

# Parameteridentifikation

unvollständig überarbeitetes Skript vom WiSe 2013/14

Dr. S. Krause

Prof. Dr. B. Faupel

1. Februar 2016

## Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Motivation</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Einführendes Beispiel</b>                                   | <b>2</b>  |
| 2.1      | Laplace-Übertragungsfunktion für den Tiefpass . . . . .        | 2         |
| 2.2      | $\mathcal{Z}$ -Transformation der Sprungantwort . . . . .      | 3         |
| 2.3      | Herleitung der Differenzgleichung . . . . .                    | 4         |
| <b>3</b> | <b>Verfahren der kleinsten Quadrate</b>                        | <b>5</b>  |
| 3.1      | Fragestellung und Rechenbeispiel . . . . .                     | 5         |
| 3.2      | Gleichungssystem mit Fehlervektor . . . . .                    | 6         |
| 3.3      | Die Gaußschen Normalgleichungen . . . . .                      | 7         |
| <b>4</b> | <b>Andere Eingangssignale; Halteglieder</b>                    | <b>8</b>  |
| 4.1      | Sprung- und Sinusantwort . . . . .                             | 8         |
| 4.2      | Kontinuierliches und diskretes Modell . . . . .                | 9         |
| 4.3      | Halteglieder . . . . .   | 9         |
| <b>5</b> | <b>Allgemeiner Fall</b>  | <b>10</b> |
| 5.1      | Der Hochpass . . . . .   | 10        |
| 5.2      | Allgemeine $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion . . . . .       | 11        |
| 5.3      | Eine Beispiel-Implementation in Matlab . . . . .               | 12        |
| <b>A</b> | <b>Herleitung der Gaußschen Normalgleichungen</b>              | <b>13</b> |
| A.1      | Spezialfall im $\mathbb{R}^3$ . . . . .                        | 13        |
| A.2      | Allgemeiner Fall mit linearer Algebra . . . . .                | 14        |
| A.3      | Allgemeiner Fall mit mehrdimensionaler Analysis . . . . .      | 15        |
| <b>B</b> | <b>Allgemeines zur <math>\mathcal{Z}</math>-Transformation</b> | <b>16</b> |

## 1 Motivation

Die Systemtheorie und Regelungstechnik beschäftigt sich u. a. mit geschlossenen Regelkreisen, üblicherweise dargestellt durch ein Blockschaltbild wie in Abbildung 1. In den Anfängervorlesungen sind die Strecken meistens gegeben, entweder mit Zahlenwerten als Übertragungsfunktion  $G(s)$  oder als Typ, z. B.  $PT_1$ , oder als Bode-Diagramm. Das Ziel ist es dann, den Regler

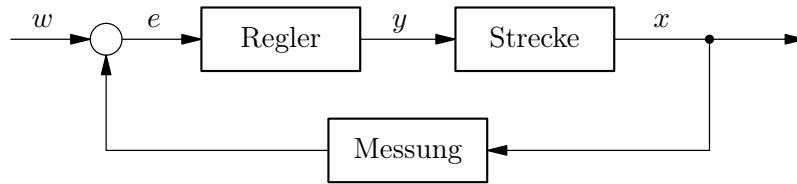


Abbildung 1: Allgemeiner geschlossener Regelkreis

derart zu wählen und auszulegen, dass der entstehende geschlossene Regelkreis bestimmte geforderte Eigenschaften hat, zu denen Überschwingen, An- und Ausregelzeit, stationäre Regeldifferenz, Amplituden- und Phasenreserve usw. gehören können. Die Messvorrichtung wird dabei meistens vernachlässigt.

Für reale Regelkreise kann der Regler natürlich nur sinnvoll ausgelegt werden, wenn die zu regelnde Strecke als lineares zeitinvariantes System hinreichend genau bekannt ist. Das Aufstellen von Gleichungen zur Beschreibung der Strecke nennt man Systemidentifikation. Im allgemeinen Fall, wenn also überhaupt keine Informationen über die Strecke vorliegen, kann dies sehr kompliziert sein. Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass das grundsätzliche Übertragungsverhalten vorgegeben wird. Dieses kann, wenn die Ausgangsgröße  $x$  von der Eingangsgröße  $y$  durch physikalische (z. B. mechanische, elektrische oder thermodynamische) Gesetze abhängt, häufig durch Differentialgleichungen beschrieben werden. Für einen Tiefpass gilt z. B.  $T_1 dx/dt + x = Ky$ , worin  $K$  die Verstärkung und  $T_1$  die Zeitkonstante sind. Wenn man weiß, dass es sich um ein  $PT_1$ -System handelt oder dieser Streckentyp zumindest plausibel erscheint, dann geht man von diesem System aus und schätzt die Parameter  $K$  und  $T_1$ . Diese Art der Systemidentifikation nennt man dann Parameteridentifikation (oder -schätzung).

Um eine solche Schätzung vorzunehmen, muss man ein Eingangssignal erzeugen und das zugehörige Ausgangssignal messen. Das führt praktisch automatisch dazu, dass man zu den Zeiten  $t_k = kT_a$ , die Vielfache einer Abtastzeit  $T_a$  sind, den Eingang  $y_k = y(kT_a)$  und Ausgang  $x_k = x(kT_a)$  als Messwertpaar aufnimmt. Es bietet sich also an, das Verhalten des Systems im Diskreten zu betrachten und die  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion  $G(z)$  zu verwenden. Deren Parameter werden schließlich so gewählt, dass das entstandene Modell „bestmöglich“ mit den Messdaten übereinstimmt.

In Abschnitt 2 leiten wir ausführlich die Laplace- und  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion einer Tiefpassschaltung her. Es ergibt sich dabei der Gleichungstyp (Differenzgleichungen), die die zu schätzenden Parameter erfüllen sollen. In Abschnitt 3 erklären wir das Kleinste-Quadrate-Verfahren als Standardverfahren zur Parameterschätzung, wodurch klar wird, was wir unter „bestmöglich“ verstehen wollen. Zwei Beweise dieses Verfahrens werden ausführlich in Anhang A erläutert. In Abschnitt 4 betrachten wir Eingangssignale, die nicht die Sprungfunktion sind, und welche Effekte durch die Halteglieder entstehen, die durch die diskrete Betrachtung notwendig sind. In Abschnitt 5 schließlich diskutieren wir, wie das Parameterschätz-Verfahren bei allgemeiner gewählter bzw. vorgegebener  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion funktioniert.

