Aufgabensammlung zur Systemtheorie und Regelungstechnik

Dr. S. Krause Prof. Dr. B. Faupel

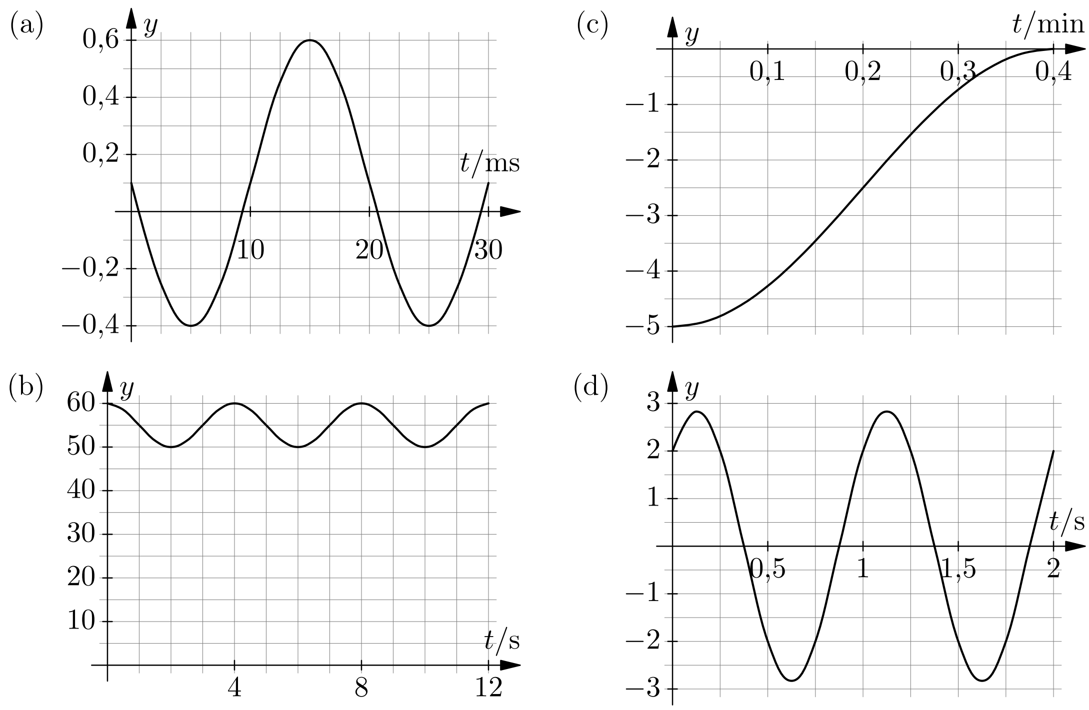
5. November 2018

1 Wiederholung und Grundlagen

1.1 Berechnen Sie (ohne Taschenrechner) die folgenden Ausdrücke. Es bezeichne $\lg = \log_{10}$ den dekadischen Logarithmus. Benutzen Sie $\lg(2) \approx 0{,}301$ und $\lg(3) \approx 0{,}477$.

(a) $\lg(100)$	(d) $\lg(6)$	(g) $\lg\left(\sqrt{10}\right)$	(j) $\lg(10^9)$
(b) $\lg(2000)$	(e) $\lg(1)$	(h) $\lg(9/4)$	(k) $\lg(128)$
(c) $\lg(1/30)$	(f) $\lg(0{,}003)$	(i) $\lg(50)$	(l) $\lg(0{,}15)$

1.2 Geben Sie jeweils die Funktion in der Form $y(t) = \bar{y} + A\sin(\omega t + \varphi)$ zu den folgenden Zeitverläufen an.



1.3 Berechnen Sie alle Summen $z_i + z_k$ und Produkte $z_i \cdot z_k$ für $1 \leq i < k \leq 4$ mit den folgenden komplexen Zahlen. Geben Sie alle Ergebnisse jeweils in kartesischer und Polardarstellung an.

$$z_1 = 3 - 4\mathrm{j}\,, \quad z_2 = \mathrm{j} - 1\,, \quad z_3 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}60^\circ}\,, \quad z_4 = \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}150^\circ}\,.$$

1.4 Vereinfachen Sie die folgenden komplexen Ausdrücke.

(a) $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}225°} - 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}120°}$

(b) $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}30°} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}150°}}{(\mathrm{j}+2)(\mathrm{j}-2)}$

(c) $(1-\mathrm{j})\mathrm{e}^{\mathrm{j}60°} + (1+\mathrm{j})\mathrm{e}^{\mathrm{j}120°}$

(d) $\dfrac{(3+\mathrm{j})(1+3\mathrm{j})}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}45°} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}135°}}$

1.5 Lösen Sie (ohne Laplace-Transformation) die folgenden Anfangswertprobleme.

(a) $\dot{y}(t) + 3y(t) = 6\sin(3t)\,, \quad y(0) = -2$

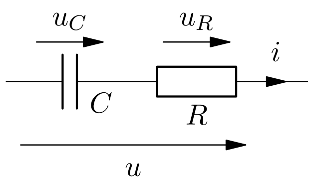
(b) $\dot{y}(t) + 5y(t) = -\mathrm{e}^{-5t}\,, \quad y(0) = 4$

(c) $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 4y(t) = 25\cos(t)\,, \quad y(0) = 3\,, \quad \dot{y}(0) = 2$

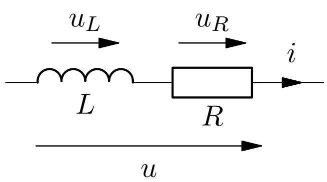
(d) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) = 4\,, \quad y(0) = 0\,, \quad \dot{y}(0) = 1$

1.6 Berechnen Sie jeweils die fehlenden Spannungen und Ströme. Die Bauelementwerte R, C und L sowie die Kreisfrequenz ω seien positiv, aber allgemein.

