}{(\pm 25+3\sqrt{29})} \\ \frac{2(\pm 6+\sqrt{29})}{(\pm 25+3\sqrt{29})} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
    ii. inhom. LGS hat keine Lösungen, da $Rg(A) = 2 < Rg(A|b) = 3$

    (b) wenn $detA \neq 0$, d.h. $a \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{-3-\sqrt{29}}{2}; \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\}$
    i. hom. LGS hat genau eine Lösung, die triviale.
    ii. inhom. LGS hat genau eine Lösung; für $a = 0$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$

30. $det(A) = 0 \rightarrow$ homogenes LGS: ∞ Lösungen, inhomogenes LGS: ∞ Lösungen oder unlösbar
    Lösungen homogen: $\vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

    Lösungen inhomogen:

    (a) $a \neq 6 \rightarrow Rg(A) = 2 < Rg(A|b) = 3 \rightarrow$ unlösbar

(b) $a=6 \to \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

31. Durch elementare Umformungen (i.w. Gauß-Algorithmus) auf Dreiecksform bringen; $det(C) = -6\pi + 234$

32. $det A = a^2$

   (a) wenn $det A = 0$, d.h. $a = 0$:

      i. hom. LGS hat ∞ viele Lösungen : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda - \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

      ii. inhom. LGS :
      - wenn $b = 0$: hom. LGS hat ∞ viele Lösungen (wie hom. LGS)
      - wenn $b \neq 0$: hom. LGS hat keine Lösung, da $Rg(A) \neq Rg(A|b)$

   (b) wenn $det A \neq 0$, d.h. $a \neq 0$

      i. hom. LGS hat genau eine Lösung: den Nullvektor

      ii. inhom. LGS hat genau eine Lösung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{a^2-b}{a} \\ 1 \\ \frac{b-a}{a} \end{pmatrix}$

33. Determinante vereinfachen und nach den bekannten Regeln umformen

34. (a) $\mathbb{L} = \{(p,q) \mid (0,0),(0,2)\}$

   (b) i. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{27}\, u + \frac{7}{9}\, v - \frac{4}{27}\, w \\ \frac{7}{27}\, u + \frac{5}{9}\, v + \frac{1}{27}\, w \\ -\frac{2}{9}\, u - \frac{1}{3}\, v + \frac{1}{9}\, w \end{pmatrix}$

      ii. $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{5}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{27} \\ \frac{1}{27} \\ +\frac{1}{9} \end{pmatrix}$ für alle $w \in \mathbb{R}$

35. (a) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   $X_3 = \begin{pmatrix} x & \frac{1-x^2}{z} \\ z & -x \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} u & \frac{1-u^2}{z} \\ z & -u \end{pmatrix}$

   $X_5 = \begin{pmatrix} -x & \frac{1-x^2}{z} \\ z & x \end{pmatrix}$, $X_6 = \begin{pmatrix} -u & \frac{1-u^2}{z} \\ z & u \end{pmatrix}$

   $X_7 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $det(A) = a^3 - 3a^2 - 4a + 12 = (a-2)(a+2)(a-3)$
   $\to det(A) = 0$ gdw. $a \in \{-2, 2, 3\}$.

   $a = -2$: nur lösbar, wenn b=0 ; $\quad \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $a = 2$: nur lösbar, wenn b=0 ; $\quad \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $a = 3$, b beliebig: $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{b}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{27}{117} \\ -\frac{8}{13} \\ 1 \end{pmatrix}$

   $a = 0 \quad \to det(A) \neq 0$; $\quad \vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

36. $det(A) = -5(a-1)(b-1)$

$$\begin{array}{llllll} a \neq 1 & \wedge & b \neq 1 & \Rightarrow & Rg(A) = 4 \\ a \neq 1 & \wedge & b = 1 & \Rightarrow & Rg(A) = 3 \\ a = 1 & \wedge & b \neq 1 & \Rightarrow & Rg(A) = 3 \\ a = 1 & \wedge & b = 1 & \Rightarrow & Rg(A) = 2 \end{array}$$

37. (a) $A^2 = A$; $A \cdot B = 0$; $B^2 = -A + E$

    (b) $det(A) = 7(t^2 - 11t + 18)$

    $t = 2$: keine Lösung

    $t = 9: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$

    $t \neq 2 \ \wedge \ t \neq 9: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{5t+8}{t-2} \\ \frac{t+9}{t-2} \\ -\frac{1}{t-2} \end{pmatrix}$

38. $det(A) = (x-1)(x-2)(x-3)$

39. (a) $det(A) = 1 - a$

    i. wenn $det(A) = 0$, d.h. wenn $a = 1$:
    - hom. LGS hat ∞ viele Lösungen
    - inhomogenes LGS hat ∞ viele Lösungen oder keine Lösung

    ii. wenn $det(A) \neq 0$, d.h. wenn $a \neq 1$:
    - hom. LGS hat nur die triviale Lösung $\vec{x} = 0$
    - inhomogenes LGS hat genau eine Lösung

    (b) i. $a = 1$:
    - homogen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
    - inhomogen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

    ii. $a \neq 1$ (z.B. $a = 0$):
    - homogen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
    - inhomogen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

40. (a)
    - $b \neq 1$, a beliebig : genau eine Lösung
    - $b = 1$, $a = 2$: ∞ viele Lösungen
    - $b = 1$, $a \neq 2$: keine Lösung

    (b) $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

41. (a) i. richtig

    ii. falsch

    iii. richtig

iv. richtig

(b) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.4 Funktionen

1. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

   (b) Verwendung von $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

2. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

   (b) Verwendung von $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ und $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$.

3. Verwendung von $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$.

4. Verwendung von $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ und $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$.

5. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{(2m+1)\pi}{4} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$

   (b) Verwendung von $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

6. (a) $x = 2^{1/8} \cdot e^{5/4}$

   (b) $\mathbb{L} = \left\{ \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{4} \right\}$

7. (a) $\mathbb{L} = \{ n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \cup \left\{ \frac{(2m+1)\pi}{4} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$

   (b) Verwendung von $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

8. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

   (b) Verwendung der Additionstheoreme
   $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ und
   $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

9. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

   (b) Verwendung von $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$.

10. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

    (b) Verwendung von $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

11. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{n\pi}{4} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

    (b) Verwendung von $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

12. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{(6m_1+1)\pi}{3} \mid m_1 \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{(6m_2+5)\pi}{3} \mid m_2 \in \mathbb{Z} \right\}$

    (b) Verwendung von $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

13. (a) $\mathbb{L} = \{ n \cdot \pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \cup \left\{ \frac{(6m+2)\cdot\pi}{3} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{(6l+4)\cdot\pi}{3} \mid l \in \mathbb{Z} \right\}$

    (b) Verwendung von $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

14. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \cdot e^{4-\sqrt{6-8\ln(2)}}, \frac{1}{2} \cdot e^{4+\sqrt{6-8\ln(2)}} \right\}$

    (b) Verwendung von $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ und $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$.

15. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \right\}$

    (b) Verwendung von $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ und $\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$.

16. (a) $\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right\}$

(b) Verwendung von $\cos(x) = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ und $\sin(x) = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$.

17. (a) $\mathbb{L} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

    (b) $\mathbb{L} = \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{(2m-1)\pi}{4} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$

18. (a) $x_0 = \frac{1}{2}\frac{\ln(\frac{54}{49})}{ln(\frac{3}{2})}$

    (b) $\mathbb{L} = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{(1+8m)\pi}{4}, \frac{(3+8m)\pi}{4}, \frac{(5+8m)\pi}{4}, \frac{(7+8m)\pi}{4} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$

19. (a) $x_0 = \frac{1}{2}\frac{\ln(\frac{2a}{3-2\sqrt[3]{2}})}{ln(2)} \qquad a \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$

    (b) $\mathbb{L} = \left\{-\arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1} + k\cdot\pi, \arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1} + k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

20. $x_0 = \frac{2\ln(3)-\frac{1}{2}\ln(2)-\ln(3+a)}{2ln(a)-\ln(2)}$

21. (a) i. $f(x) = \ln(x)$

        ii. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

    (b) $\mathbb{L} = \left\{\frac{\ln(c-\sqrt{c^2-4ba^{\alpha+\beta}}-\ln(2)-\alpha\ln(a)}{\ln(a)}, \frac{\ln(c+\sqrt{c^2-4ba^{\alpha+\beta}}-\ln(2)-\alpha\ln(a)}{\ln(a)}\right\}$

22. (a) $\mathbb{L} = \{k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{(2l+1)\pi}{4}\ , l \in \mathbb{Z}\right\}$

    (b) $r = \frac{1}{2}\ ,\ a = 4\ ,\ b = \frac{9}{4}$

23. (a) $\mathbb{L} = \left\{e\ , e^{-1}\right\}$

    (b) $\mathbb{L} = \left\{\frac{k\pi}{3}\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$

24. (a) i. $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$

        ii. $\mathbb{L} = \{9\}$

    (b) $r = \frac{1}{2}; \quad a = 4; \quad b = \frac{25}{4}$

5.5 Komplexe Zahlen

1. $|z| = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, $\arg(z) = \arctan(2)$. Für $w^2 = z$: $w_1 \approx 0.73 + 0.45j$ und $w_2 = -w_1$.

2. (a) Zeichnung: siehe Abbildung in Kapitel 8

   (b) $z_1 = \sqrt{3} + j$; $z_2 = -1 + j\sqrt{3}$; $z_3 = -\sqrt{3} - j$; $z_4 = 1 - j\sqrt{3}$

3. (a) Verwendung der Polarform von z_1 und z_2.

   (b) $z_1 \approx 0.87 + 0.17j$; $z_2 \approx 0.28 + 0.83j$; $z_3 \approx -0.58 + 0.66j$; $z_4 = -z_1$; $z_5 = -z_2$; $z_6 = -z_3$;
   $z_7 \approx 0.88 - 0.4j$; $z_8 \approx 0.79 + 0.56j$; $z_9 \approx -0.1 + 0.96j$; $z_{10} = -z_7$; $z_{11} = -z_8$; $z_{12} = -z_9$

4. (a) Verwendung der Polarform von z_1 und z_2.

   (b) $z_1 \approx 1.07 + 0.21j$; $z_2 \approx -0.21 + 1.07j$; $z_3 = -z_1$; $z_4 = -z_2$

5. (a) Zeichnung: siehe Abbildung in Kapitel 8

   (b) $z_1 \approx 1.09 + 1.62j$; $z_2 = -z_1$; $z_3 \approx 0.95 - 1.86j$; $z_4 = -z_3$

6. (a) $z_1 \approx 0.79 + 0.79j$; $z_2 \approx -1.08 + 0.29j$; $z_3 \approx 0.29 - 1.08j$

   (b) $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ Zeichnung: siehe Abbildung in Kapitel 8

7. (a) $z_1 = j$; $z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}j$; $z_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}j$

   (b) $z = \frac{8}{17} + \frac{15}{17}j$

8. (a) $z_1 \approx 0.38 + 0.92j$; $z_2 \approx -0.92 + 0.38j$; $z_3 = -z_1$; $z_4 = -z_2$

   (b) $z = \frac{\sin(3)\cos(3)}{\cos^2(3)+\sinh^2(1)} - \left(\frac{\sinh(1)\cosh(1)}{\cos^2(3)+\sinh^2(1)}\right)j$

9. (a) $z_1 \approx 0.79 + 0.79j$; $z_2 \approx -1.08 + 0.29j$; $z_3 \approx 0.29 - 1.08j$; $z_4 \approx 0.79 - 0.79j$; $z_5 \approx 0.29 + 1.08j$; $z_6 \approx -1.08 - 0.29j$
   (b) $z = \frac{9}{41} - \frac{40}{41}j$

10. (a) $z = \frac{5}{4}$
    (b) $z_1 \approx 0.81 + 0.59j$; $z_2 \approx -0.31 + 0.95j$; $z_3 = -1$; $z_4 \approx -0.31 - 0.95j$; $z_5 \approx 0.81 - 0.59j$;

11. (a) $z = -\frac{4}{3}j$
    (b) $z_1 \approx 0.99 + 0.12j$; $z_2 \approx 0.39 + 0.92j$; $z_3 = -0.6 + 0.8j$; $z_4 = -z_1$; $z_5 = -z_2$; $z_6 = -z_3$;

12. (a) $a = \frac{5}{13} - \frac{12}{13}j$; $|a| = 1$; $\arg(a) \approx 5,107 \approx 292,61^o$
    (b) $z_1 \approx 0.29 + 0.96j$; $z_2 = j \cdot z_1$; $z_3 = -z_1$; $z_4 = -z_2$

13. (a) $a = -\frac{1}{4}j$; $|a| = \frac{1}{4}$; $\arg(a) = \frac{3\pi}{2}$
    (b) $z_1 \approx 0,48 + 0,16j$; $z_2 = \frac{1}{2}j$; $z_3 \approx -0,48 + 0,16j$; $z_4 \approx -0,29 - 0,41j$;$z_5 \approx 0,29 - 0,41j$
    Lage der Lösungen: siehe Zeichnung im Anhang

14. (a) $a = -\frac{5}{6} + \frac{1}{6}j$; $|a| = \frac{\sqrt{26}}{6}$; $\arg(a) \approx 2,944 \approx 168,7^o$
    (b) $z_1 \approx 1,07 + 0,21j$; $z_2 = j \cdot z_1$; $z_3 = -z_1$; $z_4 = -z_2$
    Lage der Lösungen: siehe Zeichnung im Anhang

15. (a) $a = -\frac{14}{15} + \frac{13}{15}j$; $|a| = \frac{\sqrt{365}}{15}$; $\arg(a) \approx 2,393 \approx 137,1^o$
    (b) $z_1 \approx 0,60 + 1,01j$; $z_2 \approx -0,76 + 0,88j$; $z_3 \approx -1,08 - 0,47j$; $z_4 \approx 0,11 - 1,17j$; $z_5 \approx 1,15 - 0,26j$
    Lage der Lösungen: siehe Zeichnung im Anhang

16. (a) $z_a = -\frac{7}{10} + \frac{1}{10}j$; $|z_a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\arg(a) \approx 3,0 \approx 171,9^o$
    (b) $z_{b_1} \approx 0,20+1,72j$; $z_{b_2} \approx -1,72+0,20j$; $z_{b_3} \approx -0,20-1,72j$; $z_{b_4} \approx 1,72-0,20j$
    Lage der Lösungen: siehe Zeichnung im Anhang