## 2 Einführendes Beispiel

### 2.1 Laplace-Übertragungsfunktion für den Tiefpass

Gegeben sei der in Abbildung 2 links dargestellte Tiefpass. Um die Differentialgleichung aufzustellen, wandeln wir zunächst die Eingangsspannung zusammen mit dem Spannungsteiler

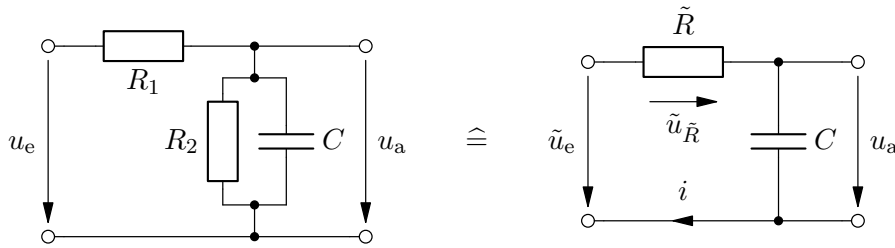


Abbildung 2: Ein Tiefpass; links: Originalschaltung; rechts: Ersatzschaltung

in eine Ersatzquelle um. Dann entsteht die äquivalente Schaltung auf der rechten Seite. Der Maschenumlauf liefert

$$\tilde{u}_e(t) = \tilde{u}_{\tilde{R}}(t) + u_a(t) = \tilde{R}i(t) + u_a(t) = \tilde{R}C \frac{du_a(t)}{dt} + u_a(t).$$

Die Leerlaufspannung und der Innenwiderstand der Quelle berechnen sich sofort zu

$$\tilde{u}_e(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_e(t), \quad \tilde{R} = R_1 \parallel R_2.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_e(t) = (R_1 \parallel R_2) C \frac{du_a(t)}{dt} + u_a(t).$$

Anwenden der Laplace-Transformation führt auf

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e(s) = (R_1 \parallel R_2) C (sU_a(s) - u_a(0)) + U_a(s).$$

Wir betrachten nur Eingangsspannungen  $u_e(t)$  mit beschränkter Leistung, d. h. insbesondere keinen Dirac-Stoß. Daher ist, bedingt durch den Parallelkondensator im Ausgang,  $u_a(0) = 0$ . Wir können dann umstellen und erhalten für die Laplace-Übertragungsfunktion

$$\frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + (R_1 \parallel R_2) C s} = G(s).$$

Es handelt sich offenbar um eine PT<sub>1</sub>-Strecke

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT_1} \quad \text{mit} \quad K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad T_1 = (R_1 \parallel R_2) C.$$

## 2.2 $\mathcal{Z}$ -Transformation der Sprungantwort

Wir wollen ab jetzt die Eingangsgröße  $u$  und die Ausgangsgröße  $y$  nennen. Wir gehen vom Einheitssprung  $u(t) = 1$  als Eingangsgröße aus. (Wir betrachten ohnehin nur Zeiten  $t \geq 0$  und lassen  $\sigma(t)$  daher weg.) Dann ist die Laplace-Transformierte  $U(s) = 1/s$ , denn

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^\infty 1 e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty = \frac{0 - 1}{-s} = \frac{1}{s}.$$

Für die Ausgangsfunktion  $Y(s)$  machen wir einen Partialbruchzerlegungsansatz

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{s(1+sT_1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+sT_1}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt  $K = A(1+sT_1) + Bs = (AT_1 + B)s + A$ , woraus  $A = K$  und  $B = -KT_1$  folgt. Einsetzen ergibt

$$Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{KT_1}{1+sT_1}.$$

Für die Rücktransformation betrachten wir

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}](s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \Big|_0^\infty = \frac{0-1}{-(\alpha+s)} = \frac{1}{s+\alpha}.$$

Also gilt nach Kürzen durch  $T_1$

$$Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+1/T_1} \implies y(t) = K - Ke^{-t/T_1} = K(1 - e^{-t/T_1}).$$

Das ist die bekannte Sprungantwort eines  $PT_1$ -Systems.

Die Messdaten, die für die Parameteridentifikation benutzt werden, sind natürlich diskrete Werte. Mit einer Abtastzeit  $T_a$  erhalten wir die Datenfolge

$$y_k = y(kT_a) = K(1 - e^{-kT_a/T_1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Diese Folge wollen wir  $\mathcal{Z}$ -transformieren. Für die Folge konstant 1 ergibt sich mit der geometrischen Reihe

$$\mathcal{Z}[1](z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Allgemeiner gilt für den anderen Summanden

$$\mathcal{Z}[e^{-\alpha k}](z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\alpha} z^{-1})^k = \frac{1}{1-e^{-\alpha} z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-\alpha}}.$$

Zusammen ergibt sich die  $\mathcal{Z}$ -transformierte Sprungantwort

$$Y(z) = K \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_a/T_1}} \right) = \frac{Kz}{z-1} \left( 1 - \frac{z-1}{z-e^{-T_a/T_1}} \right) = \frac{Kz}{z-1} \frac{1-e^{-T_a/T_1}}{z-e^{-T_a/T_1}}.$$

### 2.3 Herleitung der Differenzgleichung

Wir wollen uns von der speziellen Art des Sprungeingangs lösen. Dazu dividieren wir durch  $U(z) = \mathcal{Z}[1](z) = z/(z-1)$  und erhalten

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{K(1-e^{-T_a/T_1})}{z-e^{-T_a/T_1}}.$$

Wir kürzen noch durch  $z$ , wodurch sich mit

$$G(z) = \frac{K(1-e^{-T_a/T_1})z^{-1}}{1-e^{-T_a/T_1}z^{-1}}$$

ein Ausdruck in  $z^{-1}$  ergibt. Wir setzen  $a = -e^{-T_a/T_1}$  und  $b = K(1 - e^{-T_a/T_1})$  – dies sind die zu schätzenden Parameter – und erhalten

$$G(z) = \frac{bz^{-1}}{1 + az^{-1}}.$$

Eine solche  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion ist üblicherweise der Ausgangspunkt der Parameteridentifikation.