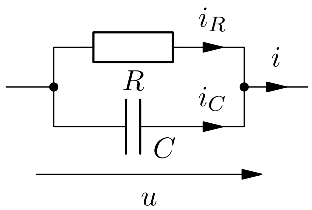
(a) $u_C(t) = \hat{u}_C \sin(\omega t)$



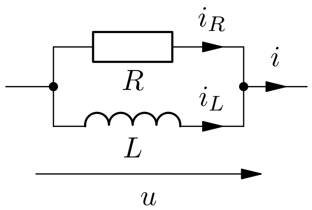
(c) $i(t) = \hat{\imath}\sin(\omega t)$



(b) $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$



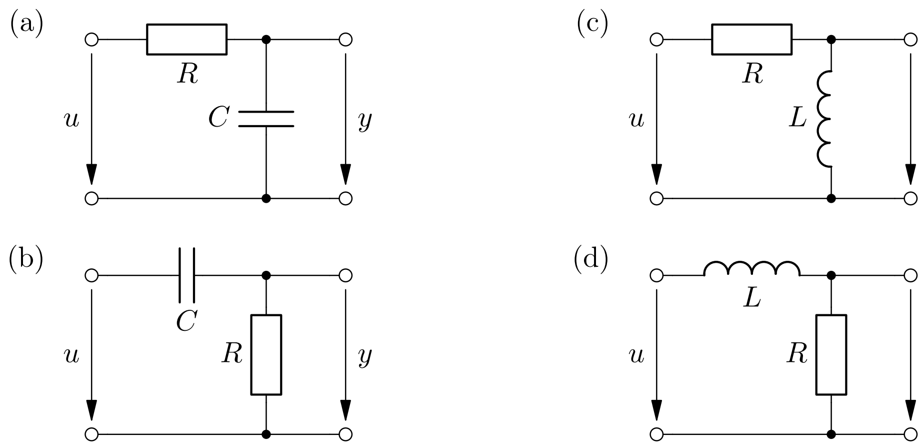
(d) $i_L(t) = \hat{\imath}_L \sin(\omega t)$



2 Differentialgleichungen und Laplace-Transformation

2.1 Für die folgenden Netzwerke

- bestimmen Sie mit Hilfe der Knoten- und Maschenregel die Differentialgleichung zwischen dem Eingang $u(t)$ und dem Ausgang $y(t)$;
- lösen Sie die Differentialgleichung im Zeitbereich unter Annahme allgemeiner Anfangsbedingungen für den Einheitssprung $u(t) = 1$ $(t \geq 0)$;
- transformieren Sie die Differentialgleichung in den Laplace-Bereich unter Annahme allgemeiner Anfangsbedingungen;
- bestimmen Sie die Laplace-Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ für den Fall, dass Sie alle Anfangsbedingungen zu 0 annehmen.



2.2 Für die folgenden Übertragungssysteme mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$

- transformieren Sie die Gleichung in den Laplace-Bereich;
- bestimmen Sie die Laplace-Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ für den Fall, dass Sie alle Anfangsbedingungen zu 0 annehmen;
- zeichnen Sie den Signalflussplan der Differentialgleichung (ohne Beachtung der Anfangsbedingungen).

(a) $\ddot{y}(t) + 3y(t) = -2\dot{u}(t)$ mit $y(0) = \dot{y}(0) = 0$

(b) $\dot{y}(t) = 2\dot{u}(t) + 5u(t)$ mit $y(0) = 1$

(c) $y(t) = \dot{u}(t) - 3\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

(d) $\dddot{y}(t) + y(t) = \ddot{u}(t) + u(t)$ mit $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ und $\ddot{y}(0) = 2$

2.3 Für die folgenden Übertragungssysteme mit Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$

- bestimmen Sie die zur Laplace-Übertragungsfunktion $G(s)$ gehörende Differentialgleichung;
- zeichnen Sie den Signalflussplan der Differentialgleichung.

(a) $G(s) = \dfrac{s^2}{7+s}$

(b) $G(s) = \dfrac{3s+1}{5-s}$

(c) $G(s) = \dfrac{s-3}{s^2}$

(d) $G(s) = \dfrac{s-1}{4+3s}$

2.4 Für die folgenden Zeitfunktionen $y(t)$ $(t \geq 0)$

- skizzieren Sie $y(t)$ mit charakteristischen Werten;
- berechnen Sie $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ mit Hilfe der Definition.

(a) $y(t) = 5$

(b) $y(t) = 2t$

(c) $y(t) = \mathrm{e}^{-6t}$

(d) $y(t) = \cos 2t$

(e) $y(t) = \sin 3t$

(f) $y(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t$

2.5 Für die folgenden Laplace-Transformierten $Y(s)$

- führen Sie – falls möglich – eine (reelle) Partialbruchzerlegung durch;
- berechnen Sie die Zeitfunktion $y(t)$ durch summandenweise Rücktransformation;
- vergleichen Sie das Ergebnis mit einer geeigneten Tabelle zur Laplace-Rücktransformation;
- skizzieren Sie $y(t)$ mit charakteristischen Werten.

(a) $Y(s) = \dfrac{4}{(s+1)(s+3)}$

(b) $Y(s) = \dfrac{2}{s(s+4)}$

(c) $Y(s) = \dfrac{1}{12s}$

(d) $Y(s) = \dfrac{s+5}{(0{,}1s+1)s}$

(e) $Y(s) = \dfrac{10}{5s+2}$

(f) $Y(s) = \dfrac{2s}{s^2+25}$

(g) $Y(s) = \dfrac{4s}{(s+1)(2s+1)}$

(h) $Y(s) = -\dfrac{5}{(s+3)^2}$

(i) $Y(s) = \dfrac{12{,}5}{s^2}$

(j) $Y(s) = \dfrac{3s}{4+4s+s^2}$

(k) $Y(s) = \dfrac{5}{8+s}$

(l) $Y(s) = -\dfrac{4+s}{s^2}$

(m) $Y(s) = \dfrac{3}{s^2+36}$

(n) $Y(s) = \dfrac{3}{5s^2+s}$

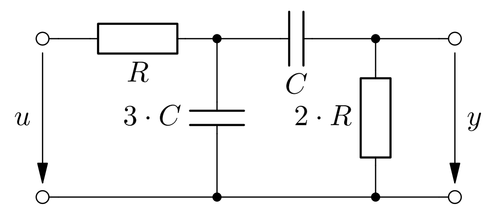
(o) $Y(s) = \dfrac{3s-4}{s^2+4s}$

(p) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

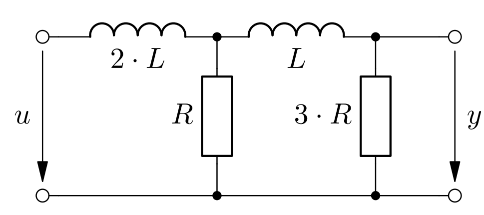
2.6 Für die folgenden Netzwerke

- bestimmen Sie mit Hilfe der Knoten- und Maschenregel die Differentialgleichung zwischen dem Eingang $u(t)$ und dem Ausgang $y(t)$;
- bestimmen Sie die Laplace-Übertragungsfunktion $G(s) = Y(s)/U(s)$ für den Fall, dass Sie alle Anfangsbedingungen zu 0 annehmen.