17. (a) $a = -\frac{31}{34} + \frac{29}{34}j$; $|a| = \frac{\sqrt{1802}}{34}$; $\arg(a) \approx 2,3895 \approx 136,9^o$
    (b) $z_{b_1} \approx 1,28+0,43j$; $z_{b_2} \approx -1,28-0,43j$; $z_{b_3} \approx 0,94-0,58j$; $z_{b_4} \approx -0,94+0,58j$
    Lage der Lösungen: siehe Zeichnung im Anhang

18. (a) $a = -\frac{21}{25} + \frac{7}{25}j$; $|a| = \frac{7\sqrt{10}}{25}$; $\arg(a) \approx 2,82$
    (b) $z_{b_1} \approx 1,26+0,97j$; $z_{b_2} \approx -1,26-0,97j$; $z_{b_3} \approx 1,17-0,19j$; $z_{b_4} \approx -1,17+0,19j$
    Lage der Lösungen: siehe Zeichnung im Anhang

19. (a) keine Lösungsangabe
    (b) $z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{\pi}{9}) + j\sin(\frac{\pi}{9})) \approx 1,18 + 0,43j$;
    $z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{7\pi}{9}) + j\sin(\frac{7\pi}{9})) \approx -0,96 + 0,81j$;
    $z_3 = \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{13\pi}{9}) + j\sin(\frac{13\pi}{9})) \approx -0,21 - 1,24j$;
    Lage der Lösungen: siehe Zeichnung im Anhang

20. (a) Menge in der komplexen Ebene siehe Zeichnung im Anhang
    (b) $b_1 \approx 1,46 + 1,10j$; $z_{1,1} \approx -1,28 - 0,43j$; $z_{1,2} \approx +1,28 + 0,43j$
    $b_2 \approx 0,55 - 1,10j$; $z_{2,1} \approx +0,94 - 0,55j$; $z_{2,2} \approx -0,94 + 0,55j$
    Lage der Lösungen: siehe Zeichnung im Anhang

21. (a) $M_1 : y \geq x^2 + 1$; $M_2 : (\frac{x}{4})^2 + (\frac{(y+1)}{4})^2 \leq 1$
    Schnittmenge in der komplexen Ebene siehe Zeichnung im Anhang
    (b) i. $Re(z) = 64$; $Im(z) = 64\sqrt{3}$
    ii. $Re(z) = -\frac{7}{41}$; $Im(z) = \frac{22}{41}$
    iii. $z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + j\sin(\frac{\pi}{8})) \approx 1,099 + j0,455$
    $z_2 = \sqrt[4]{2}(-\cos(\frac{\pi}{8}) - j\sin(\frac{\pi}{8})) \approx -1,099 - j0,455$

22. (a) i. $Re(z) = -\frac{\sqrt{3}}{64}$; $Im(z) = -\frac{1}{64}$

ii. $Re(z) = \frac{1}{13}$; $Im(z) = \frac{8}{13}$

iii. $z_1:$ $Re(z_1) = \sqrt[6]{2}\cos\frac{7\pi}{12} \approx -0,29$; $Im(z_1) = \sqrt[6]{2}\sin\frac{7\pi}{12} \approx 1,08$

$z_2:$ $Re(z_2) = \sqrt[6]{2}\cos\frac{15\pi}{12} \approx -0,79$; $Im(z_2) = \sqrt[6]{2}\sin\frac{15\pi}{12} \approx -0,79$

$z_3:$ $Re(z_3) = \sqrt[6]{2}\cos\frac{23\pi}{12} \approx 1,08$; $Im(z_3) = \sqrt[6]{2}\sin\frac{23\pi}{12} \approx -0,29$

(b) $z = -y + jy = x - jx$

23. (a) Spirale um Ursprung; Skizze siehe Kapitel Abbildungen, Abschnitt 2, Seite 107

(b) i. $Re(z) = 8 \cdot 3^7 = 17496$; $Im(z) = Re(z)$

ii. $Re(z) = -\frac{23}{41}$; $Im(z) = \frac{2}{41}$

iii. $z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + j\sin(\frac{\pi}{8})) \approx 1,099 + j0,455$

$z_2 = \sqrt[4]{2}(-\cos(\frac{\pi}{8}) - j\sin(\frac{\pi}{8})) \approx -1,099 - j0,455$

Kapitel 6

Lösungen Mathematik 2

6.1 Differentialrechnung

1. $f'(x) = -\sin(x) \cdot x^{\cos(2x)} + \cos(x) \cdot x^{\cos(2x)} \cdot (-2\sin(2x)\ln(x) + \frac{\cos(2x)}{x}) + \sqrt[x]{\ln(x)} \cdot (-\frac{\ln(\ln(x))}{x^2} + \frac{1}{x^2 \ln(x)})$

2. $f'(x) = \cos(x) \cdot x^{\sin(3x)} + \sin(x) \cdot x^{\sin(3x)} \cdot (3\cos(3x)\ln(x) + \frac{\sin(3x)}{x})$

3. $f'(x) = 4x^3 \cot(x^4) - \frac{4x^7}{\sin^2(x^4)} + 2x \arctan(\frac{1}{x}) - \frac{x^2}{x^2+1}$

4. $f'(x) = 3x^2(\cot(x^5) + arccot(\frac{1}{x^2})) - \frac{5x^7}{sin^2(x^5)} + \frac{2}{1+\frac{1}{x^4}}$

5. $f'(x) = 3x^2 \cosh(x^3)\ln^2(ax) + \sinh(x^3)\frac{2\ln(ax)}{x} + 2x\cos(x^2)$

6. $f'(x) = 5x^4 \coth(2x)\ln(bx) - \frac{2x^5 \ln(bx)}{\sinh^2(2x)} + x^4 \coth(2x) + 4x^3 \sin(x^4)$

7. $f'(x) = x^a e^{ax}[\frac{a\sinh(4x)}{x} + 4\cosh(4x) + a\sinh(4x)] + 2x(sin^2(x^2) - cos^2(x^2))$

8. $f'(x) = \frac{x^a}{e^{3x}}[\frac{a\cosh(ax)}{x} + a\sinh(ax) - 3\cosh(ax)] - 4x^3(\cos^2(x^4) - \sin^2(x^4))$

9. $f'(x) = \frac{x^b}{e^{ax}}[\frac{b\cos(4ax)}{x} - 4a\sin(4ax) - a\cos(4ax)] - 4x\sinh(x^2)\cosh^2(x^2) - 2x\sinh^3(x^2)$

10. $f'(x) = \frac{bx^b}{x}\tan(x^3) + \frac{3x^{(b+2)}}{\cos^2(x^3)} - 4x^3 arccot(\frac{1}{x^2}) - \frac{2x}{1+\frac{1}{x^4}}$

11. $f'(x) = \frac{x^b}{e^{(ax^2)}} \cdot [\frac{b\sin(4bx)}{x} + 4b\cos(4bx) - 2ax\sin(4bx)] - 8x^3\sinh(x^4)\cosh^2(x^4) - 4x^3\sinh^3(x^4)$

12. $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(ax)}} e^{\sqrt{\ln(ax)}} + b\cos(bx)x^{\tan(x)} + \sin(bx)x^{\tan(x)}(\frac{\ln(x)}{cos^2(x)} + \frac{\tan(x)}{x})$

13. $f'(x) = \frac{2}{x}(\ln(ax)e^{(\ln(ax))^2}) - \frac{\sin(x^2)+2x^2\cos(x^2)}{sin^2(x\sin(x^2))}$

14. $f'(x) = -\sin(x)\ln(x)^{\sin(x)} + \cos(x)\ln(x)^{\sin(x)}(\cos(x)\ln(\ln(x)) + \frac{\sin(x)}{x\ln(x)}) - e^x \sin(e^x\cos(x^3)) \cdot (\cos(x^3) - 3x^2\sin(x^3))$

15. $f'(x) = \cos(x)\arctan(x)^{(x^n)} + \sin(x)\arctan(x)^{(x^n)}(\frac{nx^n \ln(\arctan(x))}{x} + \frac{x^n}{\arctan(x)\cdot(1+x^2)}) + e^{(x^3)}(3x^2\cos(x) - \sin(x)) \cdot e^{\cos(x)\cdot e^{(x^3)}}$

16. $f'(x) = -2x\sin(x^2)(2x)^{\cos(2x)} + \cos(x^2)(2x)^{\cos(2x)}[\frac{\cos(2x)}{x} - 2\sin(2x)\ln(2x)]$
$-2x\sin(\sin(x^2))\cos(x^2)$

17. $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(bx)^2} - 2b\cos(x)\cos(bx)\sin(bx)e^{\cos(bx)^2}$
$+2\cos(\sin(\sin(x)^2))\cos(\sin(x)^2)\sin(x)\cos(x)$

18. $f'(x) = -\sin(x)\tan(x)^{\ln(x^2)} + \cos(x)\tan(x)^{\ln(x^2)} \cdot (\frac{2}{x}\ln(\tan(x)) + \frac{ln(x^2)}{\sin(x)\cos(x)})$
$+\cot(x^2)(\cos(x) - \frac{2x\sin(x)}{sin^2(x^2)})e^{\sin(x)\cot(x^2)}$

19. $f'(x) = (-2x\sin(x^2) \cdot \ln(\sin(x^2)) + \frac{2x\cos^2(x^2)}{\sin(x^2)}) \cdot sin(x^2)^{cos(x^2)} + \frac{\cosh(x)}{\sqrt{\cosh(x)e^{\sinh(x)}}}$
$-\frac{1}{2}\frac{\sinh(x)\cdot e^{\sinh(x)}(\sinh(x)+\cosh^2(x))}{\sqrt{(\cosh(x)e^{\sinh(x)})^3}}$

20. $f'(x) = 2x\cos(x^2)\, e^{\cos(ax)\ \ln(bx)-bx} + \sin(x^2)(-a\sin(ax)\ln(bx) + \frac{\cos(ax)}{x} - b)\, e^{\cos(ax)\ln(x)-bx} -$
$2\ \cos(\cos((e^x)^2)) \cdot \sin((e^x)^2) \cdot e^{2x}$

21. $f'(x) = -\frac{a\cos(ax)\ \sin(\sqrt{\sin(ax)})}{2\sqrt{\sin(ax)}} - b\ \sin(bx)\, e^{(cx^2)^n} + \cos(bx)\, e^{(cx^2)^n}\, \frac{2n(cx^2)^n}{x}$

22. $f'(x) = e^{(x^n)}\ \left[\frac{\cos(\sqrt{x})\ \cot(x^2)}{2\sqrt{x}} - \frac{2x\ \sin(\sqrt{x})}{\sin^2(x^2)} + \sin(\sqrt{x})\ \cot(x^2)\frac{n\,x^n}{x}\right] - 2x\ \sin(e^{sin(x^2)})\, e^{sin(x^2)}\cos(x^2)$

23. $f'(x) = \frac{x\cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}}\cdot a^{\sin(bx)\ln(cx)} + \sqrt{\sin(x^2)}\cdot\ln(a)\cdot\left[b\cos(bx)\ln(x) + \frac{\sin(bx)}{x}\right]\cdot a^{\sin(bx)\ln(cx)} -$
$2\sin(2x)$

24. $f'(x) = \frac{16x}{(4x^2+1)^2}\cosh(\frac{4x^2-1}{4x^2+1}) - \frac{1}{4}a^2\frac{\sin(a\sqrt{x+e^{ax}})(1+a\cdot e^{ax})}{\sqrt{a\cos(a\sqrt{x+e^{ax}})}\sqrt{x+e^{ax}}}$

25. $f'(x) = \frac{b\cos(x)\sinh(\ln(a\tanh(b\sin(x))))}{\sinh(b\sin(x))\cosh(b\sin(x))} + b^{\cos(bx)}\ \left[2\sin(\cos^2(x))\cos(x)\sin(x) - \cos(\cos^2(x))b\ln(b)\sin(bx)\right]$

26. $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{xe^{x^2}}(2x^2+1)}{x}; \qquad f''(x) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{xe^{x^2}}(4x^4+8x^2-1)}{x^2}$

27. $t(x) = \frac{8\sqrt{6}}{9}x - \frac{5\sqrt{3}}{9}$
$x_0 = \frac{\sqrt{50}}{16}$; $f(x_0) \approx 0,2$

28. (a) $s(x) = -x + 1$
 (b) $t(x) = -x + \sqrt{2}$
 (c) $P_1 = \left(0; \sqrt{2}\right); \quad P_2 = \left(\sqrt{2}; 0\right)$

29. $a = 1$, $b = \ln(10)$; $f(x) = 10x$

6.2 Grenzwerte

1. $GW = 0$
2. $GW = 0$
3. $GW = \frac{1}{3}$
4. $GW = \frac{9}{4}$
5. GW definiert, wenn $a \neq 4$
6. $GW = 0$
7. $GW = 2$
8. $GW = 1$
9. $GW = 3$
10. $GW = 1$
11. $GW = 3$
12. $GW = \frac{2a}{b^2}$
13. $GW = \frac{a^2}{2b}$
14. $GW = \frac{2-2a}{b^2}$
15. $GW = \frac{a^2}{4b-4}$
16. für $a = 0$: GW nicht definiert
 für $a \neq 0$: $GW = \infty$

17. für $a = 0$: GW nicht definiert
    für $a \neq 0$: $GW = 2$

18. $GW = \frac{2-2a}{b^2}$

19. $GW = \frac{5}{6}$

20. $GW = 1$

21. $GW = \frac{1}{a}$

22. $GW = \frac{1}{3}$

23. $GW = 1$

24. $GW = -\frac{1}{6}$

25. $GW = \frac{1}{2}$

26. $GW = 0$

27. $GW = \frac{2}{a}\,, \quad a \neq 0$

28. $GW = \frac{5}{6}$

29. $GW = \begin{cases} 1 & \text{, wenn} \quad c < 0 \\ 0 & \text{, wenn} \quad c = 0 \\ -1 & \text{, wenn} \quad c > 0 \end{cases}$