Wir können nun wieder  $G(z) = Y(z)/U(z)$  schreiben und erhalten

$$bz^{-1}U(z) = (1 + az^{-1})Y(z).$$

Für die Rücktransformation betrachten wir mit der Indexverschiebung  $\ell = k - 1$

$$\mathcal{Z}[x_{k-1}](z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-1}z^{-k} = \sum_{\ell=-1}^{\infty} x_{\ell}z^{-\ell-1} \stackrel{x_{-1}=0}{=} z^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} x_{\ell}z^{-\ell} = z^{-1}X(z).$$

Angewendet auf unsere Gleichung ergibt sich die Differenzengleichung

$$bu_{k-1} = y_k + ay_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### 3 Verfahren der kleinsten Quadrate

#### 3.1 Fragestellung und Rechenbeispiel

Die hergeleitete Differenzengleichung soll nun bei gegebenen Eingangsmessdaten  $u_0, u_1, u_2, \dots$  und Ausgangsmessdaten  $y_0, y_1, y_2, \dots$  nach  $a$  und  $b$  gelöst werden. Genau genommen handelt es sich dabei um unendlich viele Gleichungen, nämlich für jedes  $k$  eine, d. h.

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad -ay_{-1} + bu_{-1} = y_0 \\ k = 1 : & \quad -ay_0 + bu_0 = y_1 \\ k = 2 : & \quad -ay_1 + bu_1 = y_2 \\ & \quad \vdots \\ & \quad -ay_{k-1} + bu_{k-1} = y_k \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Klarerweise haben wir aber nur endlich viele Eingangs-Ausgangs-Paare  $(u_k, y_k)$  zur Verfügung. Aber schon, wenn wir mehr als zwei Messpunktpaare verwenden wollen, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für zwei Variablen mit mehr als zwei Gleichungen. Ein solches hat – wenn die Gleichungen nicht gerade linear abhängig sind – keine Lösung. Wir können im Allgemeinen also nur erwarten, dass die Gleichungen „ungefähr“ erfüllt sind.

Schauen wir uns aber zunächst ein Rechenbeispiel an, das sich exakt lösen lässt. Durch eine Messung seien

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0,631\,682, \quad y_2 = 0,815\,271$$

gegeben. Wegen  $u_{-1} = y_{-1} = 0$  lautet die erste Gleichung  $0a + 0b = 0$ , ist also wertlos. Die beiden folgenden Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}
k = 1 : \quad -ay_0 + bu_0 = y_1 & \implies & b = 0,631\,682 \\
k = 2 : \quad -ay_1 + bu_1 = y_2 & \implies & -0,631\,682a + b = 0,815\,271
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich offenbar sofort

$$b = 0,631\,682, \quad a = \frac{0,815\,271 - 0,631\,682}{-0,631\,682} = -0,290\,635.$$

Die Messung hat für den nächsten Zeitpunkt  $y_3 = 0,883\,208$  ergeben. Die linke Seite der Gleichung für  $k = 3$  ist

$$-ay_2 + bw_2 = 0,290\,635 \cdot 0,815\,271 + 0,631\,682 \cdot 1 = 0,868\,628.$$

Dieser Wert weicht zwar nur um 1,65% vom Messwert ab, allerdings ist es nicht sinnvoll, zwei der drei Gleichungen exakt erfüllen zu wollen und die andere gar nicht in die Wahl der Parameter einzubeziehen.

In der Regel ist die Parameteridentifikation abgeschlossen, wenn man Schätzwerte für die Parameter bestimmt hat. Da wir hier aber den Zusammenhang zwischen den vergleichsweise abstrakten Parametern  $a$  und  $b$  und den technisch konkreten Größen  $K$  und  $T_1$  kennen, können wir auch für letztere Werte angeben. Dazu benötigen wir die Abtastzeit, die bei der fiktiven Messung  $T_a = 0,05$  s betragen hat. Durch Umstellen erhalten wir

$$\begin{aligned}
a = -e^{-T_a/T_1} & \implies T_1 = -\frac{T_a}{\ln(-a)} = -\frac{0,05 \text{ s}}{\ln(0,290\,635)} = 0,040\,463 \text{ s}, \\
b = K(1 - e^{-T_a/T_1}) & \implies K = \frac{b}{1 - e^{-T_a/T_1}} = \frac{b}{1 + a} = \frac{0,631\,682}{1 - 0,290\,635} = 0,890\,490.
\end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass es mit dieser Messung nicht möglich ist, Rückschlüsse auf die Bauelemente zu ziehen. Aus dem Zeitverhalten der Spannung an einem  $RC$ -Glied kann man nur auf das Produkt  $RC$  schließen, nicht aber auf  $R$  oder  $C$  getrennt.

### 3.2 Gleichungssystem mit Fehlervektor

Wir wollen nun diskutieren, was wir unter einer „ungefähren Lösung“ des unlösbaren Gleichungssystems verstehen. Wenn wir die rechte Seite auch nach links schreiben, erhalten wir  $-ay_{k-1} + bu_{k-1} - y_k = 0$  für alle  $k$ . Die Nullen auf der rechten Seite ersetzen wir nun durch (hoffentlich) kleine Zahlen  $e_k$ , die einen Fehler darstellen sollen. Die Anzahl solcher Gleichungen, die wir benutzen wollen, sei  $N$ . Für  $k = 0, \dots, N-1$  ergibt sich dann das System

$$\begin{aligned}
-ay_{-1} + bu_{-1} &= y_0 + e_0 \\
-ay_0 + bu_0 &= y_1 + e_1 \\
&\vdots \\
-ay_{N-2} + bu_{N-2} &= y_{N-1} + e_{N-1}
\end{aligned}$$

Es lässt sich etwas leichter handhaben, wenn wir es in eine Matrixform überführen, d. h.

$$M\vec{p} = \vec{r} + \vec{e}, \quad M = \begin{pmatrix} -y_{-1} & u_{-1} \\ -y_0 & u_0 \\ \vdots & \vdots \\ -y_{N-2} & u_{N-2} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Darin sind  $M \in \mathbb{R}^{N \times 2}$  die Koeffizientenmatrix,  $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$  der Parametervektor,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^N$  die rechte Seite und  $\vec{e} \in \mathbb{R}^N$  der Fehlervektor.