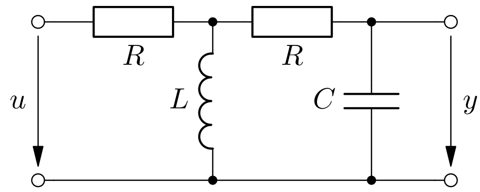
(a)



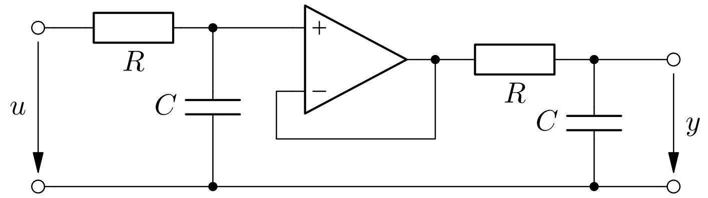
(b)



(c)



(d)



3 Bode-Diagramme und Ortskurven

3.1 Für die folgenden Laplace-Übertragungsfunktionen

- berechnen Sie den Realteil $\operatorname{Re} G(\mathrm{j}\omega)$ und den Imaginärteil $\operatorname{Im} G(\mathrm{j}\omega)$;
- berechnen Sie die Amplitude $A(\omega)$ und die Phase $\varphi(\omega)$;
- skizzieren Sie die Bode-Diagramme von $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$;
- skizzieren Sie die Ortskurve von $G(\mathrm{j}\omega)$.

(a) $G(s) = \dfrac{5}{10s+1}$

(b) $G(s) = 0{,}5s$

(c) $G(s) = -\dfrac{2s+25}{100s}$

(d) $G(s) = \dfrac{5s}{10s+1}$

(e) $G(s) = \dfrac{s}{10} + 2$

(f) $G(s) = \dfrac{100}{1+0{,}25s}$

(g) $G(s) = -100$

(h) $G(s) = \dfrac{2+10s}{1+100s}$

(i) $G(s) = -\dfrac{1}{1+s}$

(j) $G(s) = 5 + \dfrac{1}{5s}$

(k) $G(s) = \dfrac{4}{s}$

(l) $G(s) = 31{,}6$

(m) $G(s) = \dfrac{s}{250}$

(n) $G(s) = -\dfrac{s+1}{100}$

(o) $G(s) = \dfrac{1}{20s}$

(p) $G(s) = \dfrac{4}{s+20}$

(q) $G(s) = 0{,}4 + 50s$

(r) $G(s) = \dfrac{s+10}{4s+80}$

(s) $G(s) = \dfrac{1+10s}{4s}$

(t) $G(s) = \dfrac{0{,}1s}{100+s}$

3.2 Für die folgenden Laplace-Übertragungsfunktionen

- berechnen Sie die Amplitude $A(\omega)$ und die Phase $\varphi(\omega)$;
- skizzieren Sie die Bode-Diagramme von $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$;

- skizzieren Sie die Ortskurve von $G(\mathrm{j}\omega)$.

(a) $G(s) = \dfrac{5}{(1+s)(1+50s)}$

(b) $G(s) = \dfrac{1+10s}{(5s+1)(20+s)}$

(c) $G(s) = \dfrac{25}{s(2s+1)(50+s)}$

(d) $G(s) = \dfrac{25}{s^2}$

(e) $G(s) = (1+10s)(s+0{,}2)$

(f) $G(s) = \dfrac{100}{(1+10s)^2}$

(g) $G(s) = \dfrac{100s}{(s+2)^2}$

(h) $G(s) = \dfrac{1}{(s+100)s}$

(i) $G(s) = \dfrac{80}{s(4+s)^3}$

(j) $G(s) = \dfrac{6}{4s^2+21s+5}$

(k) $G(s) = -\dfrac{1}{(1+s)(10+s)(10s+1)}$

(l) $G(s) = -\dfrac{1}{(10s+1)(s+10)}$

(m) $G(s) = \dfrac{(1+4s)(0{,}5s+1)}{5s}$

(n) $G(s) = \dfrac{40}{4+12s+9s^2}$

(o) $G(s) = \dfrac{6}{s(s+3)^2}$

(p) $G(s) = 4s(2{,}5+s)$

(q) $G(s) = \dfrac{10}{s(1+4s)}$

(r) $G(s) = \dfrac{(s+100)(1+s)}{1+5s}$

(s) $G(s) = \dfrac{20}{(s+0{,}5)^2}$

(t) $G(s) = \dfrac{s^2}{4}$

(u) $G(s) = \dfrac{63{,}2}{(s+1)(s+2)}$

(v) $G(s) = \dfrac{1}{s^3+4s^2+5s+2}$

3.3 Gegeben sei ein PT_n-System mit der Laplace-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{(1+sT)^n}\,, \quad K, T > 0\,, \quad \omega_\mathrm{g} = \frac{1}{T}\,.$$

(a) Bestimmen Sie $\lim_{\omega\to 0} A(\omega)$, $A(\omega_\mathrm{g})$ und $\lim_{\omega\to\infty} A(\omega)$.

(b) Bestimmen Sie $\lim_{\omega\to 0} \varphi(\omega)$, $\varphi(\omega_\mathrm{g})$ und $\lim_{\omega\to\infty} \varphi(\omega)$.

(c) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(d) Skizzieren Sie die Ortskurve für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3.4 Gegeben sei ein PT_2-System mit der Laplace-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}\,, \quad T_1 > T_2 > 0\,, \quad \omega_1 = \frac{1}{T_1}\,, \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}\,, \quad \omega_\mathrm{g} = \sqrt{\omega_1\omega_2}\,.$$

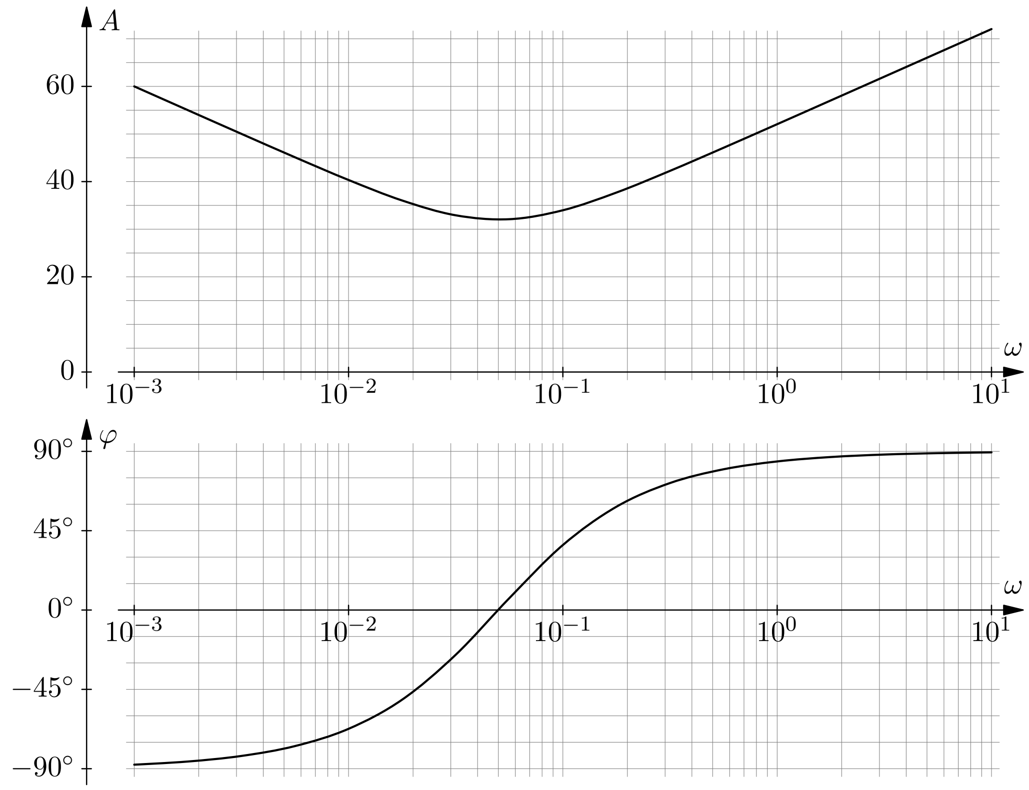
(a) Bestimmen Sie $\lim_{\omega\to 0} \varphi(\omega)$, $\varphi(\omega_1)$, $\varphi(\omega_\mathrm{g})$, $\varphi(\omega_2)$ und $\lim_{\omega\to\infty} \varphi(\omega)$.
Hinweis: Für alle $x > 0$ gilt $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.