6.3 Integrale

1. $$\begin{aligned} \text{A} &= \tfrac{1}{5}\sinh^5(x) + \tfrac{2}{3}\sinh^3(x) + \sinh(x) + c \\ &= \tfrac{1}{5}\cosh^4(x)\sinh(x) + \tfrac{4}{15}\sinh(x)\cosh^2(x) + \tfrac{8}{15}\sinh(x) + c \\ \text{B} &= \tfrac{1}{4}\ln(3b)\cdot x^4 \cdot \ln(2x) - \tfrac{1}{16}\ln(3b)\cdot x^4 + c \\ \text{C} &= -\tfrac{2}{5}\cdot \arctan(\tfrac{x+2}{5}) + \ln(|x|) + c \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \text{A} &= \tfrac{1}{10}\cosh^5(2x) - \tfrac{1}{3}\cosh^3(2x) + \tfrac{1}{2}\cosh(2x) + c \\ &= \tfrac{1}{10}\sinh^4(2x)\cosh(2x) - \tfrac{2}{15}\cosh(2x)\sinh^2(2x) + \tfrac{4}{15}\cosh(2x) + c \\ \text{B} &= \tfrac{1}{3}\ln(4a)\cdot x^3 \cdot \ln(|3x|) - \tfrac{1}{9}\ln(4a)\cdot x^3 + c \\ \text{C} &= -\tfrac{4}{\sqrt{19}}\cdot \arctan(\tfrac{x+3}{\sqrt{19}}) + \ln(|x|) + c \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \text{A} &= \tfrac{1}{4}arsinh(\tfrac{4}{3}\ln(|x|)) + c \\ \text{B} &= \ln(\ln(|x|))\cdot \ln(|x|) - \ln(|x|) + c \\ \text{C} &= C = x + \tfrac{1}{2}\ln(|x-1|) + \tfrac{1}{4}\ln(x^2+1) + \tfrac{1}{2}\arctan(x) + c \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \text{A} &= \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\arcsin(\sqrt{2}\ln(x^2)) + c \\ \text{B} &= \tfrac{1}{4}x^4\ln^2(|x|) - \tfrac{1}{8}x^4\ln(|x|) + \tfrac{1}{32}x^4 + c \\ \text{C} &= x + \tfrac{3}{4}\ln(|x-2|) - \tfrac{11}{4}\ln(|x+2|) + \ln(|x+1|) + c \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} \text{A} &= -\tfrac{1}{\sin(x)} - \cot(x) - x + c = -\tfrac{1}{\tan(\frac{x}{2})}) - x + c \\ \text{B} &= \tfrac{x}{2}\cdot(\sin(\ln(|x|) - \cos(\ln(|x|)) + c \\ \text{C} &= x + \ln(|x|) - \tfrac{1}{2}\cdot(\ln(\left|x^2+x+1\right|) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} \text{A} &= \tfrac{1}{8} \\ \text{B} &= \tfrac{1}{2}x^2\cdot \ln^2(|4x|) - \tfrac{1}{2}x^2\cdot \ln(|4x|) + \tfrac{1}{4}x^2 + c \\ \text{C} &= \tfrac{1}{3}\ln(|x+1|) - \tfrac{1}{6}\cdot(\ln(\left|x^2-x+1\right|) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot \arctan(\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} \text{A} &= 1 - \ln(2) \\ \text{B} &= -\cos(x)\cdot \ln(\cos^2(x)) + 2\cos(x) + c \\ \text{C} &= \tfrac{1}{20}\arctan(\tfrac{x}{4}) - \tfrac{11}{5}(\ln(x^2+16) - \tfrac{1}{30}\arctan(\tfrac{x}{6}) + \tfrac{26}{5}(\ln(x^2+36) + c \end{aligned}$$

8. A $= \sqrt{x^2+x-1} - \frac{1}{2}\ln(\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x-1}\right|) + c$

B $= -\frac{\delta}{\delta^2+\omega^2}\cdot\exp(-\delta t)\cdot\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\delta^2+\omega^2}\cdot\exp(-\delta t)\cdot\sin(\omega t) + c$

C $= \frac{1}{48}\ln(|x-1|) + \frac{5}{12}\ln(|x+5|) - \frac{7}{16}\ln(|x+7|) + \frac{1}{x+7} + c$

9. A $= -\frac{13}{64}\arctan(\frac{1}{4}e^x) + \frac{29\sqrt{2}}{128}\arctan(\frac{1}{4\sqrt{2}}e^x) + c$

B $= \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot artanh(\frac{2\tan(\frac{x}{2})-1)}{\sqrt{5}}) + c$

C $= -\frac{3}{34}\ln(|x+1|) + \frac{7}{50}\ln(|x+3|) - \frac{11}{425}\ln(x^2+16) + \frac{141}{1700}\arctan(\frac{x}{4}) + c$

10. A $= \sqrt{x^2-4x+7} + 2arsinh(\frac{x-2}{\sqrt{3}}) + c$

$= \sqrt{x^2-4x+7} + 2\ln(x-2+\sqrt{(x-2)^2+3}) + c$

B $= -\frac{\delta}{\delta^2+\omega^2}\cdot\exp(-\delta t)\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\delta^2+\omega^2}\cdot\exp(-\delta t)\cdot\cos(\omega t) + c$

C $= \frac{2}{45}\ln(|x+3|) - \frac{1}{45}\ln(x^2+36) + \frac{1}{45}\arctan(\frac{x}{6}) + c$

11. A $= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sin(x)+1} - \frac{1}{8}\ln(|\sin(x)-1|) + \frac{1}{8}\ln(|\sin(x)+1|) + c$

B $= x\tan(x) + \ln(|\cos(x)|) + c$

C $= -\frac{5}{26}\ln(|x+2|) + \frac{9}{50}\ln(|x+4|) + \frac{2}{325}\ln(x^2+9) + \frac{109}{975}\arctan(\frac{x}{3}) + c$

12. A $= \frac{1}{2}\ln(|\sin(x)+1|) - \frac{1}{6}\ln(|\sin(x)-1|) - \frac{1}{3}\ln(|2\sin(x)+1|) + c$

B $= -x\cot(x) + \ln(|\sin(x)|) + c$

C $= \frac{1}{2}\ln(|x-2|) - \frac{1}{5}\ln(|x-1|) + \frac{7}{20}\ln(\left|x^2+2x+2\right|) - \frac{1}{10}\arctan(x+1) + c$

13. A $= \ln(\left|\tan(\frac{x}{2})+1\right|) + c$

B $= \frac{1}{2}x\cos(\ln(|x|)) + \frac{1}{2}x\sin(\ln(|x|)) + c$

C $= x + 2\ln(|x|) - 3\ln(|x+1|) + \frac{1}{x+1} + c$

14. A $= \frac{1}{3}\ln(|2\sin(x)-1|) - \frac{1}{3}\ln(\sin(x)+1) + c$

B $= -x\cot(x) - \frac{1}{2}x^2 + \ln(|\sin(x)|) + c$

C $= \frac{1}{25}\ln(|x+1|) - \frac{1}{5}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{25}\ln(x^2+4) - \frac{3}{50}\arctan(\frac{x}{2}) + c$

15. A $= -\frac{1}{6}\cos(x^3) - \frac{1}{18}\cos(3x^3) + c = -\frac{2}{9}cos^3(x^3) + c$

B $= \ln(3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3) + n\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}) - n\frac{\sqrt{2}}{2} - n \approx 0,322 - 0,048n$

16. A $= \frac{\sqrt{2}}{4}artanh(\sqrt{2}\cos(x^2)) + c$

B $= -3\ln(1+\cos(x)) - 3\cos(x)\ln(1+\cos(x)) + 3\cos(x) + 3;\ B(\frac{\pi}{2}) - B(\frac{\pi}{4}) \approx 0.6176$

C $= \frac{1}{52}\ln(|x-2|) + \frac{3}{52}\ln(|x+2|) - \frac{1}{26}\ln(x^2+9) + \frac{1}{39}\arctan(\frac{x}{3}) + c$

17. A $= \frac{1}{3}\ln(\sin(x^3)+1) + c$

B $= \frac{7}{2}\ln(7) - 7\ln(2) - \frac{3}{2} \approx 0.45866$

C $= \frac{47}{266}\ln(x^2+2x+4) + \frac{74\cdot\sqrt{3}}{399}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{3}}) - \frac{10}{21}\ln(|x+3|) + \frac{7}{57}\ln(|x-3|) + c$

18. A $= [-\frac{1}{3}\cos^3(x^2) + \frac{1}{2}\cos(x^2)]\Big|_0^{2\pi} = 0$

B $= \sqrt{1+x^2}\arctan(x) - arsinh(x) + c$

19. A $= \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} - \frac{1}{2}\cdot artanh(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}) + c, & \text{wenn } x < 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} - \frac{1}{2}\cdot arcoth(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}) + c, & \text{wenn } x > 0 \end{cases}$

B $= -\frac{1}{2}\frac{x^2}{sin^2(x)} - x\cot(x) + \ln(\sin(x)) + c$

C $= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \ln(x-1)) + c$

20. A $= \frac{1}{2}\ln(\tan^2(x)+1) - \ln(5+2\tan(x)) + x + c$

B $= x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}\arcsin(x) - \frac{1}{2}x + c$

C $= \frac{1}{4}\ln(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} + c$

21. A = $2\ln(2)-1 \quad \approx 0,3863$
B = $\frac{5}{4}\ln(\frac{41}{16})-\ln(2)-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}+2\arctan(\frac{5}{4}) \quad \approx 0,2044$

22. A = $\frac{1}{2}\ln(\tan(x)+1)-\frac{1}{4}\ln(\tan^2(x)+1)+\frac{1}{2}x+c$
B = $x \ \cdot arsinh(x)-\sqrt{x^2+1}+c$
C = $\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan(x)+c$

23. A = $-\frac{1}{2}\ln(\tan(x)+1)+\frac{1}{4}\ln(\tan^2(x)+1)+\frac{1}{2}x+c$
B = $\sinh(x)\ln(1+e^x)-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}x+c$
C = $-3\ln(x)+\frac{1}{x}+3\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}+c$

24. A = $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}) \quad \approx 0,4352$
B = $-x\coth(x)+\ln(\sinh(x))+c$

25. A = $\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a\tan(x)}{b})+c$
B = $e^{bx}\sin(ax)\left[\frac{bx}{a^2+b^2}-\frac{b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}\right]+e^{bx}\cos(ax)\left[\frac{-ax}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}\right]+c$

26. A = $\frac{1}{2}\ln(\cos(x))+\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(x)}+c$
B = $\frac{1}{2}\frac{x^2}{\cos^2(x)}-x\tan(x)-\ln(\cos(x))+c$
C = $-\ln(x-1)+\frac{3}{5}\ln(x-2)+\frac{1}{5}\ln(x^2+1)-\frac{1}{5}\arctan(x)+c$

27. A = $-x+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\frac{4}{9}\ln(1+3\sqrt{x})+c$
B = -2

28. A = $-2artanh(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2})+c \quad = \quad \ln(\sqrt{1-x^2}-2)-\ln(\sqrt{1-x^2}+2)$
B = $\frac{1}{12}x^3\ln(x^2+1)-\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\arctan(x)+c$

29. $C=\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\pi$

30. A = $-\frac{1}{2a}\cot^2(a\ln(bx))-\frac{1}{a}\ln(\sin(a\ln(bx)))+c$
B = $\sqrt[5]{(3x+2)^4}\left[\frac{20}{513}(3x+2)^3-\frac{20}{63}(3x+2)^2+\frac{80}{81}(3x+2)+\frac{365}{27}\right]$

31. C = $\frac{1}{2}x^2+2x+2\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\arctan(\frac{x+1}{2})+c$
Zusatzaufgabe:
C = $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1})+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(x\sqrt{2}-1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(x\sqrt{2}+1)+c$

6.4 Taylorreihen

1. $f(x)=\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}+R_4(x^7)$
2. $f(x)=\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+R_3(x^4)$
3. $f(x)=1-\frac{1}{2}\,x^5+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^{10}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^{15}+R_5(x^{20})$
4. $f(x)=1-\frac{1}{3}\,x^5+\frac{2}{9}\,x^{10}-\frac{14}{81}\,x^{15}+R_5(x^{20})$
5. $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{x^2}{48}+\frac{x^4}{1440}+R_4(x^6)$
6. $I=\int_0^{\pi/6}(4-\frac{16}{3}\,x^2+\frac{128}{45}\,x^4-\frac{256}{315}\,x^6)dx \ \approx 1,8603...$
$R_5(x)\le T_5=\frac{4^{10}}{18\cdot 10!}\cdot(\frac{\pi}{6})^9 \ \approx 0,47\cdot 10^{-4}$
7. $I=\int_0^{0.6}(x-\frac{x^3}{1!}+\frac{x^5}{2!}-\frac{x^7}{3!})dx \ \approx 0,151...$
$T_4=\frac{0.6^8}{48} \ \approx 0,35\cdot 10^{-3}$
8. $I=\int_0^{0.9}(-\frac{x}{1!}+\frac{x^5}{3!}-\frac{x^9}{5!}+\frac{x^{13}}{7!})dx \ \approx 0,39052507...$
$T_5=\frac{0.9^{18}}{18\cdot 9!} \ \approx 2,2\cdot 10^{-8}; I_{exakt}=0,3905250961...; \Delta=2,29\cdot 10^{-8}$

9. $I = \int_0^{0.9}(-x^3 + \frac{1}{3}\,x^7 - \frac{2}{15}\,x^{11}\; + \frac{17}{315}\,x^{15}\; - \frac{62}{2835}\,x^{19}\,)dx\; \approx 0,14873...$
$T_6 \leq = \frac{62}{56700}\cdot 0.9^{24}\; \approx 8,7\cdot 10^{-5}$; $I_{exakt} = 0,1487108786...$; $\Delta = 2,4\cdot 10^{-5}$

10. $f(x) = x - \frac{1}{3}\,x^5 + \frac{2}{9}\,x^9 - \frac{14}{81}\,x^{13} + \frac{35}{243}\,x^{17} + R_6(x^{21})\; \approx 0,576117...$
$T_5 = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{4!\cdot 3^5}\cdot 0.6^{17}\; \approx 2,4\cdot 10^{-5}$; $f_{exakt}(0.6) = 0,576116...$; $\Delta = 0,1\cdot 10^{-5}$

11. $I = \int_0^{0.5}(-2x^4 + \frac{8}{3}\,x^8 - \frac{64}{15}\,x^{12}\; + \frac{2176}{315}\,x^{16}\; + R_5(x^{20})dx\; \approx -0,01192...$
$T_3 = \frac{64}{195}\cdot 0.5^{13}\; \approx 0,4\cdot 10^{-4}$; $\Delta_{I_2,I_3} \leq 1\cdot 10^{-6}$