Die Idee ist nun, den Betrag  $|\vec{e}|$  des Fehlervektors  $\vec{e}$  zu minimieren, oder – äquivalent dazu – sein Quadrat  $|\vec{e}|^2$ . Wegen  $|\vec{e}|^2 = e_0^2 + e_1^2 + \dots + e_{N-1}^2$  nennt man dies auch das Verfahren der kleinsten Quadrate. Dieses haben Sie sicherlich in etwas einfacherer Form schon in folgendem Zusammenhang kennengelernt: An einem Widerstand wird zu  $N$  verschiedenen Strömen die Spannung gemessen. Im Allgemeinen wird es auch hier, unter anderem wegen der Messfehler, keinen Wert für  $R$  so geben, dass  $U_k = RI_k$  für alle Wertepaare  $(I_k, U_k)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , erfüllt ist. Durch Hinzufügen eines Fehlervektors ergibt sich analog zu oben

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{N-1} \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die Funktion

$$f(R) = |\vec{e}|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} e_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (RI_k - U_k)^2.$$

Die Minimalstelle dieser Funktion  $f$  ist der gesuchte Widerstandswert. Die Ursprungsgerade mit dieser Steigung heißt dann Ausgleichsgerade.

Um das Minimum zu finden, leiten wir nach  $R$  ab und erhalten

$$f'(R) = \sum_{k=0}^{N-1} 2(RI_k - U_k)I_k = 2R \sum_{k=0}^{N-1} I_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{N-1} I_k U_k.$$

Die Nullstelle der Ableitung ist daher

$$R = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} I_k U_k}{\sum_{k=0}^{N-1} I_k^2}.$$

In der Gleichung  $f'(R) = 0$  können wir, nach Division durch 2, die Summenzeichen aber auch als Matrizenprodukte interpretieren, und zwar

$$(I_0 \quad I_1 \quad \dots \quad I_{N-1}) \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ \vdots \\ I_{N-1} \end{pmatrix} R = (I_0 \quad I_1 \quad \dots \quad I_{N-1}) \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Wir haben also das unlösbare Gleichungssystem von links mit  $(I_0, I_1, \dots, I_{N-1})$  multipliziert. Tatsächlich ist  $f''(R) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} I_k^2 > 0$ , d. h. es liegt ein Minimum vor.

### 3.3 Die Gaußschen Normalgleichungen

Wir überlegen uns in Anhang A, dass dieses Verfahren allgemein funktioniert. Wir multiplizieren also von links mit  $M^T$  und erhalten  $M^T M \vec{p} = M^T \vec{r}$ . Die Koeffizientenmatrix  $M^T M$

dieses Gleichungssystems lautet

$$\begin{aligned}
 M^T M &= \begin{pmatrix} -y_{-1} & -y_0 & \cdots & -y_{N-2} \\ u_{-1} & u_0 & \cdots & u_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_{-1} & u_{-1} \\ -y_0 & u_0 \\ \vdots & \vdots \\ -y_{N-2} & u_{N-2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} y_{-1}^2 + y_0^2 + \cdots + y_{N-2}^2 & -(y_{-1}u_{-1} + y_0u_0 + \cdots + y_{N-2}u_{N-2}) \\ -(u_{-1}y_{-1} + u_0y_0 + \cdots + u_{N-2}y_{N-2}) & u_{-1}^2 + u_0^2 + \cdots + u_{N-2}^2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

analog seine rechte Seite  $M^T \vec{r}$

$$M^T \vec{r} = \begin{pmatrix} -y_{-1} & -y_0 & \cdots & -y_{N-2} \\ u_{-1} & u_0 & \cdots & u_{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y_{-1}y_0 + y_0y_1 + \cdots + y_{N-2}y_{N-1}) \\ u_{-1}y_0 + u_0y_1 + \cdots + u_{N-2}y_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Es ist also ein lineares  $2 \times 2$ -Gleichungssystem

$$M^T M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M^T \vec{r}$$

für  $a$  und  $b$  entstanden.

## 4 Andere Eingangssignale; Halteglieder

### 4.1 Sprung- und Sinusantwort

Für den Tiefpass hatten wir die Differenzgleichung

$$by_{k-1} = y_k + ay_{k-1}, \quad a = -e^{-T_a/T_1}, \quad b = K(1 - e^{-T_a/T_1})$$

hergeleitet. Für die abgetastete Sprungantwort gilt ferner

$$y_k = y(kT_a) = K(1 - e^{-kT_a/T_1}).$$

Setzen wir dies in die Differenzgleichung ein, so erhalten wir für  $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
 y_k + ay_{k-1} &= K(1 - e^{-kT_a/T_1}) + aK(1 - e^{-(k-1)T_a/T_1}) \\
 &= K(1 + a) - Ke^{-kT_a/T_1} - Ka e^{T_a/T_1} e^{-kT_a/T_1} \\
 &= K(1 - e^{-T_a/T_1}) - Ke^{-kT_a/T_1} + Ke^{-T_a/T_1} e^{T_a/T_1} e^{-kT_a/T_1} = b.
 \end{aligned}$$

Wegen  $u_{k-1} = 1$  stimmt dies mit der linken Seite überein; die Differenzgleichung ist also rein rechnerisch exakt erfüllt.

Wir wollen nun statt des Einheitssprungs eine sinusförmige Anregung betrachten. Wir setzen also  $u(t) = \sin(\omega t)$  mit  $\omega > 0$ . Die Laplace-Transformierte ergibt sich zu

$$U(s) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \int_0^\infty \sin(\omega t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2j} \int_0^\infty \left( e^{(-s+j\omega)t} - e^{(-s-j\omega)t} \right) dt = \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{(-s+j\omega)t}}{-s+j\omega} - \frac{e^{(-s-j\omega)t}}{-s-j\omega} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{2j} \left( \frac{-1}{-s+j\omega} - \frac{-1}{-s-j\omega} \right) = \frac{1}{2j} \frac{(s+j\omega) - (s-j\omega)}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.
\end{aligned}$$

Für den Ausgang der Strecke erhalten wir dann

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{1 + sT_1} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Der Ansatz  $Y(s) = A/(1 + sT_1) + (Bs + C)/(s^2 + \omega^2)$  liefert nach etwas Rechnerei

$$Y(s) = \frac{K}{(\omega T_1)^2 + 1} \left( \frac{\omega T_1}{s + 1/T_1} - \frac{\omega T_1 s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right).$$