(b) Welche Näherung ergibt sich für $\varphi(\omega_1)$ und $\varphi(\omega_2)$ im Fall $T_1 \gg T_2$?

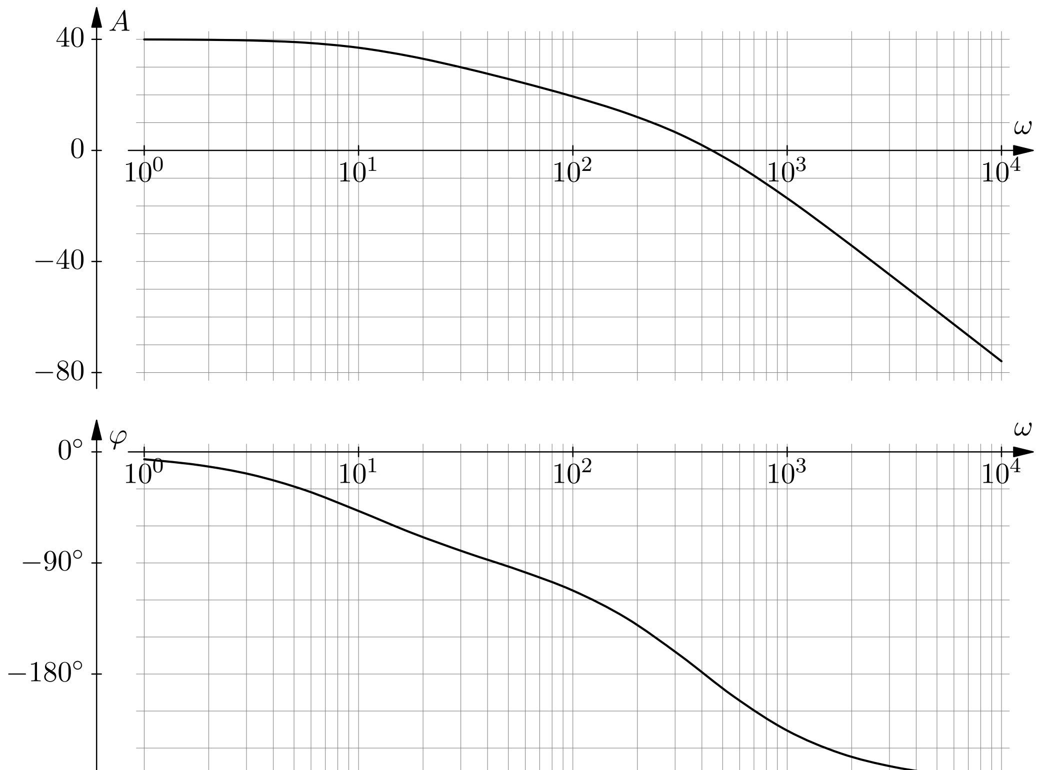
(c) Skizzieren Sie das Bode-Diagramm im Fall $T_1 = 10$ und $T_2 = 0{,}1$.

3.5 Bestimmen Sie $G(s)$ aus den gegebenen Bode-Diagrammen/Ortskurven.

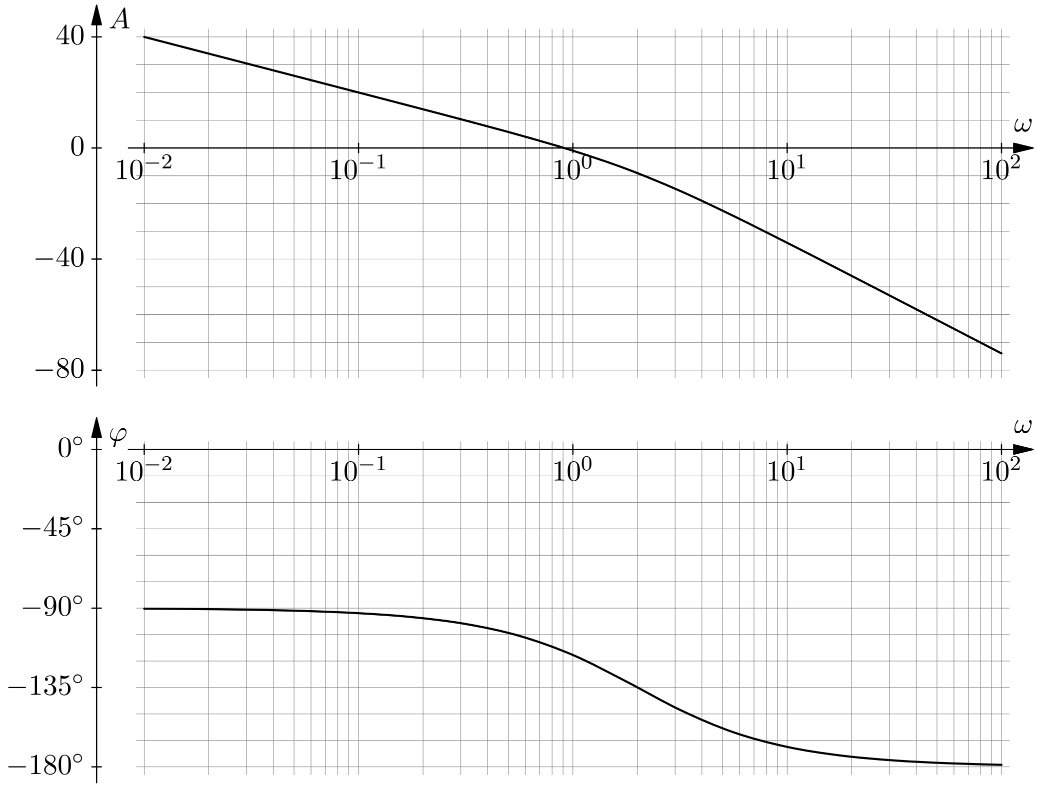
(a)