12. $I = \int_0^{0.5}(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}\,x^4 + \frac{14}{6!}\,x^8\; - \frac{1}{8!}\,x^{12}\; + R_5(x^{16})dx\; \approx 0,249739884...$
$T_4 = \frac{1}{13\cdot 8!}\cdot 0.5^{13}\; \approx -2,3\cdot 10^{-10}$

13. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\frac{1}{1!}\,x^3 + \frac{1}{3!}\,x^7 - \frac{1}{5!}\,x^{11}\; + \frac{1}{7!}\,x^{15}\; - \frac{1}{9!}\,x^{19} + R_6(x^{23}))dx\; \approx -0,271698307...$
$T_6 = \frac{\pi^{24}}{24\cdot 3^{24}\cdot 11!}\; \approx 0,3\cdot 10^{-8}$; $I_{exakt} = -0,271698303...$; $\Delta = 4\cdot 10^{-9}$

14. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2!}\,x^8 - \frac{1}{4!}\,x^{14} + \frac{1}{6!}\,x^{20}\; - \frac{1}{8!}\,x^{26} + R_5(x^{32}))dx$
$T_4(\frac{\pi}{4})\; \approx 1,3\cdot 10^{-9} > F$; $T_5(\frac{\pi}{4})\; \approx 2,8\cdot 10^{-12} < F$; $\rightarrow$ 4Terme erforderlich ;
$I_{exakt} = 0,0062436458...$; $\Delta_{T_4,exakt} \approx 1\cdot 10^{-10}$

15. $I = \int_0^{0.5}(x^3 - \frac{1}{4}\,x^6 + \frac{5}{32}\,x^9\; - \frac{15}{128}\,x^{12} + \frac{195}{2048}\,x^{15} + R_6(x^{18}))dx\; \approx 0,01536023...$
$T_5 = \frac{195}{32768\cdot 2^{16}}\; \approx 0.9\cdot 10^{-7}$

16. $I = \int_{0.1}^{0.2}(\,x^{-3} - x^{-2} + \frac{1}{2!}\,x^{-1}\; - \frac{1}{3!}\,x^0 + \frac{1}{4!}\,x^1\; - \frac{1}{5!}\,x^2 + \frac{1}{6!}\,x^3 + R_7(x^4))dx\; \approx 32,83053...$
$T_6 = \frac{1}{3\cdot 5!}(\frac{2}{10})^3\; \approx 0,2\cdot 10^{-5}$

17. $I = \; x - \frac{1}{12}\,x^3\; - \frac{1}{480}\,x^5 + R(x^7)\; \approx 0,51155...$
$T_3 = \frac{1}{480}(\frac{\pi}{6})^5\; \approx 8\cdot 10^{-5}$

18. $I_6 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^8 + \frac{2}{117}x^{13} - \frac{7}{729}x^{18} + \frac{35}{5589}x^{23} - \frac{13}{2916}x^{28} + R(x^{33}) \approx 0,02130614072719...$
$T_4 = \frac{7}{729}(0,4)^{18}\; \approx 6,6\cdot 10^{-10} \geq F$
$T_5 = \frac{35}{5589}(0,4)^{23}\; \approx 4,4\cdot 10^{-12} \leq F$; $I_4 = \; 0,0213061407228$

19. $P_4(x) = \; \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{24}\,x^3\; + \frac{1}{240}\,x^5 + \frac{407}{954240}\,x^7 + R(x^9)$
$f(2)\; = \; 1,5574$; $|f(2) - P_4(2)| \; = \; 0,036 \; < \; F$; $|f(2) - P_3(2)| \; = \; 0,091 \; < \; F$;
$|f(2) - P_2(2)| = 0,22 > F$; $\Rightarrow$ 3 Terme erforderlich.

20. $I_{T_5} = \int_0^{\frac{2}{3}}(1 - x + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x^4 + \frac{1}{30}\,x^5\; - 0\cdot\; x^6 + R_6(x^7))dx\; \approx 0,4570035...$
$I_{exakt} = 0,4569968...$; $\Delta_{T_5,exakt} \approx 0,67\cdot 10^{-5} < F$

21. $P_4(x) = \; x + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3\; - \frac{1}{12}\,x^4 + R(x^5)$; $\quad R_5(x) = \; \frac{1}{3}\,10^{-6}$

22. $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + R(x^3)$

23. (a) $T_a(x) = \frac{1}{4} - \; \frac{1}{4^2}x\; + \frac{1}{4^3}\,x^2 - \frac{1}{4^4}\,x^3\; + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}\,x^{n-1} + \; \cdots$;
Konvergenzradius: $\quad -4 < r < 4$

(b) $T_b(x) = \frac{1}{5} - \; \frac{x-1}{5^2}\; + \frac{(x-1)^2}{5^3}\; - \frac{(x-1)^3}{5^4}\; + \cdots + (-1)^n\frac{(x-1)^n}{5^{n+1}} + \; \cdots$;
Konvergenzradius: $\quad -4 < r < 6$

(c) $T_c(x) = \ln(5) + \frac{1}{1}\frac{x-1}{5} - \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{5^2}\; + \frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{5^3}\; - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^4}{5^4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(\frac{x-1}{5})^n + \cdots$;
Konvergenzradius: $\quad -4 < r \leq 6$

(d) Konvergenzradius in allen drei Fällen durch die Polstelle in den Ableitungsfunktionen bei $x_p = -4$ nach unten beschränkt.

6.5 Fourierreihen

1. $a_0 = 0$; $\quad a_n = \begin{cases} 0 & , \; n \;\; gerade \\ -\frac{16}{n^2\cdot\pi^2} & , \; n \; ungerade \end{cases}$; $\qquad b_n = \begin{cases} 0 & , \; n \;\; gerade \\ -\frac{16}{n\cdot\pi} & , \; n \; ungerade \end{cases}$

$$f(t) = -16\cdot\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(\frac{(2n-1)\pi}{4}\;t) + \frac{1}{(2n-1)\pi}\sin(\frac{(2n-1)\pi}{4}\;t)]$$

$f(t) = -\frac{16}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{4}t) - \frac{16}{\pi}\sin(\frac{\pi}{4}t) - \frac{16}{3^2\pi^2}\cos(\frac{3\pi}{4}t) - \frac{16}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{4}t) - \frac{16}{5^2\pi^2}\cos(\frac{5\pi}{4}t) - \frac{16}{5\pi}\sin(\frac{5\pi}{4}t) - \cdots$

2. $a_0 = \frac{A}{\pi}(e^{2\pi} - 1)$; $a_n = \frac{A}{\pi}(\frac{e^{2\pi}-1}{1+n^2})$; $b_n = \frac{n \cdot A}{\pi}(\frac{1-e^{2\pi}}{1+n^2})$

$f(t) = \frac{A}{2\pi}(e^{2\pi} - 1) + \cdots$
n=1: $+\frac{A}{2\pi}(e^{2\pi} - 1)[\cos(t) - \sin(t)]$
n=2: $+\frac{A}{5\pi}(e^{2\pi} - 1)[\cos(2t) - 2\sin(2t)]$
n=3: $+\frac{A}{10\pi}(e^{2\pi} - 1)[\cos(3t) - 3\sin(3t)]$
n=4: $+\frac{A}{17\pi}(e^{2\pi} - 1)[\cos(4t) - 4\sin(4t)]$
n=5: $+\frac{A}{26\pi}(e^{2\pi} - 1)[\cos(5t) - 5\sin(5t)] + \cdots$

3. $a_0 = -5$; $a_n = \begin{cases} 0 & , \ n \ gerade \\ -\frac{12}{n^2 \cdot \pi^2} & , \ n \ ungerade \end{cases}$; $b_n = 0$, da f(t) gerade

$$f(t) = -\frac{5}{2} - 12 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2} \cos(\frac{(2n-1)\pi}{3} t)$$

$f(t) = -\frac{5}{2} - \frac{12}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{3}t) - \frac{12}{3^2\pi^2}\cos(\frac{3\pi}{3}t) - \frac{12}{5^2\pi^2}\cos(\frac{5\pi}{3}t) - \frac{12}{7^2\pi^2}\cos(\frac{7\pi}{3}t) - \frac{12}{9^2\pi^2}\cos(\frac{9\pi}{3}t) - \cdots$

4. $a_0 = -\frac{3}{4}$; $a_n = \begin{cases} 0 & , \ n \ gerade \\ -\frac{1}{n^2 \cdot \pi^2} & , \ n \ ungerade \end{cases}$; $b_n = 0$, da f(t) gerade

$$f(t) = -\frac{3}{8} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2} \cos(\frac{(2n-1)\pi}{2} t)$$

$f(t) = -\frac{3}{8} - \frac{1}{\pi^2}\cos(\frac{\pi}{2}t) - \frac{1}{3^2\pi^2}\cos(\frac{3\pi}{2}t) - \frac{1}{5^2\pi^2}\cos(\frac{5\pi}{2}t) - \frac{1}{7^2\pi^2}\cos(\frac{7\pi}{2}t) - \cdots$

5. $a_0 = -\frac{5}{8}$; $a_n = \begin{cases} \frac{3}{2n^2\pi^2} & , \ n \ gerade \\ \frac{6}{n^4\pi^4} - \frac{1}{2n\pi} & , \ n \ ungerade \end{cases}$; $b_n = \begin{cases} 0 & , \ n \ gerade \\ -\frac{1}{2n\pi} & , \ n \ ungerade \end{cases}$
$f(t) = -\frac{5}{16} + \frac{3}{2}\frac{4-\pi^2}{\pi^4}\cos(\pi t) - \frac{1}{2\pi}\sin(\pi t) + \frac{3}{8\pi^2}\cos(2\pi t) + \frac{1}{3}\frac{4-9\pi^2}{18\pi^4}\cos(3\pi t) - \frac{1}{6\pi}\sin(3\pi t) + \frac{3}{32\pi^2}\cos(4\pi t) + \cdots$

6. $a_0 = \frac{2\pi}{3}$; $a_n = \frac{4}{\pi n^2}$; $b_n = 0$, da f(t) gerade

$$f(t) = \frac{\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi} \cos(nt)$$

$a_1 = \frac{4}{\pi}$; $a_2 = \frac{1}{\pi}$; $a_3 = \frac{4}{9\pi}$; $a_4 = \frac{1}{4\pi}$
$f(t) = \frac{\pi}{3} + \frac{4\cos(t)}{\pi} + \frac{\cos(2t)}{\pi} + \frac{4}{9}\frac{\cos(3t)}{\pi} + \frac{1}{4}\frac{\cos(4t)}{\pi} + \cdots$

7. $a_0 = -\frac{1}{3}$; $a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}$; $b_n = 0$, da f(t) gerade

$$f(t) = -\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t)$$

$a_1 = \frac{4}{\pi^2}$; $a_2 = \frac{1}{\pi^2}$; $a_3 = \frac{4}{9\pi^2}$; $a_4 = \frac{1}{4\pi^2}$
$f(t) = -\frac{1}{6} + \frac{4\cos(\pi t)}{\pi^2} + \frac{\cos(2\pi t)}{\pi^2} + \frac{4}{9}\frac{\cos(3\pi t}{\pi^2} + \frac{1}{4}\frac{\cos(4\pi t)}{\pi^2} + \cdots$

8. $a_0 = 0$; $a_n = 0$, da f(t) ungerade
$b_1 = -\frac{1}{2}$; $b_2 = \frac{4}{3}$; $b_3 = -\frac{3}{4}$; $b_4 = \frac{8}{15}$
$f(t) = -\frac{1}{2}\sin(t) + \frac{4}{3}\sin(2t) - \frac{3}{4}\sin(3t) + \frac{8}{15}\sin(4t) - \cdots$

9. $a_0 = 0$; $a_n = 0$, da f(t) ungerade
$b_1 = (-1) \cdot \frac{-e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{\pi(a^2+1)}$; $b_2 = 2 \cdot \frac{-e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{\pi(a^2+4)}$; $b_3 = (-3) \cdot \frac{-e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{\pi(a^2+9)}$; $b_4 = 4 \cdot \frac{-e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{\pi(a^2+16)}$
$b_5 = (-5) \cdot \frac{-e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{\pi(a^2+25)}$;
$f(t) = b_1\sin(t) + b_2\sin(2t) + b_3\sin(3t) + +b_4\sin(4t) + b_5\sin(5t) \cdots$
Skizze der Fourier-Koeffizienten: siehe Abbildung in Kapitel 8

10. $a_0 = 0$; $b_n = 0$, da f(t) achsensymmetrisch
$a_n = \frac{1}{4n^2-1}$; $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nt)$
$\mathcal{J}_1 = 0,11685$; $\mathcal{J}_2 = 0,11673$; Fehler ≤ 0.000125

6.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. y(x)= $\frac{17}{18} - C_2 + \frac{1}{18}\cos(3x) - \frac{1}{18}\sin(3x) + e^{3x}(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + C_2)$
2. y(x)= $\frac{269}{117} - C_2 + C_2 e^{2x} + e^{3x}(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}) - \frac{1}{13}\cos(3x) - \frac{2}{39}\sin(3x)$
3. y(x)= $e^x(\frac{59}{50} - C_1 + C_1 x + \frac{1}{3}x^3 + x^2) + \cos(x) - \frac{2}{25}\cos(3x) - \frac{3}{50}\sin(3x)$
4. y(x)= $\frac{1}{50}e^x(-8\cos(x) + \sin(x)(56 + 25x)) + \frac{1}{25}e^{-x}(5x + 4)$
5. y(x)= $-\frac{42}{2125}e^{-4x} - \frac{3}{34}\cos(x) - \frac{5}{34}\sin(x) + \frac{1}{250}e^x(25x^2 - 10x + 27)$
6. y(x)= $-\frac{2}{9} + \frac{1}{3}x + e^{-x}(C_1\sin(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{2}x)(\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{2}}{4}x))$
7. y(x)= $C_1 e^{(-2+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3})x} - \frac{1}{4}\cos(x) + \frac{1}{26}e^{2x} + \frac{1}{6}e^{-2x}$
   mit $C_1 = \frac{3\sqrt{3}}{52} + \frac{7}{312} \approx 0.12236$, $C_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{52} + \frac{7}{312} \approx -0.07749$
8. y(x)= $-\frac{1}{16}e^x + \frac{3}{26}\cos(x) + \frac{1}{13}\sin(x) + \frac{1}{208}e^{5x}(52x - 11)$
9. y(x)= $\frac{22}{15}e^x - \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{3}{20}\sin(2x) - \frac{1}{24}e^{-2x} + \frac{1}{8}e^{2x}(4x - 3)$
10. y(x)= $\frac{53}{25}e^{-x}\sin(x) + \frac{21}{25}e^{-x}\cos(x) + \frac{1}{25}(5x + 3)\sin(x) + \frac{1}{25}(-10x + 4)\cos(x)$
11. allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = C_1 + C_2 \cdot e^{-2t}$
    allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = C_1 + e^{-2t} \cdot (C_2 - \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2) - \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{1}{8}\sin(2t)$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$: $\quad C_1 = \frac{13}{8}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 0$: $\quad C_2 = \frac{1}{8} - C_1$.

12. allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 \cdot e^{-t}$
    allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + C_2 \cdot e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-t} + \sin(t)$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$: $\quad C_1 = C_2 = 0$
    spezielle Lösung zu $y'(0) = 0$: $\quad C_1 = -\frac{1}{2} \cdot C_2 + \frac{1}{2}$.

13. allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = C_1 \cdot x \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot e^x - \sin(x)$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$: $\quad C_1 = 2 \quad , \quad C_2 = \frac{1}{2}$
    $y_{ispez}(t) = 2 \cdot x \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot e^x - \sin(x) = 2 \cdot x \cdot e^{-x} + \cosh(x) - \sin(x)$

14. allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-t}$
    allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-t} - e^{-2t}(t^2 + 3t) + \cos(2t) - 3 \cdot sin(2t)$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$: $\quad C_1 = -9 \quad , \quad C_2 = 8$
    spezielle Lösung zu $y'(0) = 1$: $\quad C_2 = -2 \cdot C_1 - 10$

15. allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$
    allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = C_1 \cdot e^{2t} + C_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t}(-5t^2 + 6t) - 5 \cdot \cos(2t) - 3 \cdot sin(2t)$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$: $\quad C_1 = \frac{6}{5} \quad , \quad C_2 = \frac{24}{5}$
    spezielle Lösung zu $y'(0) = 1$: $\quad C_2 = 4 \cdot C_1 - 2$

16. allgemeine Lösung homogen: $y_0(x) = e^x(C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x))$
    allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(x) = e^x(C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x) + \frac{1}{4}x\sin(2x) + \frac{1}{4})$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$: $\quad C_1 = 0 \quad , \quad C_2 = \frac{3}{4}$
    spezielle Lösung zu $y'(0) = 0$: $\quad C_2 = -\frac{1}{4}$

17. allgemeine Lösung: $y_{allg}(x) = \frac{\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2} + C}{\cos(x)}$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 0$: $\quad C = -1, \ y_{spez1}(x) = \frac{\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}}{\cos(x)}$
    spezielle Lösung zu $y(0) = 1$: $\quad C = 0, \ y_{spez2}(x) = \frac{\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}}{\cos(x)}$

18. allgemeine Lösung homogen: $y_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}(C_1\sin(\frac{x}{2}) + C_2\cos(\frac{x}{2}))$
    allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(x) = e^{-\frac{x}{2}}(C_1\sin(\frac{x}{2}) + C_2\cos(\frac{x}{2}) - \frac{2}{3}\cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(\frac{x}{2}))$
    spezielle Lösung zu $y(0) = -\frac{1}{6}, \quad y'(0) = \frac{1}{12}$: $\quad C_1 = 0 \quad , \quad C_2 = \frac{1}{2}$
    spezielle Lösung zu $y'(0) = \frac{1}{3}$: $\quad C_1 = C_2$

19. (a) i. $k=-1, \omega=0 \quad : \quad y_0(t)=e^{-t}(C_1 t+C_2)$
   Ansatz $y_{sp}(t)=t^2 A e^{-t}$

   ii. $k=-1, \omega=2 \quad : \quad y_0(t)=e^{-t}(C_1\sin(2t)+C_2\cos(2t))$
   Ansatz $y_{sp}(t)=te^{-t}(A\cos(2t)+B\sin(2t))$

   (b) $k=0, \omega\neq 0$, beliebig : Ansatz $y_{sp}(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$
   $y_{allg}(t)=e^{-t}(C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t))+\frac{\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega t)}{4\omega^2+1}$

   (c) $y_{sp}(t)=\frac{-e^{-t}2\omega\sin(\omega t)+\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega t)}{4\omega^2+1}$

20. allgemeine Lösung homogen: $y_0(x)=\frac{C}{tan(x)}$
   allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(x)=\frac{-\ln(cos(x))+c}{\tan(x)}$
   spezielle Lösung: $y_{speziell}(x)=\frac{-\ln(cos(x))}{\tan(x)}$

21. (a) $a_1=0; \quad a_0=-1; \quad s(t)=2\sin(t)+3e^t-e^{-t}$
   (b) allg. Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+\frac{3}{2}te^t-\frac{1}{2}te^{-t}-\sin(t)$
   (c) spez. Lösung: $C_1=\frac{5}{2}; \quad C_2=\frac{1}{2}$

22. (a) $y(x)=-1\pm\sqrt{1+\frac{2}{t}\,x}$, definiert für $t\neq 0$
   (b) i. $y_i(t)=\frac{1}{3}\,\frac{1}{a+2}\,e^{-2t}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{a-1}\,e^t+\frac{1}{a+2}\,\frac{1}{a-1}\,e^{at}$

   ii. $y_{ii}(t)=\frac{1}{9}\,e^{-2t}-\frac{1}{9}\,e^t+\frac{1}{3}\,t\,e^t$

   iii. zu zeigen: $\lim_{a\to 1}(y_{i_a}(t))=y_{ii}(t)$

Kapitel 7

Lösungen Mathematik 3

7.1 Laplacetransformation

1. a) $F(s) = \frac{(\pi s^3+2s^2+\pi s+1)e^{-s\pi}+s^2}{s^2(s^2+1)}$, $Re\ s > 0$

   b) $F(s) = \frac{6}{(s+2)^4}$, $Re\ s > -2$

2. $f(t) = e^t\left[2\cos(2t) + \frac{5}{2}\sin(2t)\right]$
3. $f(t) = e^t - t - 1$, $F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)}$
4. a) $F(s) = \frac{s+e^{-s(\pi/2)}}{s(s^2+1)}$, $Re\ s > 0$

   b) $F(s) = \frac{6}{(s+5)^4}$, $Re\ s > -5$

5. $F(s) = \frac{s^2+4s+8}{s^2(s+4)^2}$, $Re\ s > 0$
6. $f(t) = \frac{1}{8}\cos(2t) - \frac{3}{8}\sin(2t) - \frac{1}{8}e^2t$
7. $F(s) = \ e^{(-\pi s)}(\frac{\pi s}{s^2+4} + \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} + \frac{\pi s+1}{s^2}) - \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$, $Re\ s > 0$
8. $f(t) = \frac{2}{3}\ e^{(12-2t)}(6\cos(3t-12) - 7\sin(3t-12))$
9. $F(s) = \frac{e^{(-b)}}{s^3} + \frac{e^{(b)}}{(s-2)^3}$, $Re\ s > 2$
10. $f(t) = \frac{1}{3}\cos(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{12}\sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{4}e^{(-t)} - \frac{1}{12}e^{(t)}$
11. $F(s) = \frac{1}{2}\frac{e^{(-2b)}}{(s-a-2)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-a+2)^2}$, $Re\ s > a+2$
12. $f(t) = \frac{8}{19}\cos(3t) + \frac{8}{57}\sin(3t) + \frac{3}{38}\cosh(\frac{\sqrt{2}}{2}t) + \frac{3\sqrt{2}}{38}\sinh(\frac{\sqrt{2}}{2}t)$
13. $F(s) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}s}(\frac{3s^3+3s\pi^2+2s^2-2\pi^2}{(s^2+\pi^2)^2} - \frac{3}{s}) + \frac{2\pi s}{(s^2+\pi^2)^2}$

    $Re\ s > 0 \Rightarrow \lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{3}{2}}^{a} -\frac{3}{2}\cdot e^{-st}dt < \infty$

14. $f(t) = -\frac{1}{100}\cos(2t) - \frac{1}{200}\sin(2t) + \frac{1}{600}e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{120}e^{\frac{3}{2}t}$

    $= -\frac{1}{100}\cos(2t) - \frac{1}{200}\sin(2t) + \frac{1}{100}\cosh(\frac{3}{2}t) + \frac{1}{150}\sinh(\frac{3}{2}t)$

15. $F(s) = \frac{e^{(2b)}}{(s+2a)^3} + \frac{1}{s^3}$, $Re\ s > 0$ und $Re\ s > -2a$
16. $F(s) = \frac{24\omega^3\cdot s(s^2+5\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^2\cdot(s^2+9\omega^2)^2}$, $Re\ s > 0$
17. $f(t) = \frac{1}{2}(\sin(t) + t\cos(t)) - t\cdot e^{-t}$

18. $F(s) = \frac{e^{-2s}(-2s^3-2s\pi^2-s^2+\pi^2)+s^2-\pi^2}{(s^2+\pi^2)^2} + \frac{2e^{-2s}(2s+3)}{(s+1)^2}$
$\lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_2^a te^{-(s+1)t}dt < \infty$, wenn $Re\ s > -1$

19. $F(s) = \frac{-6e^5(s^3+33s+70)}{(s^2+2s+37)^3}$

20. $F(s) = \frac{1}{4}\frac{s^4+15}{(s^2-1)(s^2+2s+5)(s^2-2s+5)}$ $\quad Re\ (s) > 1$

21. $F(s) = -e^{-2b}\frac{1}{(s+2a)^3} + \frac{1}{s^3}$ $\quad Re\ (s) > a$

22. $F(s) = \frac{s^4+4s^3+6s^2+4s+1+2\omega^2s^2+4\omega^2s+2\omega^2+8\omega^4}{(s+1)^2(s^2+2s+1+4\omega^2)^2}$ $\quad Re\ (s) > 0$

23. $f(t) = e^{-t}(-3 + 4\cos(t) - 2\sin(t)$

24. $f(t) = -(1 + e^{-t+2})$

25. (a) da $s_p = 1 > 0 \ \to\ \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty\ \to Re(s) > 1$
ansonsten Widerspruch zu Grenzwertsatz: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty \neq 0 = \lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$
(b) $f(t) = \frac{1}{9}e^t - \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{1}{3}t\cdot e^{-2t}$
$\lim_{t\to 0} f(t) = 0 \quad (= \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s))$
$\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty \quad (\neq \lim_{s\to 0} s\cdot F(s),\quad \text{da } s\to 0 \notin D_F)$

26. $F(s) = \frac{\omega\cdot e^{-\phi}\cdot\left[(s^2+2s\omega)\cos(\phi)-2s\omega\sin(\phi)-2\omega^2\sin(\phi)\right]}{(s^2+2s\omega+2\omega^2)^2}$; $\quad Re\ (s) > 0$

27. $f(t) = \frac{2}{5}\cos(t) - \frac{3}{10}sin(t) - \frac{2}{5}cos(2t)e^{(-t)} + \frac{9}{20}\sin(2t)e^{(-t)}$

28. $F(s) = \omega\ e^{-s}\frac{s^2+6s+\omega^2+8}{(s^2+4s+4+\omega)^2}$; $\quad Re\ (s) > -2$

29. (a) $f(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}(\cosh(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}\sinh(\sqrt{3}t))$
(b) $\lim_{t\to 0} f(t) = 3 \quad (= \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s))$
$\lim_{t\to\infty} f(t) = \infty \quad (\neq \lim_{s\to 0} s\cdot F(s),\quad \text{da } s\to 0 \notin D_F;\ Re(s) > 1)$

30. $F(s) = \frac{1}{1-e^{-\frac{s\pi}{\omega}}}\frac{2\omega e^{-\frac{s\pi}{2\omega}}-se^{-\frac{s\pi}{\omega}}+s}{s^2+\omega^2}$

$G(s) = \frac{1}{1-e^{-\frac{(s+1)\pi}{\omega}}}\frac{2\omega e^{-\frac{(s+1)\pi}{2\omega}}-(s+1)e^{-\frac{s\pi}{\omega}}+s+1}{(s+1)^2+\omega^2}$

31. $f(t) = \frac{1}{2}\frac{(a+b\omega^2)\sinh(\omega t)+\sin(\omega t)(-a+b\omega^2)}{\omega^3}$

32. $F(s) = \frac{A}{s}\frac{e^{as}}{e^{as}+1}$

33. $f(t) = e^{(-a\ t)} + e^{\left(\frac{1}{2}\ a\ t\right)}\left[\sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}\ a}{2}t) - \cos(\frac{\sqrt{3}\ a}{2}t)\right]$

34. in beiden Fällen: $F(s) = \frac{s^2+2}{s\ (s^2+4)}$, $\quad Re(s) > 0$

35. $F(s) = \frac{s}{(s+a)^{3/2}}$

36. (a) $f(t) = \frac{1}{500}\{e^{2t}(5t-6) + e^{-t}\left[(6-20t)\cos t + (33+15t)\sin t\right]\}$
(b) $f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{wenn } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{wenn } t = 1 \end{cases}$; Kippschwingung mit der Periode 1

37. (a) $F(s) = \frac{-e^{-2s}+s+1}{s(s+1)}$, $\quad Re(s) > -1$
(b) $F(s) = \frac{1}{4}\ln(1 + \frac{4}{(s+1)^2})$

38. $F(s) = \frac{e^{-2\pi s}(2\pi^2s^3+s^2+1)-2\pi^2s^4+2\pi s^3-s^2+2\pi s-1}{2\pi^2s^3(s^2+1)(s^2+4)}$

39. $f(t) = \frac{1}{4}\ e^t\ (2t+5) - \frac{1}{4}\ e^{2t}\left[\cos(t)(t+5)\ + \sin(t)(3t-4)\right]$

40. richtig: Antwort b)

7.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen und Laplacetransformation