Für den zweiten Term rechnen wir ganz analog zum Sinus

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( e^{(-s+j\omega)t} + e^{(-s-j\omega)t} \right) dt = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{-s+j\omega} + \frac{-1}{-s-j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Damit folgt für die Sinusantwort

$$y(t) = \frac{K}{(\omega T_1)^2 + 1} \left( \omega T_1 e^{-t/T_1} - \omega T_1 \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right).$$

Wir wollen erneut die Differenzengleichung überprüfen. Für  $k \geq 1$  erhalten wir mit der Abkürzung  $\alpha = \omega T_a$  ebenfalls nach etwas Rechnerei

$$\begin{aligned}
y_k + ay_{k-1} - by_{k-1} &= \frac{K}{(\omega T_1)^2 + 1} \left( \omega T_1 e^{-kT_a/T_1} - \omega T_1 \cos(k\alpha) + \sin(k\alpha) \right. \\
&\quad \left. - e^{-T_a/T_1} \omega T_1 e^{-(k-1)T_a/T_1} + e^{-T_a/T_1} \omega T_1 \cos((k-1)\alpha) - e^{-T_a/T_1} \sin((k-1)\alpha) \right) \\
&\quad - K(1 - e^{-T_a/T_1}) \sin((k-1)\alpha) \\
&= \frac{K}{(\omega T_1)^2 + 1} \left( \left( \omega T_1 e^{-T_a/T_1} \cos \alpha - ((\omega T_1)^2 e^{-T_a/T_1} - (\omega T_1)^2 - 1) \sin \alpha - \omega T_1 \right) \cos(k\alpha) \right. \\
&\quad \left. + \left( \omega T_1 e^{-T_a/T_1} \sin \alpha + ((\omega T_1)^2 e^{-T_a/T_1} - (\omega T_1)^2 - 1) \cos \alpha + 1 \right) \sin(k\alpha) \right).
\end{aligned}$$

Naiv würden wir erwarten, dass dieser Ausdruck 0 ergibt für beliebige Streckenparameter  $K$  und  $T_1$ , Anregungsfrequenzen  $\omega$ , Abtastzeiten  $T_a$  und Indizes  $k$ . Tatsächlich ist das aber nicht der Fall, weil die Klammerausdrücke vor  $\cos(k\alpha)$  und  $\sin(k\alpha)$  nicht identisch verschwinden. Zumindest konvergieren sie aber für  $T_a \rightarrow 0$  gegen 0.

## 4.2 Kontinuierliches und diskretes Modell

To do ...

## 4.3 Halteglieder

To do ...

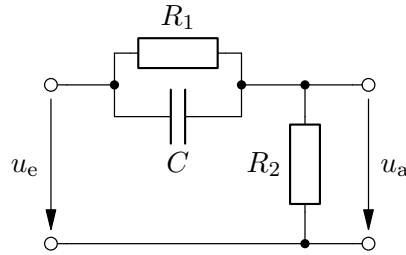


Abbildung 3: Ein Hochpass

## 5 Allgemeiner Fall

### 5.1 Der Hochpass

Gegeben sei der in Abbildung 3 dargestellte Hochpass. Der Aufbau der Schaltung ist derselbe wie beim Tiefpass, nur dass die Ausgangsspannung nicht über dem Kondensator, sondern über dem einzelnen Widerstand abgegriffen wird. Wir können daher die Differentialgleichung des Tiefpasses benutzen, wenn wir  $u_a$  durch  $u_e - u_a$  ersetzen sowie  $R_1$  und  $R_2$  miteinander vertauschen. Dies führt auf

$$\frac{R_1}{R_2 + R_1} u_e(t) = (R_2 \parallel R_1) C \frac{d(u_e(t) - u_a(t))}{dt} + (u_e(t) - u_a(t)).$$

Durch Umstellen erhalten wir daraus die Differentialgleichung für den Hochpass

$$K u_e(t) + T_1 \frac{du_e(t)}{dt} = u_a(t) + T_1 \frac{du_a(t)}{dt}, \quad K = \frac{R_2}{R_2 + R_1}, \quad T_1 = (R_1 \parallel R_2) C.$$

Anwenden der Laplace-Transformation ergibt

$$K U_e(s) + T_1 (s U_e(s) - u_e(0)) = U_a(s) + T_1 (s U_a(s) - u_a(0)).$$

Beim Hochpass – im Unterschied zum Tiefpass – gilt  $u_a(0) = u_e(0)$ . Die beiden Ausdrücke  $s T_1 u_e(0)$  und  $s T_1 u_a(0)$  fallen daher heraus, und es entsteht

$$G(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = \frac{K + s T_1}{1 + s T_1}.$$

Ab hier verwenden wir wieder  $u$  und  $y$ . Mit  $U(s) = 1/s$  erhalten wir

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{K}{s(1 + s T_1)} + \frac{1}{s + 1/T_1}.$$

Die Rücktransformation ergibt

$$y(t) = K(1 - e^{-t/T_1}) + e^{-t/T_1} = K + (1 - K)e^{-t/T_1}.$$

Durch Abtasten und Transformieren erhalten wir die  $\mathcal{Z}$ -Sprungantwort

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(kT_a)](z) = \frac{Kz}{z-1} + \frac{(1-K)z}{z - e^{-T_a/T_1}}$$

sowie die  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z-1}{z} Y(z) = K + (1-K) \frac{z-1}{z - e^{-T_a/T_1}} = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

mit  $a = -e^{-T_a/T_1}$  und  $b = K - 1 - Ke^{-T_a/T_1}$ . Wegen  $G(z) = Y(z)/U(z)$  führt dies auf  $(1 + bz^{-1})U(z) = (1 + az^{-1})Y(z)$  und nach Rücktransformation auf die Differenzgleichung

$$u_k + bu_{k-1} = y_k + ay_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## 5.2 Allgemeine $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion

Wenn die Parameter mit dem Kleinste-Quadrate-Verfahren geschätzt werden sollen, dann muss ein (unlösbares) lineares Gleichungssystem vorliegen. Es muss sich also um lineare Differenzgleichungen handeln, die durch die inverse  $\mathcal{Z}$ -Transformation genau dann entstehen, wenn  $G(z)$  eine rationale Funktion ist. Es ist also naheliegend, von einer Gestalt

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}}$$

auszugehen. Aus

$$(b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m})U(z) = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n})Y(z)$$

entsteht die Differenzgleichung

$$b_0u_k + b_1u_{k-1} + b_2u_{k-2} + \dots + b_mu_{k-m} = a_0y_k + a_1y_{k-1} + a_2y_{k-2} + \dots + a_ny_{k-n}.$$

Dies ist ein homogenes (!) lineares Gleichungssystem für die Parameter, das natürlich die triviale Lösung als uninteressante Lösung besitzt. Die Aufgabe, eine optimale Lösung zu finden, ist daher nicht sinnvoll gestellt.