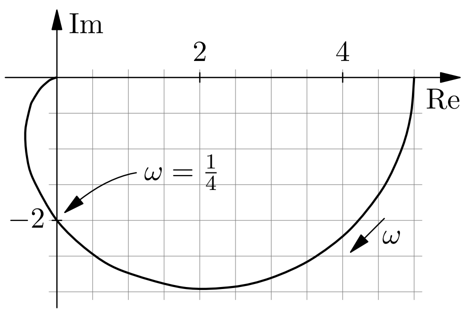
(b)



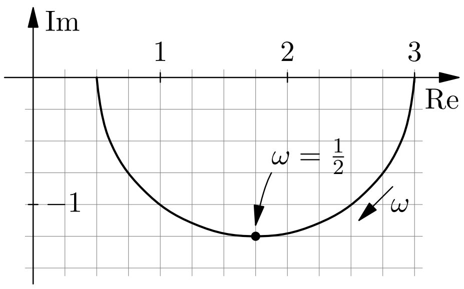
(c)



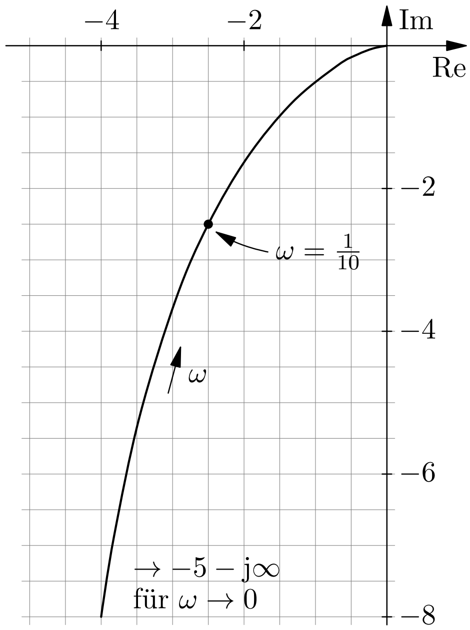
(d)



(e)



(f)



4 Zeitverhalten von Systemen

4.1 Für die folgenden Laplace-Übertragungssysteme

- berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$;
- skizzieren Sie $g(t)$;

- berechnen Sie die Sprungantwort $h(t)$;
- skizzieren Sie $h(t)$.

(a) $G(s) = \dfrac{20}{s^2 + 25}$

(b) $G(s) = \dfrac{1+s}{10s}$

(c) $G(s) = 2s$

(d) $G(s) = \dfrac{2s}{s+5}$

(e) $G(s) = -\dfrac{10}{1+4s}$

(f) $G(s) = \dfrac{7}{s}$

(g) $G(s) = 12$

(h) $G(s) = \dfrac{6}{(1+s)(s+3)}$

(i) $G(s) = \dfrac{8}{s(s+4)}$

(j) $G(s) = \dfrac{1+3s}{1+4s}$

(k) $G(s) = 4 + 3s$

(l) $G(s) = \dfrac{30}{10 + 7s + s^2}$

(m) $G(s) = \dfrac{2{,}5}{s+5}$

(n) $G(s) = \dfrac{1}{2s^2}$

(o) $G(s) = 9s^2$

(p) $G(s) = -\dfrac{1}{(2+s)^2}$

4.2 Für die folgenden Laplace-Übertragungssysteme

- zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm;
- berechnen Sie $\lim_{t\to 0} g(t)$ und $\lim_{t\to\infty} g(t)$ für die Impulsantwort $g(t)$;
- berechnen Sie $\lim_{t\to 0} h(t)$ und $\lim_{t\to\infty} h(t)$ für die Sprungantwort $h(t)$.

(a) $G(s) = \dfrac{s+8}{(3s+2)^2}$

(b) $G(s) = \dfrac{3+2s}{1+3s+3s^2+s^3}$

(c) $G(s) = \dfrac{2s^2+5s}{(s+1)(s+3)}$

(d) $G(s) = \dfrac{4s^2+1}{5+2s}$

(e) $G(s) = \dfrac{s^2+2s+17}{s^2+6s+5}$

(f) $G(s) = \dfrac{s(2s+1)}{(1+4s)(s^2+4s+5)}$

(g) $G(s) = \dfrac{(s+2-\mathrm{j})(s+2+\mathrm{j})}{3s^2+s^3}$

(h) $G(s) = \dfrac{(10s+1)^2}{3s+10s^2}$

(i) $G(s) = \dfrac{6+s}{(s^2+4s+8)s}$

(j) $G(s) = \dfrac{(s+3)(s+6s+9)}{10s+s^2}$

(k) $G(s) = \dfrac{1+s+s^2+s^3}{3s(s^2+2s)}$

(l) $G(s) = \dfrac{3+5s}{2s+7}$

4.3 Für die folgenden Übertragungssysteme zweiter Ordnung

- bestimmen Sie die Laplace-Übertragungsfunktion $G(s)$;
- berechnen Sie die Parameter D, ω_0 und K;
- zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm (mit Polstellen s_{p1} und s_{p2});
- berechnen und zeichnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ und die Sprungantwort $h(t)$;

- berechnen Sie – sofern möglich – von der Sprungantwort die Anregelzeit t_{anr}, die Ausregelzeit t_{ausr} für 2 %, die Zeit $t_{\max}$ beim ersten Maximum und die normierte Überschwingweite $\ddot{u}$.

(a) $\ddot{u} = 0{,}163$, $t_{\text{anr}} = 0{,}403$, $h(\infty) = 2$

(b) $D = 0$, $\omega_0 = \sqrt{7}$, $K = 2{,}5$

(c) $s_{\text{p}1;2} = (-1 \pm \text{j})\sqrt{2}$, $h(t_{\max}) = 6{,}26$

(d) $G(s) = \dfrac{20}{s^2 + 7s + 10}$

(e) $h(t) = 5 - 5(2t + 1)\text{e}^{-2t}$

(f) $\omega_0 = 1{,}5$, $t_{\max} = 3{,}49$, $h(\infty) = 3$

(g) $g(t) = 3{,}75\big(\text{e}^{5t} - \text{e}^{t}\big)$

(h) $D = \dfrac{5}{13}$, $t_{\text{ausr}} = 51{,}9$, $g(t_{\text{anr}}) = 0{,}529$

4.4 Für die folgenden Laplace-Übertragungssysteme

- berechnen und zeichnen Sie den Ausgang $y(t)$ zum Eingang $u(t) = T\delta(t)$ $(T > 0)$;
- berechnen und zeichnen Sie den Ausgang $y(t)$ zum Eingang $u(t) = 1$;
- berechnen und zeichnen Sie den Ausgang $y(t)$ zum Eingang $u(t) = t/T$ $(T > 0)$;
- berechnen und zeichnen Sie den Ausgang $y(t)$ zum Eingang $u(t) = \sin(\omega t)$ $(\omega > 0)$.