1. $y(t) = \frac{1}{6}\left(e^{-2t} + 8e^{t} - 15\right) e^{t}$
2. $y(t) = -e^{t} \cdot \sin(t)$
   allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{t} \cdot t$
3. $y(t) = -\frac{1}{3} \cdot e^{t} + \frac{16}{39} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{13}(-e^{t}\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{t}\sin(2t)$
   allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-2t}$
   allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = C_1 \cdot e^{t} + C_2 \cdot e^{-2t} + \frac{1}{13}(-e^{t}\cos(2t) + \frac{3}{2}e^{t}\sin(2t)$
4. $y(t) = e^{-2t} \cdot (\frac{3}{2} \cdot \sin(t) + \cos(t)) - \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^{-2t}$
   allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = e^{-2t} \cdot (C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$
   allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = e^{-2t} \cdot (C_1 \cdot \sin(t) + (C_2 \cos(t)) - \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^{-2t} \cdot \cos(t)$
5. $y(t) = e^{t} \cdot (\frac{\sqrt{5}}{30} \cdot \sin(t\sqrt{5}) + \frac{9}{10}\cos(t\sqrt{5})) + \frac{1}{60} \cdot e^{-4t} + \frac{1}{12}$
   allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = e^{t} \cdot (C_1 \sin(t\sqrt{5}) + C_2 \cos(t\sqrt{5})$
   allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = e^{t} \cdot (C_1 \sin(t\sqrt{5}) + C_2 \cos(t\sqrt{5}) + \frac{1}{60} \cdot e^{-4t} + \frac{1}{12}$
6. $y(t) = \frac{79}{80} \cdot e^{t} \cdot \cos(2t) - \frac{1}{80} \cdot e^{-5t} + \frac{1}{40} \cdot e^{-3t}$
   allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = e^{t} \cdot (C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t))$
   allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = e^{t} \cdot (C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)) - \frac{1}{80} \cdot e^{-5t} + \frac{1}{40} \cdot e^{-3t}$
7. spezielle Lösung inhomogen: $y(t) = \frac{\sqrt{3}}{39} \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{1}{13} \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{4}{13} \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \cos(2t)$
   allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = C1 \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + C2 \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$
   allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = C1 \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + C2 \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{4}{13} \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \cos(2t)$
8. spezielle Lösung inhomogen: $y(t) = e^{t}(\frac{1}{2} \cdot \sin(t) - \frac{1}{2} \cdot t \cdot \cos(t) + \cos(t))$
   allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = e^{t}(C_1 \cdot \sin(t) + C_2 \cdot \cos(t))$
   allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = e^{t}(C_1 \cdot \sin(t) + C_2 \cdot \cos(t)) - \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^{t} \cdot \cos(t)$
9. spezielle Lösung inhomogen: $y(t) = e^{t}(-\frac{1}{17} \cdot \sin(t) - \frac{4}{17} \cdot \cos(t)) - \frac{22}{51}e^{-3t}$
   allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t}$
   allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{17} \cdot \sin(t) - \frac{4}{17} \cdot \cos(t)$
10. allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = y(0) \cdot e^{t}\cos(\sqrt{2}t) + (y'(0) - y(0)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{t}\sin(\sqrt{2}t)$
    allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = y_0(t) + \frac{1}{4} \cdot e^{t}(\sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2} \cdot t\cos(\sqrt{2}t))$
    spezielle Lösung: $y(t) = \frac{1}{4} \cdot e^{t}(\sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2} \cdot t\cos(\sqrt{2}t)) + e^{t}\cos(\sqrt{2}t)$
11. allgemeine Lösung homogen: $y_0(t) = y(0) \cdot (\frac{5}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t}) + y'(0) \cdot (\frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t})$
    allgemeine Lösung inhomogen: $y_{inhom}(t) = \frac{1}{16}e^{3t+1} - \frac{1}{16}e^{1-t} \cdot [4t+1] + y_0(t)$
    spezielle Lösung: $y(t) = \frac{1}{16}e^{3t+1} - \frac{1}{16}e^{1-t} \cdot [4t+1] + e^{3t}$
12. (a) $x_a(t) = e^{-3t}(\cos(4t) + \sin((4t))$
    (b) $x_{b_i}(t) = -\frac{1}{16}\cos(5t) + \frac{1}{16}\cos(3t)$
    $x_{b_{ii}}(t) = \frac{1}{10}\, t\, \sin(5t)$
    (c) $x_c(t) = \begin{cases} -\frac{1}{25}\cos(5t) + \frac{1}{25} & \text{wenn } t < T \\ -\frac{1}{25}\left[\cos(5t) - \cos(5\,(t-T))\right] & \text{wenn } t > T \end{cases}$

    Für $T = 2\pi$: Ausklingen der Schwingung bei $t = 2\pi$.
13. $y(t) = \begin{cases} (a-\pi)\ \cos(t) & \text{wenn } t > 2\pi \\ (a - \frac{1}{2}\,t)\ \cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) & \text{wenn } t < 2\pi \end{cases}$

    Wenn $a = \pi$: Ausklingen der Schwingung bei $t = 2\pi$.

7.3 Funktionen mehrerer Variabler

1. Definitionsbereich D: $x, y \in \mathbb{R}$;
   partielle Ableitungen: $f_x = -x^2y^2(3y - 36 + 4x)$; $f_y = -x^3y(3y - 24 + 2x)$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{x = x, 0\} \cup \{0, y = y\} \cup \{6, 4\}$
   Extrema: lokales Maximum in $P(6; 4)$

2. Definitionsbereich D: $x, y \in \mathbb{R}$;
   partielle Ableitungen: $f_x = 2xy - 4 - y^2$; $f_y = -2xy + 4 + x^2$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{2, 2\} \cup \{-2, -2\}$
   Extrema: keine

3. Definitionsbereich D: $x, y \in \mathbb{R}$;
   partielle Ableitungen: $f_x = 2xy - 8 - 2y^2$; $f_y = -4xy + 16 + x^2$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{4, 2\} \cup \{-4, -2\}$
   Extrema: keine

4. Definitionsbereich D: $x, y \in \mathbb{R}$;
   partielle Ableitungen: $f_x = -y(5y - 10 + 4x)$; $f_y = -2x(-5 + x + 5y)$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{0, 0\} \cup \{0, 2\} \cup \{5, 0\} \cup \left\{\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right\}$; lokales Maximum in $P(\frac{5}{3}; \frac{2}{3})$

5. Definitionsbereich D: $x, y \in \mathbb{R}$;
   partielle Ableitungen: $f_x = -4y(3y - 5 + x)$; $f_y = -2x(-10 + x + 12y)$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{0, 0\} \cup \left\{0, \frac{5}{3}\right\} \cup \{10, 0\} \cup \left\{\frac{10}{3}, \frac{5}{9}\right\}$; lokales Maximum in $P(\frac{10}{3}; \frac{5}{9})$

6. Definitionsbereich D: $x, y \in \mathbb{R}$;
   partielle Ableitungen: $f_x = -x^2y^3(-3y - 3 + 4x)$; $f_y = -x^3y^2(-4y - 3 + 3x)$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{0, y = y\} \cup \{x = x, 0\} \cup \left\{\frac{3}{7}, -\frac{3}{7}\right\}$; lokales Minimum in $P(\frac{3}{7}; -\frac{3}{7})$

7. Definitionsbereich D: $x, y \in \mathbb{R}$;
   partielle Ableitungen: $f_x = 2x + 20 * +10$; $f_y = -6y + 20x - 6$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \left\{\frac{15}{103}, -\frac{53}{103}\right\}$; kein Extremum

8. (a) partielle Ableitungen: $f_x = 3(x - 1)(x + 1)$; $f_y = 3(y - 2)(y + 2)$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{1, 2\} \cup \{1, -2\} \cup \{-1, 2\} \cup \{-1, -2\}$; lokales Minimum in $P_1(1; 2)$; lokales Maximum in $P_2(-1; -2)$
   (b) partielle Ableitungen: $f_x = e^x(2x + y^2 + 2)$; $f_y = 2e^xy$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{-1, 0\}$; lokales Minimum in $P(-1; 0)$

9. (a) partielle Ableitungen: $f_x = \frac{y^2 - xy - x + 1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$; $f_y = \frac{x^2 - xy - y + 1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{1, 1\}$;lokales Maximum in $P(1; 1)$
   (b) partielle Ableitungen: $f_x = 3x^2 - 3ay$; $f_y = 3y^2 - 3ax$;
   Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{0, 0\} \cup \{a, a\}$; lokales Minimum in $P(a; a)$

10. (a) partielle Ableitungen: $f_x = 4y^2 + 40y + 9*^2$; $f_y = 8(x - 2)(y + 5)$;
    Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{2, -1\} \cup \{2, -9\} \cup \left\{\frac{10}{3}, -5\right\} \cup \left\{-\frac{10}{3}, -5\right\}$;lokales Minimum in $P_1(\frac{10}{3}; -5)$, lokales Maximum in $P_2(-\frac{10}{3}; -5)$
    (b) partielle Ableitungen: $f_x = \frac{y^2 - xy - x + 1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$; $f_y = \frac{x^2 - xy - y + 1}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$;
    Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{1, 1\}$; lokales Maximum in $P(1; 1)$

11. partielle Ableitungen: $f_x = 8xy(y + 10)$; $f_y = 8x^2y + 40x^2 - 32y - 160 + 9y^2$;
    Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{2, 0\} \cup \{-2, 0\} \cup \left\{0, \frac{16+4\sqrt{106}}{9}\right\} \cup \left\{0, \frac{16-4\sqrt{106}}{9}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{53}{2}}, -10\right\} \cup \left\{-\sqrt{\frac{53}{2}}, -10\right\}$; lokales Maximum in $P_1(0; \frac{16-4\sqrt{106}}{9})$, lokales Minimum in $P_2(0; \frac{16+4\sqrt{106}}{9})$

12. partielle Ableitungen: $f_x = 8x(y - 2)(y + 2)$; $f_y = 2y(4x^2 - 13)$;
    Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{0, 0\} \cup \left\{-\frac{\sqrt{13}}{2}, 2\right\} \cup \left\{\frac{\sqrt{13}}{2}, 2\right\} \cup \left\{-\frac{\sqrt{13}}{2}, -2\right\} \cup \left\{\frac{\sqrt{13}}{2}, -2\right\}$ lokales Maximum in $P(0; 0)$

13. (a) Gebiet B: s. Zeichnungen im Anhang

    (b) $\underbrace{\int\int}_{(B)}(2r^2\cos^2(\phi)+r^2\sin^2(\phi))rdrd\phi \approx 54.14$

14. partielle Ableitungen: $f_x = 8(y-2)(y+2)(x-1)$; $f_y = 2y(2x-1)(2x-3)$; Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{1,0\} \cup \left\{\frac{1}{2},2\right\} \cup \left\{\frac{1}{2},-2\right\} \cup \left\{\frac{3}{2},2\right\} \cup \left\{\frac{3}{2},-2\right\}$; lokales Maximum in $P(1;0)$

15. (a) Gebiet B: s. Zeichnungen im Anhang

    (b) $\underbrace{\int\int}_{(B)}(r^2\cos(\phi)\sin(\phi))rdrd\phi \approx -55.49$

16. partielle Ableitungen: $f_x = 16x(y-2)(y+2)(x-1)(x+1)$; $f_y = 2y(2x^2-2x-1)(2x^2+2x-1)$;

    Lösungsmenge für $f_x = f_y = 0$: $\mathbb{L} = \{0,0\} \cup \{-1,0\} \cup \{1,0\} \cup \left\{-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}},-2\right\} \cup$ $\left\{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}},-2\right\} \cup \left\{-\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}},-2\right\} \cup \left\{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}},-2\right\} \cup \left\{-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}},2\right\} \cup \left\{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}},2\right\} \cup$ $\left\{-\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}},2\right\} \cup \left\{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}},2\right\}$; lokale Maxima in $P_1(1;0)$ und $P_2(-1;0)$; lokales Minimum in $P_3(0;0)$

17. (a) Gebiet B: s. Zeichnungen im Anhang

    (b) $\int\limits_{x=2-\sqrt{5}}^{2+\sqrt{5}} x \cdot \left(\int\limits_{y=x^2-4x}^{-x^2+4x+2} y\ dy\ \right)dx\ = \frac{80}{3}\sqrt{5}$

18. partielle Ableitungen: $f_x = 16x(x^2-2)(y^2-1)$; $f_y = 2y(4x^4-8x^2-5)$; lokale Maxima in $P_1(1;0)$ und $P_2(-1;0)$

19. (a) Gebiet A: s. Zeichnungen im Anhang

    (b) $\mathcal{I} = \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=x^3-4}^{4x^2-4} x^2 - y^2\ dy\ dx\ = -\frac{400384}{35}$

20. $a > 0$: Maximum in $P(\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a)$

21. (a) Gebiet B: s. Zeichnungen im Anhang

    (b) Parametrisierung: $x = r\cos(\varphi) + 1, \quad y = r\sin(\varphi)$

    $\rightarrow \mathcal{I} = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} (r^5 - 4r^4\cos(\varphi) + 4r^3\cos^2(\varphi))\ dr\ d\varphi\ = \frac{4\pi}{3}$

22. Minimum in $P(0,0)$

23. Minimum in $P(2,1)$

24. (a) Gebiet B: s. Zeichnung Seite 108

    (b) Parametrisierung: $x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi)$

    $\rightarrow \mathcal{I} = \int\limits_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{5,176} \sin(\phi)\cos(\phi) \int\limits_{r=0}^{3} (r^3 e^{-r^2})\ dr\ d\phi = \frac{3}{40} - \frac{3}{4}e^{-9}$

25. (a) $P_1 = (0, \frac{1}{4}, -\frac{9}{4})$; $P_2 = (-1, \frac{1}{4}, -\frac{13}{4})$; $P_3 = (1, \frac{1}{4}, -\frac{13}{4})$

    (b) $A = \frac{3}{2}\ a^2\ln(2)$

26. (a) Minimum in $P(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$, Maximum in $P(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1)$

    (b) $f(x,y)$ maximal (minimal), wenn $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($x = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

27. (a) $\mathcal{I} = \frac{31a^4}{1280} - \frac{1}{16}$; Gebiet $\mathcal{B}$: s. Zeichnung Seite 110

    (b) $\mathcal{I} = \int_0^1 \left\{ \int_{2-y}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x,y)\,dx \right\} dy$; Gebiet $\mathcal{B}$: s. Zeichnung Seite 110