Man umgeht das Problem, indem man  $a_0 = 1$  setzt. Man normiert sozusagen die Funktion  $G$ , denn jede beliebige Erweiterung des Bruches mit einer festen Zahl wäre dieselbe Funktion  $G$ . Man wählt nicht  $b_0 = 1$ , weil dieser Parameter eventuell gar nicht vorkommt (vgl. den Tiefpass). Also ergibt sich allgemein

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}},$$

$$-a_1y_{k-1} - a_2y_{k-2} - \dots - a_ny_{k-n} + b_0u_k + b_1u_{k-1} + b_2u_{k-2} + \dots + b_mu_{k-m} = y_k.$$

Dies können wir in Matrixform schreiben als  $M\vec{p} = \vec{r} + \vec{e}$  mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & u_0 & 0 & \dots & 0 \\ -y_0 & 0 & \dots & 0 & u_1 & u_0 & \dots & 0 \\ -y_1 & -y_0 & \dots & 0 & u_2 & u_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{N-2} & -y_{N-3} & \dots & -y_{N-n-1} & u_{N-1} & u_{N-2} & \dots & u_{N-m-1} \end{pmatrix},$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Wenn einer der Parameter bekannt ist, etwa  $b_0 = 0$  beim Tiefpass oder  $b_0 = 1$  beim Hochpass, dann kann man diese Information natürlich verwenden und muss diesen Parameter nicht schätzen. Wie üblich eliminiert man dann diesen Parameter aus dem linearen Gleichungssystem, indem man ihn aus dem Lösungsvektor streicht und die zugehörige Spalte der Matrix auf die rechte Seite bringt. Im Fall  $b_0 = 1$  ergibt sich dann z. B.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -y_0 & 0 & \cdots & 0 & u_0 & \cdots & 0 \\ -y_1 & -y_0 & \cdots & 0 & u_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{N-2} & -y_{N-3} & \cdots & -y_{N-n-1} & u_{N-2} & \cdots & u_{N-m-1} \end{pmatrix},$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} y_0 - u_0 \\ y_1 - u_1 \\ y_2 - u_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} - u_{N-1} \end{pmatrix}.$$

### 5.3 Eine Beispiel-Implementation in Matlab

Wir gehen erst einmal davon aus, dass die Messdaten in zwei gleich langen Spaltenvektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{y}$  gespeichert sind. Als  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion sei

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

gegeben. Um die Matrix  $\mathbf{M}$  und die rechte Seite  $\mathbf{r}$  aufzustellen, schreiben wir

$$\mathbf{M} = [ [0; -\mathbf{y}(1 : \text{end}-1)] , \mathbf{u} , [0; \mathbf{u}(1 : \text{end}-1)] ];$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{y};$$

Die Matrix  $\mathbf{M}$  wird aus drei Spalten zusammengesetzt, erkennbar an den zwei Kommata. Die mittlere Spalte ist einfach der Vektor  $\mathbf{u}$ , der zum Parameter  $b_0$  gehört. Für die dritte Spalte zu  $b_1$  müssen wir oben eine Null einschieben, dafür aber die letzte Komponente des Vektors  $\mathbf{u}$  abschneiden. Die Indizierung  $\mathbf{u}(1 : \text{end}-1)$  bewirkt, dass vom Vektor  $\mathbf{u}$  alle Komponenten vom ersten bis zum vorletzten genommen werden. Die erste Spalte für  $a_1$  ist analog, nur dass der Vektor  $\mathbf{y}$  verwendet wird und seine Komponenten mit  $-1$  multipliziert werden.

Um die Parameter zu schätzen, benutzen wir in Matlab die einfache Zeile

$$\mathbf{p} = \mathbf{M} \setminus \mathbf{r};$$

Dieser sogenannte Backslash-Operator berechnet in der Syntax  $A \setminus b$  standardmäßig die Lösung  $\vec{x}$  des linearen Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$  für den Fall, dass  $A$  quadratisch und regulär ist. Je nach Typ der Matrix (diagonal, dreieckig, symmetrisch, ...) wählt er dazu einen geeigneten Algorithmus aus. Der Operator testet aber zunächst, ob die Matrix überhaupt quadratisch ist, denn wenn nicht, gibt es im Allgemeinen keine eindeutige Lösung und die meisten numerischen Gleichungssystem-Löser funktionieren nicht. Wenn er feststellt, dass die Matrix mehr Zeilen als Spalten besitzt, wie es bei der Parameterschätzung der Fall ist, berechnet er den Vektor  $u = A^+b$ , also genau die Kleinste-Quadrate-Näherung, die wir benötigen. Sobald  $p$  berechnet wurde, kann man z. B. mit

```
a1 = p(1);
b0 = p(2);
b1 = p(3);
```

sinnvoll benannte Parameter aus dem Parametervektor herausholen.

Wenn man keine Möglichkeit zur Hand hat, reale Daten  $u$  und  $y$  zu messen, kann man solche natürlich auch simulieren. Der einfachste Fall ist, dass man den Eingang  $u_k = 1$  für alle  $k \geq 0$  wählt und sich zu einer gegebenen Strecke die Sprungantwort  $y(t)$  erzeugt. In diese setzt man die Zeitpunkte  $t = kT_a$  ein und erhält die diskreten Ausgangsdaten  $y_k$ . Übersetzt in ein Matlab-Programm wäre dies z. B.

```
Ta = 0.02;
t = (0 : 10).' * Ta;
u = ones(size(t));
K = 0.90909;
T1 = 0.042727;
y = K * (1 - exp(-t / T1));
```

Dadurch werden zwei Spaltenvektoren  $u$  und  $y$  mit je elf Komponenten erzeugt. Um statistische Messfehler zu simulieren, kann man auf jede Komponente von  $y$  eine normalverteilte Zufallszahl hinzuaddieren. So etwas erledigt dann die Zeile

```
y = y + 0.01 * randn(size(x));
```

Während der Mittelwert natürlich 0 sein muss, ist  $\sigma = 0,01$  die Standardabweichung.