(a) $G(s) = K$ $(K > 0)$

(b) $G(s) = \dfrac{1}{sT_{\text{I}}}$ $(T_{\text{I}} > 0)$

(c) $G(s) = sT_{\text{D}}$ $(T_{\text{D}} > 0)$

(d) $G(s) = \dfrac{K}{1 + sT_1}$ $(K, T_1 > 0)$

4.5 Gegeben ist das folgende System zweiter Ordnung

$$G_D(s) = \frac{25}{s^2 + 10Ds + 25}$$

mit variabler Dämpfung $0 \leq D \leq 1$.

(a) Berechnen Sie die Polstellen in Abhängigkeit von D und geben Sie deren Realteil, Imaginärteil, Betrag und Winkel an.

(b) Zeichnen Sie die Polstellen für $D \in \{0,\ 3/5,\ 1/\sqrt{2},\ 4/5,\ 1\}$ in ein gemeinsames Pol-Nullstellen-Diagramm ein.

(c) Das System wird mit dem Eingang $u(t) = \sin(5t)$ angeregt. Berechnen und skizzieren Sie den Ausgang $y(t)$ jeweils für die Dämpfungen aus (b).

(d) Berechnen Sie $|G_D(5\text{j})|$ für die Dämpfungen aus (b) und vergleichen Sie diese Werte mit den Zeitfunktionen aus (c).

(e) Zeichnen Sie die Bode-Diagramme der Amplitude für die Dämpfungen aus (b).

5 Regelkreise

5.1 Eine PT_1-Strecke wird mit einem P-Regler zusammengeschaltet, d. h.

$$G_{\text{R}}(s) = K_{\text{R}}\,, \quad G_{\text{S}}(s) = \frac{K_{\text{S}}}{1 + sT_1}\,, \quad K_{\text{R}}, K_{\text{S}}, T_1 > 0\,.$$

(a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G_0(s)$ des offenen sowie die Führungsübertragungsfunktion $G_w(s)$, die Versorgungsstörübertragungsfunktion $G_{z1}(s)$ und die Laststörübertragungsfunktion $G_{z2}(s)$ des geschlossenen Regelkreises.

(b) Schreiben Sie $G_w(s)$ als PT_1-Element. Wie groß sind der Übertragungsbeiwert und die Zeitkonstante?

(c) Berechnen Sie $e(t)$, $y(t)$ und $x(t)$ für $w(t) = 1$, $z_1(t) = z_2(t) = 0$.

(d) Berechnen Sie $e(t)$, $y(t)$ und $x(t)$ für $z_1(t) = 1$, $w(t) = z_2(t) = 0$.

(e) Berechnen Sie $e(t)$, $y(t)$ und $x(t)$ für $z_2(t) = 1$, $w(t) = z_1(t) = 0$.

(f) Berechnen Sie $e(t)$, $y(t)$ und $x(t)$ für $w(t) = z_1(t) = z_2(t) = 1$.

5.2 Eine PT_2-Strecke wird mit einem P-Regler zusammengeschaltet, d. h.

$$G_{\mathrm{R}}(s) = K_{\mathrm{R}}\,, \quad G_{\mathrm{S}}(s) = \frac{4}{(1+5s)(1+s)}\,, \quad K_{\mathrm{R}} > 0\,.$$

(a) Wie groß ist die Dämpfung der Strecke?

(b) Wie groß darf K_{R} gewählt werden, damit die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises gerade nicht überschwingt?

(c) Wie groß ist die stationäre Regelabweichung im Fall (b)?

(d) Wie groß muss K_{R} gewählt werden, damit die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises um 29 % überschwingt?

(e) Wie groß ist die stationäre Regelabweichung im Fall (d)?

(f) Wie groß muss K_{R} gewählt werden, damit die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises eine stationäre Regelabweichung von nur 1 % aufweist?

(g) Wie groß ist das Überschwingen im Fall (f)?

5.3 Eine PT_1-Strecke wird mit einem I-Regler zusammengeschaltet, d. h.

$$G_{\mathrm{R}}(s) = \frac{1}{sT_{\mathrm{I}}}\,, \quad G_{\mathrm{S}}(s) = \frac{5}{1+3s}\,, \quad T_{\mathrm{I}} > 0\,.$$

(a) Berechnen Sie die stationäre Regelabweichung der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

(b) Wie groß muss T_{I} gewählt werden, damit die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises ein Überschwingen von höchstens 8,4 % aufweist?

(c) Wie groß ist die Anregelzeit der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises für $T_{\mathrm{I}} = 9{,}1$?

(d) Für den geschlossenen Regelkreis seien $T_{\mathrm{I}} = 10$ und $W(s) = 4/s$. Zur Zeit $t = 5$ wird dem System ein Führungsstörimpuls der Höhe 1/2 zugeführt. Berechnen Sie die Antwort im Zeitbereich.

5.4 Eine PT_2-Strecke wird mit einem I-Regler zusammengeschaltet, d. h.

$$G_{\mathrm{R}}(s) = \frac{1}{sT_{\mathrm{I}}}\,, \quad G_{\mathrm{S}}(s) = \frac{12}{(1+10s)(1+0{,}1s)}\,, \quad T_{\mathrm{I}} > 0\,.$$

(a) Berechnen Sie die stationäre Regelabweichung der Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises.

(b) Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises für $T_{\mathrm{I}} = 5/119$.

Hinweis: Betrachten Sie den Nenner von $G_w(s)$ für $s = -12$.

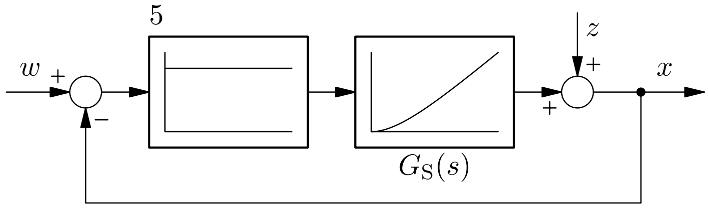
(c) Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises für $T_{\mathrm{I}} = 120/101$.

Hinweis: Betrachten Sie den Nenner von $G_w(s)$ für $s = \mathrm{j}$.

(d) Sei $x(t)$ die Sprungantwort. Für welche Werte von T_{I} gilt $x(\infty) = 1$? Für welche Werte von T_{I} wird x unbeschränkt?