28. (a) $df = 3\,dx + dy$
    (b) $y(x) = -\frac{17}{15}x + \frac{47}{15}$
    (c) $S(\frac{1}{6},\ -\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{61}}{6})$
29. (a) $\mathcal{J} = 54\ln(3) + 17$
    (b) $\mathcal{J} = 2$
30. (a) Gebiet $\mathcal{B}$: s. Zeichnung Seite 110
    $\mathcal{J} = -\frac{3}{2}$
    Fläche zwischen den Funktionen $A = \frac{29}{18}$
    (b) Gebiet $\mathcal{B}$: s. Zeichnung Seite 110
    $\mathcal{J} = \pi\ (\ln(2) - \frac{1}{2})$
31. $q = 4y$

7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

1. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$

   $\lambda_{1,2} = 1$ zweifacher Eigenwert; $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $\lambda_3 = 2$ einfacher Eigenwert; $\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   A nicht symmetrisch $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht zwingend orthogonal.
   $\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} \neq 0; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} \neq 0$

2. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = 0$

   $\lambda_{1,2} = 2$ zweifacher Eigenwert; $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\lambda_3 = 4$ einfacher Eigenwert; $\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   A nicht symmetrisch $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht zwingend orthogonal.
   $\widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} \neq 0; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} \neq 0$

3. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

   $\lambda_1 = 1$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $\widetilde{x_2} \approx \frac{1}{1.522}\begin{pmatrix} 1 \\ 0.562 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $\widetilde{x_3} \approx \frac{1}{3.832}\begin{pmatrix} -1 \\ 3.561 \\ 1 \end{pmatrix}$

   A symmetrisch $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
   $\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp;$

4. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

   $\lambda_1 = 1$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -2$, $\widetilde{x_3} = \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   A symmetrisch $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
   $\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp;$

5. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - \lambda^2 - 10\lambda + 10 = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\widetilde{x_1} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \sqrt{10}$, $\widetilde{x_2} = \frac{3}{\sqrt{100+26\sqrt{10}}}\begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{10}}{3} \\ \frac{4+2\sqrt{10}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -\sqrt{10}$, $\widetilde{x_3} = \frac{3}{\sqrt{100-26\sqrt{10}}}\begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{10}}{3} \\ \frac{4-2\sqrt{10}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

A symmetrisch $\to$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \to \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \to \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \to \perp;$

6. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$, $\widetilde{x_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$, $\widetilde{x_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

A symmetrisch $\to$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \to \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \to \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \to \perp;$

7. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3 + \sqrt{3}$, $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3 - \sqrt{3}$, $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

A symmetrisch $\to$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \to \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \to \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \to \perp;$

8. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3+\sqrt{5}$, $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{5+\frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2+\sqrt{5}} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 3-\sqrt{5}$,$\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{5+\frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2-\sqrt{5}} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

A nicht symmetrisch $\to$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht zwingend orthogonal.
$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} \neq 0; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} \neq 0; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} \neq 0;$

9. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 7\lambda + 2a\lambda - 7a - 4 = 0$

   (a) Wenn $a = -2$: A symmetrisch, Eigenvektoren orthogonal

   (b) $\lambda_1 = 2$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 5$, $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -1$, $\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \to \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \to \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \to \perp;$

10. $\det(A - \lambda \cdot E) = (9+3j-\lambda)^3 - 25 \cdot (9+3j-\lambda) = 0$; Substitution $z = (9+3j-\lambda) \to$ $z_1 = 0, z_2 = 5, z_3 = -5$; Rücksubstitution ergibt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$;

    $\lambda_1 = 9 + 3j$, $\widetilde{x_1} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 4 + 3j$, $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \cdot j \\ \frac{4}{5} \cdot j \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 14 + 3j$, $\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \cdot j \\ -\frac{4}{5} \cdot j \\ 1 \end{pmatrix}$

11. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2j \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 1 + \sqrt{5}$, $\widetilde{x_2} = \frac{2}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}j \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 1 - \sqrt{5}$,

$\widetilde{x_3} = \frac{2}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}j \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$;

Realteil symmetrisch, Imaginärteil schiefsymmetrisch $\rightarrow$ A ist hermetisch $\rightarrow$

(a) alle Eigenwerte sind reell
(b) Eigenvektoren sind orthogonal

$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp$

12. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 + (-9 - 6j)\lambda^2 + (-28 + 36j)\lambda + 180 + 40j = 0$

$\lambda_1 = 4 + 2j$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 9 + 2j$, $\widetilde{x_2} = \frac{5}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} \frac{2}{5}j \\ -\frac{6}{5}j \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = -4 + 2j$,

$\widetilde{x_3} = \frac{4}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}j \\ \frac{3}{4}j \\ 1 \end{pmatrix}$

13. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 16\lambda + 144 = 0$

$\lambda_1 = 4$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -4$, $\widetilde{x_2} = \frac{4}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 9$, $\widetilde{x_3} = \frac{5}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

A symmetrisch $\rightarrow$

(a) $\exists$ genau 3 lin. unabh. Eigenvektoren
(b) Eigenvektoren sind orthogonal

$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp;$

14. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\widetilde{x_1} = \frac{3}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 2$, $\widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 3$, $\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

A nicht symmetrisch $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht zwingend orthogonal.
$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} \neq 0; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} \neq 0; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} \neq 0;$

15. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = 2$, $\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} j \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -1$, $\widetilde{x_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}j \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 1$, $\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Realteil symmetrisch, Imaginärteil schiefsymmetrisch $\rightarrow$ A ist hermetisch $\rightarrow$

(a) alle Eigenwerte sind reell
(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp$

16. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\widetilde{x_{11}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -j \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{x_{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = 4$, $\widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} j \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Realteil symmetrisch, Imaginärteil schiefsymmetrisch $\rightarrow$ A ist hermetisch $\rightarrow$

(a) alle Eigenwerte sind reell

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

$\widetilde{x_{11}} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_{12}} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_{11}} \cdot \widetilde{x_{12}} \neq 0 \rightarrow$ nicht orthogonal

17. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 10 = 0$

$\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = 2\;\;, \lambda_3 = 5\;\;, \widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \widetilde{x_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrix ist symmetrisch$\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

Verifizierung:

$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp$

18. charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + (3 + 2a^2)\lambda - 2a^2 - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = 1 - j \cdot a\sqrt{2}\;\;, \lambda_3 = 1 + j \cdot a\sqrt{2}\;\;, \widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \widetilde{x_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -j\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$, \widetilde{x_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} j\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrix ist weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind nicht zwingend orthogonal

Prüfung Orthogonalität:

$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp$

19. $A = A^T \rightarrow$ Matrix symmetrisch $\rightarrow$ Eigenwerte reell, Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

charakteristische Gleichung: $\lambda^2(-\lambda + 6) = 0$

$\lambda_1 = 6\,, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ doppelter Eigenwert;

$\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \widetilde{x_{2,1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \widetilde{x_{2,2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Prüfung Orthogonalität:

$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_{2,1}} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_{2,2}} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_{2,1}} \cdot \widetilde{x_{2,2}} = 0 \rightarrow \perp$

20. $A \neq A^T \rightarrow$ Matrix asymmetrisch $\rightarrow$ Eigenwerte nicht zwingend reell, Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht zwingend orthogonal

charakteristische Gleichung: $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5\lambda + 3$

$\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = 1 + j\sqrt{2}\,,\;\; \lambda_3 = 1 - j\sqrt{2}$

$\widetilde{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \widetilde{x_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -j\sqrt{2} \end{pmatrix}, \widetilde{x_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ j\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Prüfung Orthogonalität:

$\widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_2} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp; \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{x_3} = 0 \rightarrow \perp$

21. charakteristische Gleichung: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4$

$\lambda_1 = j\,, \lambda_2 = -j\,,\;\; \lambda_3 = \lambda_4 = 2$

$\widetilde{x_{1,2}} = \frac{26}{\sqrt{1378}} \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \pm \frac{2}{13}j \\ 1 \\ \frac{15}{26} \mp \frac{3}{26}j \\ \frac{10}{13} \mp \frac{2}{13}j \end{pmatrix}, \widetilde{x_3} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \widetilde{x_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

22. charakteristische Gleichung: $-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+16$

$\lambda_1=1\,,\lambda_2=\lambda_3=4$
$\widetilde{x_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\,,\ \widetilde{x_{2,1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\,,\ \widetilde{x_{2,2}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
$A\neq A^T\rightarrow$ Matrix asymmetrisch $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht zwingend orthogonal

$A\vec{v}\neq 2\vec{v}$

23. charakteristische Gleichung: $-\lambda^3+6\lambda^2-9\lambda+4$

$\lambda_1=4\,,\lambda_2=\lambda_3=1$
$\widetilde{x_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\,,\ \widetilde{x_{2,1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\,,\ \widetilde{x_{2,2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$
$B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\,;\quad B^T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$
$D=B^TAB=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\,;\qquad A=BDB^T$

24. $A=A^T\rightarrow$ Matrix symmetrisch $\rightarrow$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal, die Eigenwerte reell;
$Rg(A)=1\ \rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0$
charakteristische Gleichung: $\lambda^2(3-\lambda)$

$\lambda_1=3\,,\lambda_2=\lambda_3=0$
$\widetilde{x_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\,,\ \widetilde{x_{2,1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\,,\ \widetilde{x_{2,2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\,;\quad B^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$
$D=B^TAB=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\,;\qquad A=BDB^T$

25. (a) richtig
    (b) falsch
    (c) richtig

Kapitel 8

Formelsammlung

Trigonometrische Funktionen:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

Spezielle Werte

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Umrechnungen mit $\tau = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\sin(x) = \frac{2\tau}{1+\tau^2} \qquad \csc(x) = \frac{1+\tau^2}{2\tau}$$
$$\cos(x) = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \qquad \sec(x) = \frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}$$
$$\tan(x) = \frac{2\tau}{1-\tau^2} \qquad \cot(x) = \frac{1-\tau^2}{2\tau}$$

Grundintegrale:

$$\int 0\;dx = C$$

$$\int x^a\;dx = \frac{1}{a+1}\;x^{a+1} + C,\; a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}\;dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\;dx = e^x + C \qquad \int a^x\;dx = \frac{1}{\ln a}\;a^x + C,\; a > 0,\; a \neq 1$$

$$\int \sin x\;dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\;dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\;dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\;dx = -\cot x + C$$

$$\int \sinh x\;dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\;dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\;dx = \tanh x + C \qquad \int \frac{1}{\sinh^2 x}\;dx = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\;dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\;dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \begin{cases} \operatorname{Artanh} x + C, & |x| < 1 \\ \operatorname{Arcoth} x + C, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\;dx = \arcsin\,x + C,\; |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\;dx = \operatorname{Arcosh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C,\; x > 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\;dx = \operatorname{Arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

Laplace - Transformation

$f(t) = 1$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s) = \frac{1}{s},$	$\Re(s) > 0$
$f(t) = \mathrm{e}^{a\,t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s) = \frac{1}{s-a},$	$\Re(s-a) > 0$
$f(t) = \cos(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2},$	$\Re(s) > 0,\; \omega \in \mathbb{R}$
$f(t) = \sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},$	$\Re(s) > 0,\; \omega \in \mathbb{R}$
$f(t) = \cosh(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s) = \frac{s}{s^2-a^2},$	$\Re(s-\lvert a\rvert) > 0,\; a \in \mathbb{R}$
$f(t) = \sinh(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s) = \frac{a}{s^2-a^2},$	$\Re(s-\lvert a\rvert) > 0,\; a \in \mathbb{R}$