## A Herleitung der Gaußschen Normalgleichungen

### A.1 Spezialfall im $\mathbb{R}^3$

Wir beginnen mit einer geometrischen Motivation im  $\mathbb{R}^3$  und schreiben

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

für  $M\vec{p} = \vec{r} + \vec{e}$ . Die Spalten der Matrix  $M$  fassen wir als Vektoren  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$  und  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$  auf. Sofern  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  linear unabhängig sind, spannen diese Vektoren eine Ebene auf, deren Punkte in der Parameterdarstellung  $M\vec{p} = a\vec{v} + b\vec{w}$  gegeben sind. Für eine „fehlerlose“ Lösung (d. h.  $\vec{e} = \vec{0}$ ) müsste  $\vec{r}$  in dieser Ebene liegen. Aber unabhängig davon, ob  $\vec{r}$  in der Ebene liegt oder nicht, ist  $|\vec{e}|$  der Abstand des Punktes  $\vec{r}$  vom Punkt  $a\vec{v} + b\vec{w}$ .

Der Abstand wird minimal, wenn der Abstandsvektor  $\vec{e}$  senkrecht auf der Ebene steht. Dies ist die elementare Eigenschaft, die den Abstandsformeln Punkt–Ebene zugrunde liegt.

Man kann die Orthogonalität natürlich mit dem Skalarprodukt ausdrücken und erhält dann  $\vec{v} \cdot \vec{e} = \vec{v} \cdot (M\vec{p} - \vec{r}) = 0$  und  $\vec{w} \cdot \vec{e} = \vec{w} \cdot (M\vec{p} - \vec{r}) = 0$ . Statt des Skalarprodukts kann man aber auch das Matrizenprodukt benutzen, wenn man den linken Spaltenvektor zu einem Zeilenvektor transponiert, d. h.  $\vec{v}^T(M\vec{p} - \vec{r}) = 0$  und  $\vec{w}^T(M\vec{p} - \vec{r}) = 0$ . Schreibt man beide Gleichungen untereinander, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \vec{v}^T \\ \vec{w}^T \end{pmatrix} (M\vec{p} - \vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies M^T(M\vec{p} - \vec{r}) = \vec{0} \implies M^T M\vec{p} = M^T \vec{r}.$$

Dadurch ist ein lineares  $2 \times 2$ -System mit der Koeffizientenmatrix

$$M^T M = \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{v} & \vec{w} \cdot \vec{w} \end{pmatrix}$$

entstanden. Es gilt  $\det(M^T M) = |\vec{v}|^2 |\vec{w}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 > 0$ , denn nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist  $|\vec{v} \cdot \vec{w}| < |\vec{v}| |\vec{w}|$ , wenn die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  linear unabhängig sind. Also ist die Matrix  $M^T M$  regulär und damit das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

## A.2 Allgemeiner Fall mit linearer Algebra

Wir wollen uns nun dem allgemeinen Fall  $M\vec{p} = \vec{r} + \vec{e}$  zuwenden. Offenbar muss  $M$  mindestens so viele Zeilen wie Spalten haben, denn ansonsten hätten wir mehr zu schätzende Parameter als Messpunkte, was keinen Sinn ergibt. Wir betrachten die (quadratische) Matrix  $M^T M$  etwas näher: Wir gehen davon aus, der Vektor  $\vec{v}$  sei derart gewählt, dass  $(M^T M)\vec{v} = \vec{0}$ . Mit der allgemeinen Regel  $(AB)^T = B^T A^T$  folgt dann

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{0} = \vec{v}^T (M^T M)\vec{v} = (\vec{v}^T M^T)(M\vec{v}) = (M\vec{v})^T (M\vec{v}) = (M\vec{v}) \cdot (M\vec{v}) = |M\vec{v}|^2.$$

Also ist  $M\vec{v} = \vec{0}$ . Wenn wir weiter fordern, dass die Spalten von  $M$  linear unabhängig sind (vgl. das Beispiel im  $\mathbb{R}^3$  zuvor), dann hat  $M$  vollen Rang, weswegen  $\vec{v} = \vec{0}$  folgt. Wir haben damit gezeigt, dass  $M^T M$  regulär ist (denn aus  $(M^T M)\vec{v} = \vec{0}$  folgte  $\vec{v} = \vec{0}$ ). Zusätzlich ist  $M^T M$  wegen  $(M^T M)^T = M^T M^{TT} = M^T M$  symmetrisch, und mit der vorigen Rechnung folgt sogar, dass sie positiv definit ist.

Da die Matrix  $M^T M$  regulär ist, können wir sie invertieren und die Vektoren

$$\vec{e}_{\parallel} = M\vec{p} - M(M^T M)^{-1} M^T \vec{r} \quad \text{und} \quad \vec{e}_{\perp} = M(M^T M)^{-1} M^T \vec{r} - \vec{r}$$

definieren. Offenbar ist dann  $\vec{e}_{\parallel} + \vec{e}_{\perp} = M\vec{p} - \vec{r} = \vec{e}$ , und außerdem gilt