5.5 Berechnen und skizzieren Sie jeweils die Regelgröße $x(t)$.

(a)

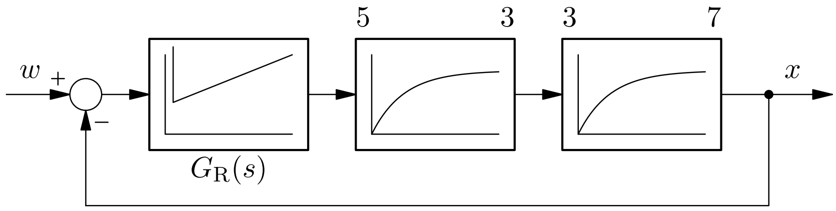


$$G_{\mathrm{S}}(s) = \frac{1}{s(2+s)}$$

$$w(t) = 4$$

$$z(t) = \mathrm{e}^{-2(t-1)}\sigma(t-1)$$

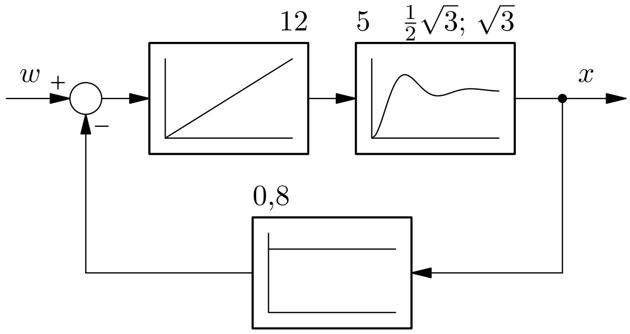
(b)



$$G_{\mathrm{R}}(s) = 4 + \frac{1}{2{,}5s} + 8{,}4s$$

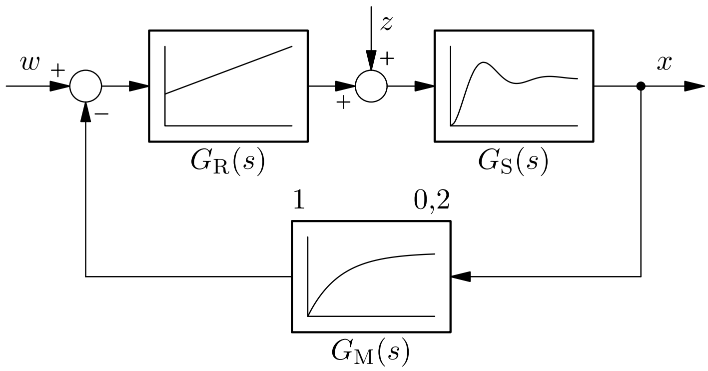
$$w(t) = t$$

(c)



$$w(t) = \min\{t, 4\}$$

(d)



$$G_{\mathrm{R}}(s) = 0{,}36\,\frac{1+3s}{3s}$$

$$G_{\mathrm{S}}(s) = \frac{20}{(1+3s)(4+s)}$$

$$w(t) = 1$$

$$z(t) = \delta(t-3)$$

Hinweis: Verifizieren Sie zunächst, dass

$$1 + G_{\mathrm{R}}(s)G_{\mathrm{S}}(s)G_{\mathrm{M}}(s) = \frac{(s+1)(s+2)(s+6)}{s(s+4)(s+5)}\,.$$

5.6 Gegeben sind eine Strecke und drei Regler

$$G_{\mathrm{S}}(s) = \frac{1}{2+s}\,, \quad G_{\mathrm{R1}}(s) = 4\,, \quad G_{\mathrm{R2}}(s) = \frac{5}{s}\,, \quad G_{\mathrm{R3}}(s) = \frac{3}{2}s\,.$$

(a) Benennen Sie die Typen der vier Elemente.

(b) Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktionen der drei geschlossenen Regelkreise.

(c) Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantworten der drei geschlossenen Regelkreise.

(d) Beurteilen Sie die drei Reglertypen bezüglich der Ausregelzeit, des Überschwingens, der stationären Regeldifferenz und der prinzipiellen Verwendbarkeit.

6 Stabilität

6.1 Für die Strecken mit den Bode-Diagrammen auf den Seiten 14–17

- bestimmen Sie, sofern existent, die beiden Kreisfrequenzen ω_{D} und ω_{π};
- bestimmen Sie, sofern existent, die beiden Reserven A_{Res} und Φ_{Res};
- entscheiden Sie, ob sie stabil, grenzstabil oder instabil sind.

6.2 Für die Strecken mit den Bode-Diagrammen auf den Seiten 14–17

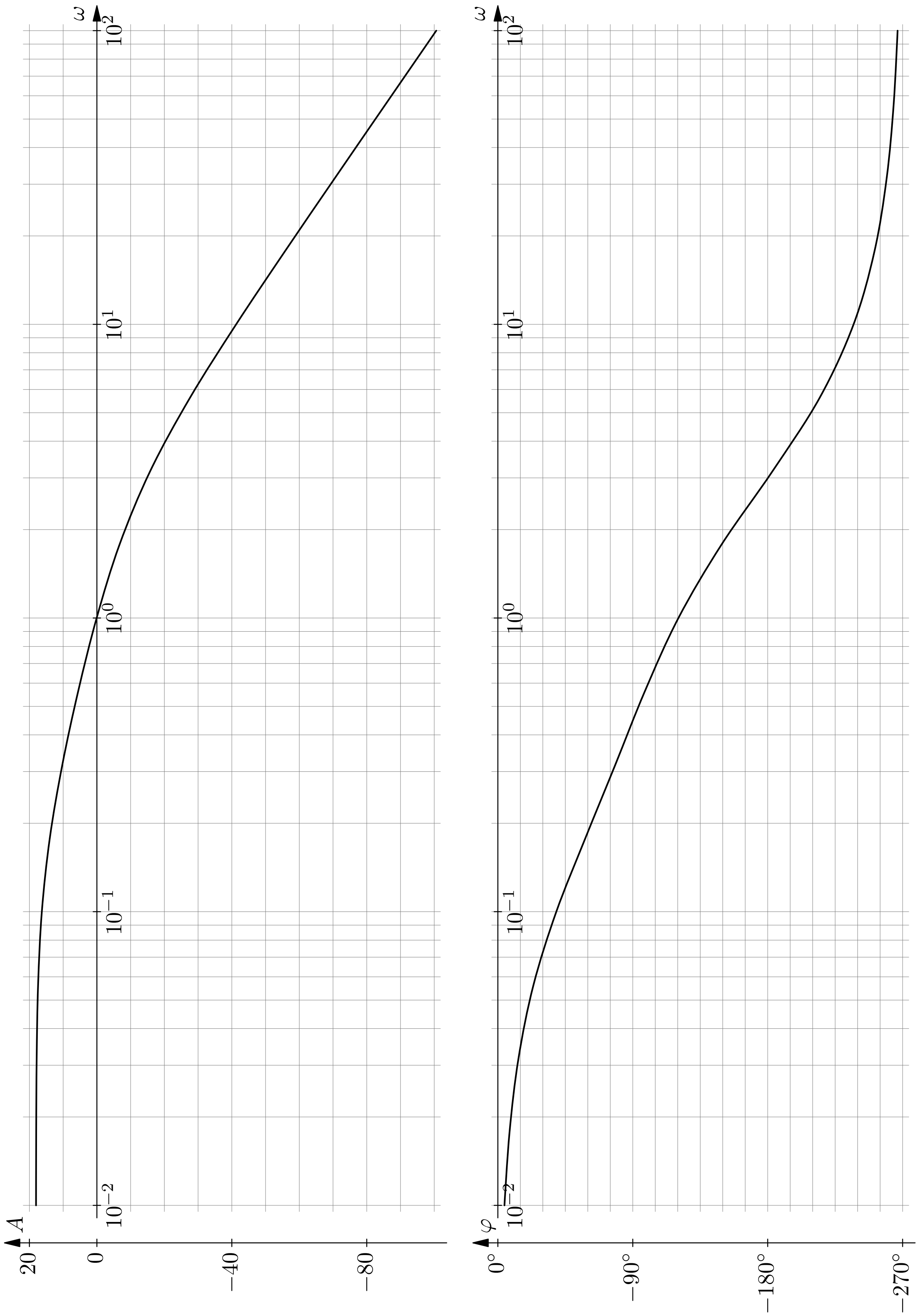
- legen Sie, sofern möglich, einen P-Regler so aus, dass sich eine Phasenreserve von 90° bzw. 60° bzw. 30° einstellt;
- legen Sie, sofern möglich, einen P-Regler so aus, dass sich eine Amplitudenreserve von 10 dB bzw. 15 dB bzw. 20 dB einstellt;
- legen Sie, sofern möglich, einen P-Regler so aus, dass das System grenzstabil wird;
- legen Sie, sofern möglich, einen I-Regler so aus, dass sich eine Phasenreserve von 90° bzw. 60° bzw. 30° einstellt;
- legen Sie, sofern möglich, einen I-Regler so aus, dass sich eine Amplitudenreserve von 10 dB bzw. 15 dB bzw. 20 dB einstellt;
- legen Sie, sofern möglich, einen I-Regler so aus, dass das System grenzstabil wird.