Kapitel 9

Abbildungen

1. Ungleichungen

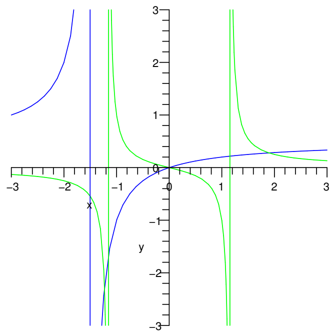


Abbildung 9.1: Ungleichungen, Aufgabe 21: Skizze der Funktionen

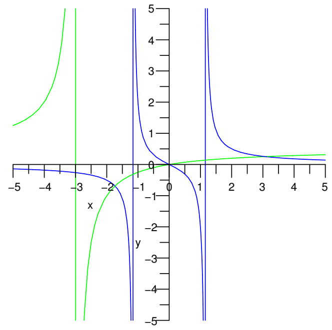


Abbildung 9.2: Ungleichungen, Aufgabe 22: Skizze der Funktionen

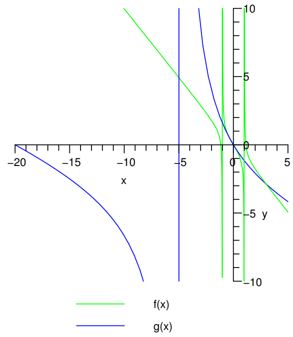


Abbildung 9.3: Ungleichungen, Aufgabe 23: Skizze der Funktionen

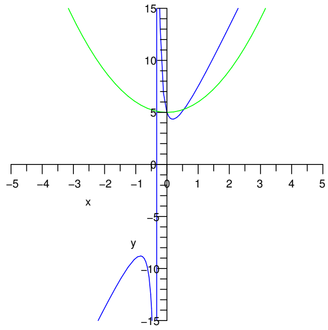


Abbildung 9.4: Ungleichungen, Aufgabe 24: Skizze der Funktionen

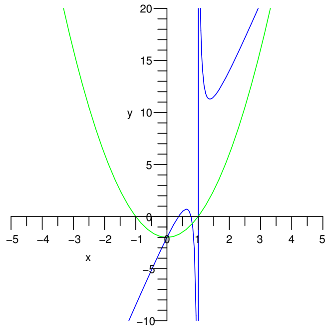


Abbildung 9.5: Ungleichungen, Aufgabe 25: Skizze der Funktionen

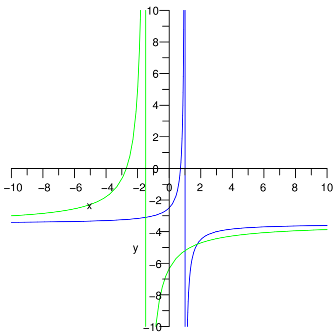


Abbildung 9.6: Ungleichungen, Aufgabe 26: Skizze der Funktionen

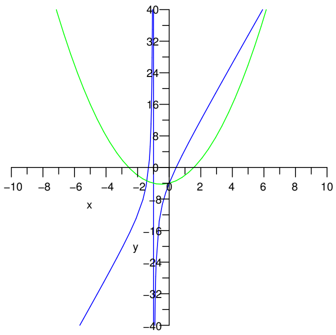


Abbildung 9.7: Ungleichungen, Aufgabe 27: Skizze der Funktionen

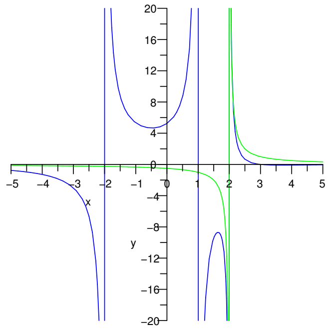


Abbildung 9.8: Ungleichungen, Aufgabe 28: Skizze der Funktionen

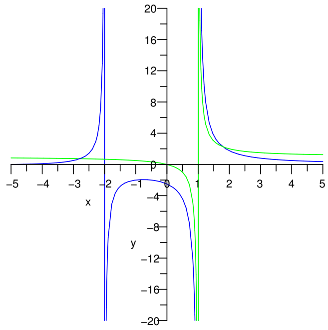


Abbildung 9.9: Ungleichungen, Aufgabe 29: Skizze der Funktionen

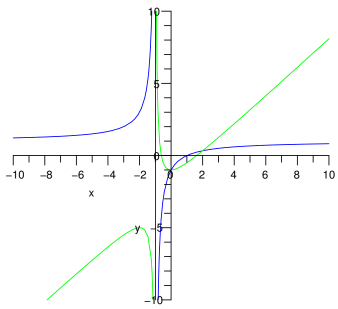


Abbildung 9.10: Ungleichungen, Aufgabe 30: Skizze der Funktionen

2. Komplexe Zahlen

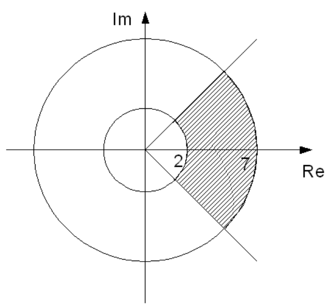


Abbildung 9.11: Komplexe Zahlen, Aufgabe 2 a: Lage Bereich

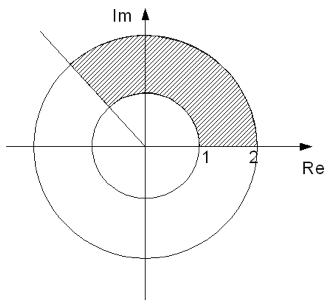


Abbildung 9.12: Komplexe Zahlen, Aufgabe 5 a: Lage Bereich

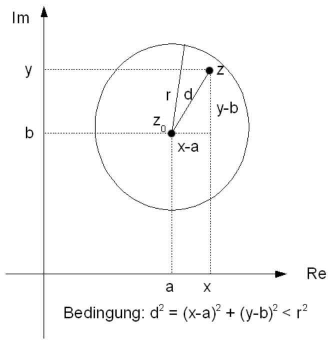


Abbildung 9.13: Komplexe Zahlen, Aufgabe 6 b: Lage im Kreis

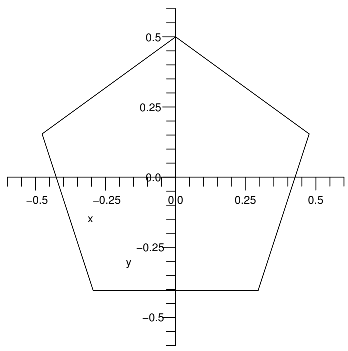


Abbildung 9.14: Komplexe Zahlen, Aufgabe 13 b: Lage der Lösungen

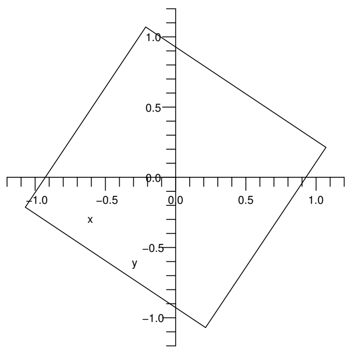


Abbildung 9.15: Komplexe Zahlen, Aufgabe 14 b: Lage der Lösungen

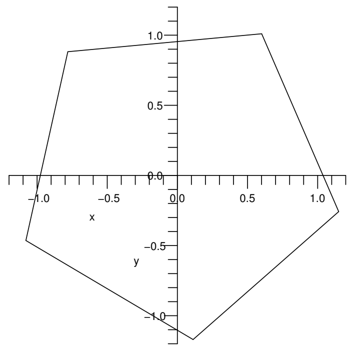


Abbildung 9.16: Komplexe Zahlen, Aufgabe 15 b: Lage der Lösungen

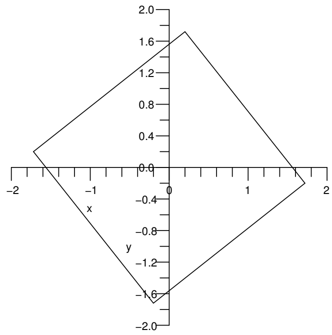


Abbildung 9.17: Komplexe Zahlen, Aufgabe 16 b: Lage der Lösungen

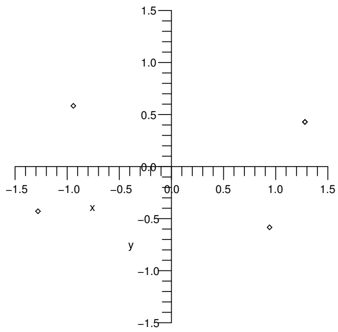


Abbildung 9.18: Komplexe Zahlen, Aufgabe 17 b: Lage der Lösungen

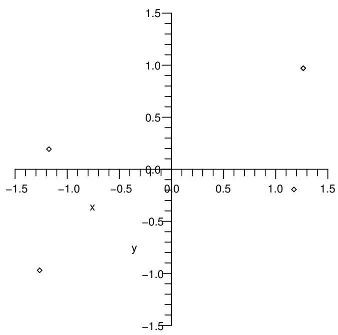


Abbildung 9.19: Komplexe Zahlen, Aufgabe 18 b: Lage der Lösungen

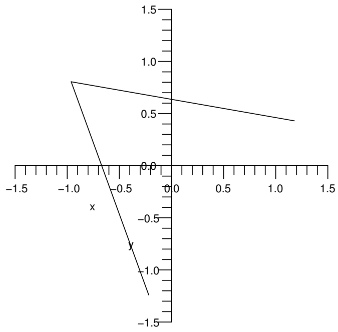


Abbildung 9.20: Komplexe Zahlen, Aufgabe 19: Lage der Lösungen

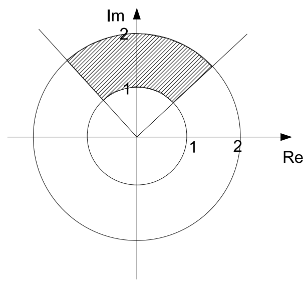


Abbildung 9.21: Komplexe Zahlen, Aufgabe 20 a: Menge in der komlexen Ebene

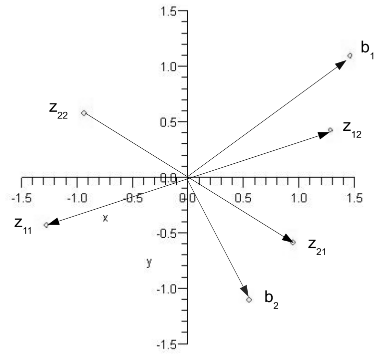


Abbildung 9.22: Komplexe Zahlen, Aufgabe 20 b: Lage der Lösungen

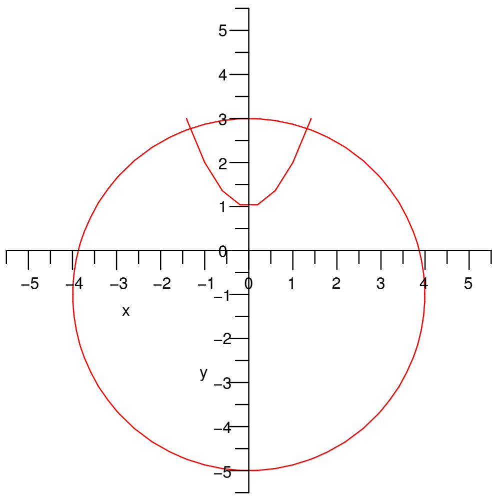


Abbildung 9.23: Komplexe Zahlen, Aufgabe 21 a: Durchschnittsmenge der Mengen M1 und M2

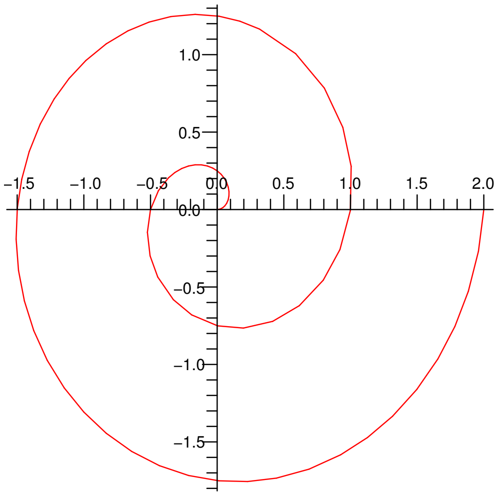


Abbildung 9.24: Komplexe Zahlen, Aufgabe 23: Spirale

3. Fourier-Reihen

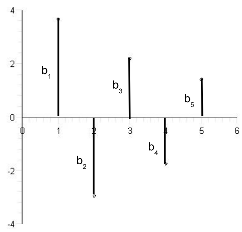


Abbildung 9.25: Fourierreihen, Aufgabe 9: Skizze der Koeffizienten für a=1

4. Funktionen mehrerer Variabler

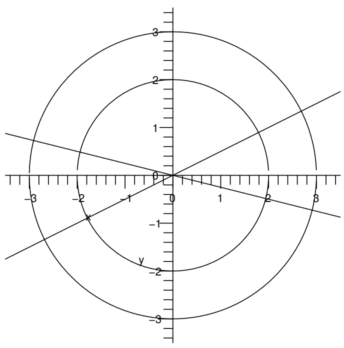


Abbildung 9.26: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 13: Gebiet B

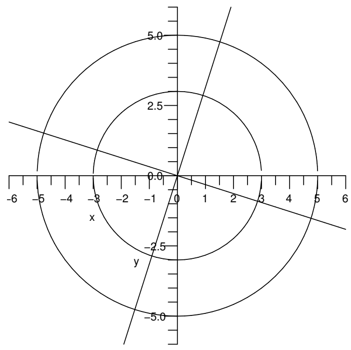


Abbildung 9.27: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 15: Gebiet B

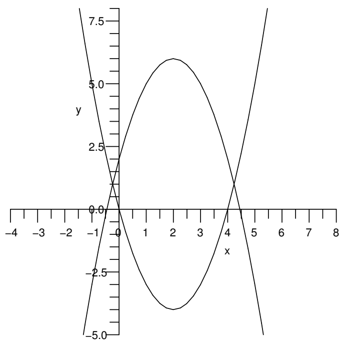


Abbildung 9.28: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 17: Gebiet B

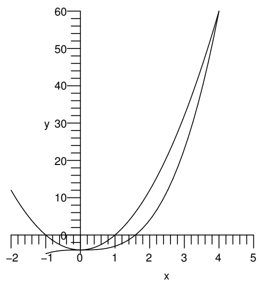


Abbildung 9.29: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 19: Gebiet A

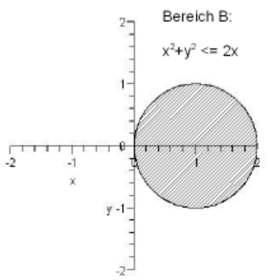


Abbildung 9.30: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 21: Gebiet B

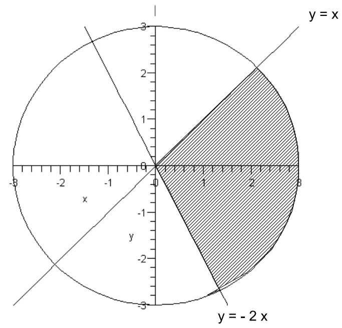


Abbildung 9.31: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 24: Gebiet B

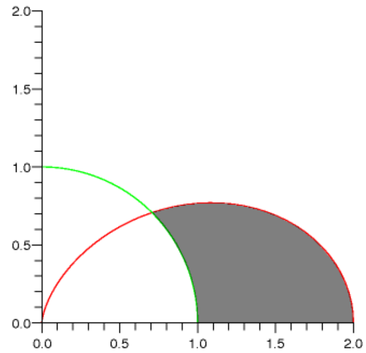


Abbildung 9.32: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 27a: Gebiet B (für $a = 2$)

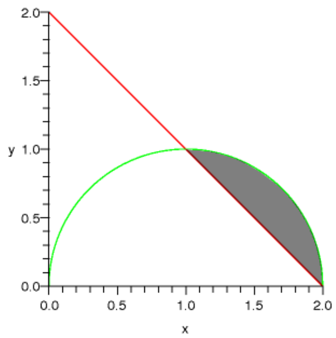


Abbildung 9.33: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 27b: Gebiet B

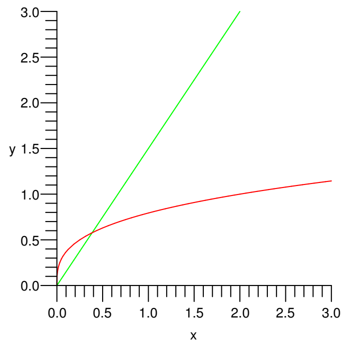


Abbildung 9.34: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 30a: Gebiet B

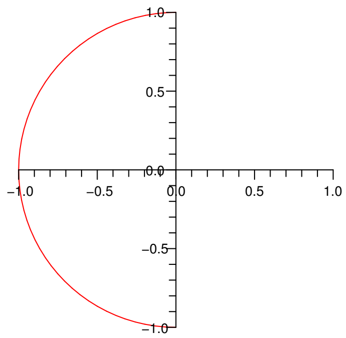


Abbildung 9.35: Funktionen mehrerer Variabler, Aufgabe 30b: Gebiet B

Abbildungsverzeichnis