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\parallel} \cdot \vec{e}_{\perp} &= (M\vec{p} - M(M^T M)^{-1} M^T \vec{r})^T (M(M^T M)^{-1} M^T \vec{r} - \vec{r}) \\ &= (\vec{p} - (M^T M)^{-1} M^T \vec{r})^T M^T (M(M^T M)^{-1} M^T \vec{r} - \vec{r}) \\ &= (\vec{p} - (M^T M)^{-1} M^T \vec{r})^T ((M^T M)(M^T M)^{-1} M^T \vec{r} - M^T \vec{r}) \\ &= (\vec{p} - (M^T M)^{-1} M^T \vec{r})^T (M^T \vec{r} - M^T \vec{r}) = (\vec{p} - (M^T M)^{-1} M^T \vec{r})^T \vec{0} = 0, \end{aligned}$$

d. h.  $\vec{e}_{\perp}$  steht senkrecht auf  $\vec{e}_{\parallel}$ . Daher können wir den Satz des Pythagoras anwenden und erhalten  $|\vec{e}|^2 = |\vec{e}_{\parallel} + \vec{e}_{\perp}|^2 = |\vec{e}_{\parallel}|^2 + |\vec{e}_{\perp}|^2$ . Wir wollen den Parametervektor  $\vec{p}$  so wählen, dass  $|\vec{e}|$  minimiert wird. Da  $\vec{e}_{\perp}$  gar nicht von  $\vec{p}$  abhängt, müssen wir dazu  $|\vec{e}_{\parallel}|$  minimieren. Wenn wir sogar  $\vec{e}_{\parallel} = \vec{0}$  fordern, ergibt sich

$$\vec{0} = M\vec{p} - M(M^T M)^{-1} M^T \vec{r} = M(\vec{p} - (M^T M)^{-1} M^T \vec{r}) \implies \vec{p} - (M^T M)^{-1} M^T \vec{r} = \vec{0},$$

weil  $M$  vollen Rang hat.

Die Matrix  $(M^T M)^{-1} M^T$  ist in der Mathematik und den Anwendungen so wichtig, dass sie einen eigenen Namen erhalten hat: Sie ist die (bzw. eine mögliche) Pseudoinverse, und oftmals findet man die Schreibweise  $M^+ = (M^T M)^{-1} M^T$ . Für die optimale Wahl des Parametervektors kann man also mit Hilfe der Pseudoinversen

$$\vec{p} = M^+ \vec{r}$$

schreiben. Multipliziert man von links mit  $M^T M$ , so ergibt sich die behauptete Beziehung  $M^T M \vec{p} = M^T \vec{r}$ .

### A.3 Allgemeiner Fall mit mehrdimensionaler Analysis

Wir betrachten noch eine andere Herleitung, die eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Herleitung ist, die wir für die Ausgleichsgerade benutzt haben. Wie dort definieren wir eine Funktion

$$\begin{aligned} f(\vec{p}) &= f(p_1, p_2, \dots, p_\ell) = |\vec{e}|^2 = (M\vec{p} - \vec{r})^T (M\vec{p} - \vec{r}) \\ &= (M\vec{p})^T (M\vec{p}) - (M\vec{p})^T \vec{r} - \vec{r}^T (M\vec{p}) + \vec{r}^T \vec{r} \\ &= \vec{p}^T M^T M \vec{p} - \vec{p}^T M^T \vec{r} - \vec{r}^T M \vec{p} + |\vec{r}|^2. \end{aligned}$$

In einem Minimum müssen alle ersten partiellen Ableitungen 0 sein. Wir rechnen diese Ableitungen „per Hand“ aus und schreiben dazu  $\vec{v}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  mit 1 an der  $i$ -ten Stelle. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\vec{p} + h\vec{v}_i) &= (\vec{p} + h\vec{v}_i)^T M^T M (\vec{p} + h\vec{v}_i) - (\vec{p} + h\vec{v}_i)^T M^T \vec{r} - \vec{r}^T M (\vec{p} + h\vec{v}_i) + |\vec{r}|^2 \\ &= \vec{p}^T M^T M \vec{p} + \vec{p}^T M^T M h\vec{v}_i + h\vec{v}_i^T M^T M \vec{p} + h\vec{v}_i^T M^T M h\vec{v}_i \\ &\quad - \vec{p}^T M^T \vec{r} - h\vec{v}_i^T M^T \vec{r} - \vec{r}^T M \vec{p} - \vec{r}^T M h\vec{v}_i + |\vec{r}|^2. \end{aligned}$$

Differenz bilden ergibt

$$f(\vec{p} + h\vec{v}_i) - f(\vec{p}) = h\vec{p}^T M^T M \vec{v}_i + h\vec{v}_i^T M^T M \vec{p} + h^2 \vec{v}_i^T M^T M \vec{v}_i - h\vec{v}_i^T M^T \vec{r} - h\vec{r}^T M \vec{v}_i.$$

Wenn  $A$  eine Matrix sowie  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  passende Vektoren sind, dann ist  $\vec{a}^T A \vec{b}$  eine  $1 \times 1$ -Matrix, d. h. ein Skalar. Das bedeutet aber, dass wir diesen Ausdruck transponieren dürfen, ohne etwas zu verändern, d. h. es gilt

$$\vec{a}^T A \vec{b} = (\vec{a}^T A \vec{b})^T = \vec{b}^T A^T \vec{a}.$$

Mit dieser Rechenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{f(\vec{p} + h\vec{v}_i) - f(\vec{p})}{h} &= 2\vec{v}_i^T M^T M \vec{p} + h\vec{v}_i^T M^T M \vec{v}_i - 2\vec{v}_i^T M^T \vec{r} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i} = 2\vec{v}_i^T (M^T M \vec{p} - M^T \vec{r}). \end{aligned}$$

Die Ableitungen werden also alle 0, wenn  $M^T M \vec{p} = M^T \vec{r}$  gilt.

In analoger Weise rechnen wir noch die zweiten partiellen Ableitungen aus: Es ergibt sich

$$\frac{\partial f(\vec{p} + h\vec{v}_j)}{\partial p_i} - \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i} = 2\vec{v}_i^T (M^T M (\vec{p} + h\vec{v}_j) - M^T \vec{r}) - 2\vec{v}_i^T (M^T M \vec{p} - M^T \vec{r})$$

$$\begin{aligned}
&= 2\vec{v}_i^T (M^T M \vec{p} + h M^T M \vec{v}_j - M^T \vec{r} - M^T M \vec{p} + M^T \vec{r}) \\
&= 2h \vec{v}_i^T M^T M \vec{v}_j = 2h (M^T M)_{ij},
\end{aligned}$$

worin  $(M^T M)_{ij}$  der Eintrag der Matrix  $M^T M$  an der Stelle  $(i, j)$  sei. Die Hessematrix – das ist die Matrix gebildet aus allen zweiten Ableitungen – ist daher gleich  $2M^T M$ . Wie schon festgestellt ist diese Matrix positiv definit, was das richtige Kriterium für ein Minimum bezüglich mehrerer Variablen ist.

## B Allgemeines zur $\mathcal{Z}$ -Transformation

To do ...