6.3 Für die Strecken mit den Bode-Diagrammen auf den Seiten 14–17

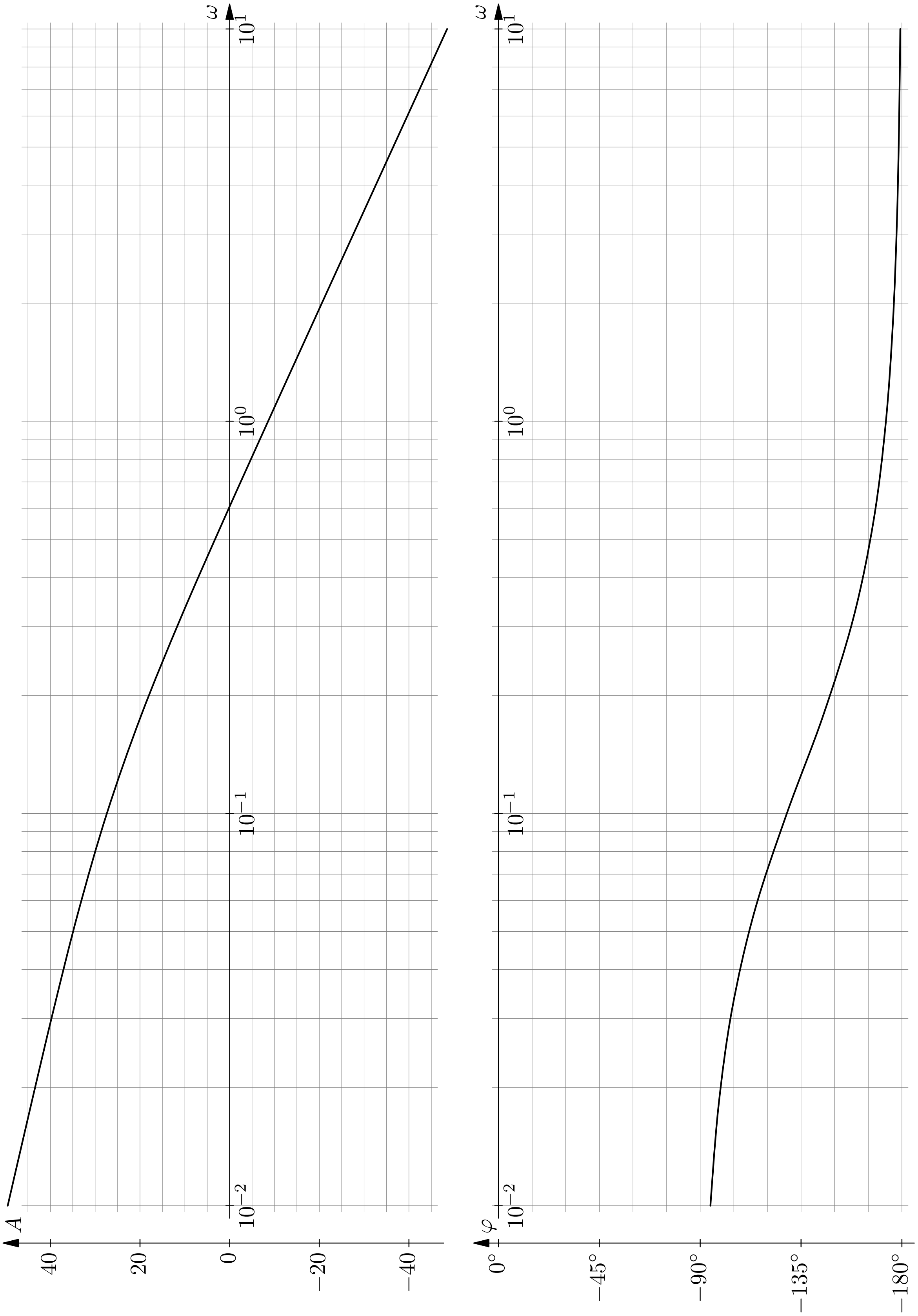
- zeichnen Sie die Ortskurven (im zweiten und dritten Quadranten möglichst maßstabsgetreu);
- zeichnen Sie in dasselbe Diagramm den Einheitskreis und die in Aufgabe 6.1 ermittelte Phasenreserve ein;

  Hinweis: Die Phasenreserven sind $\Phi_{\mathrm{Res,a}} = 60°$, $\Phi_{\mathrm{Res,b}} = 12°$, $\Phi_{\mathrm{Res,c}} = -30°$ und $\Phi_{\mathrm{Res,d}} = 0°$.
- zeichnen Sie in dasselbe Diagramm die Ortskurve des offenen Regelkreises ein, wenn Sie als Regler den grenzstabilen P-Regler aus Aufgabe 6.2 verwenden.

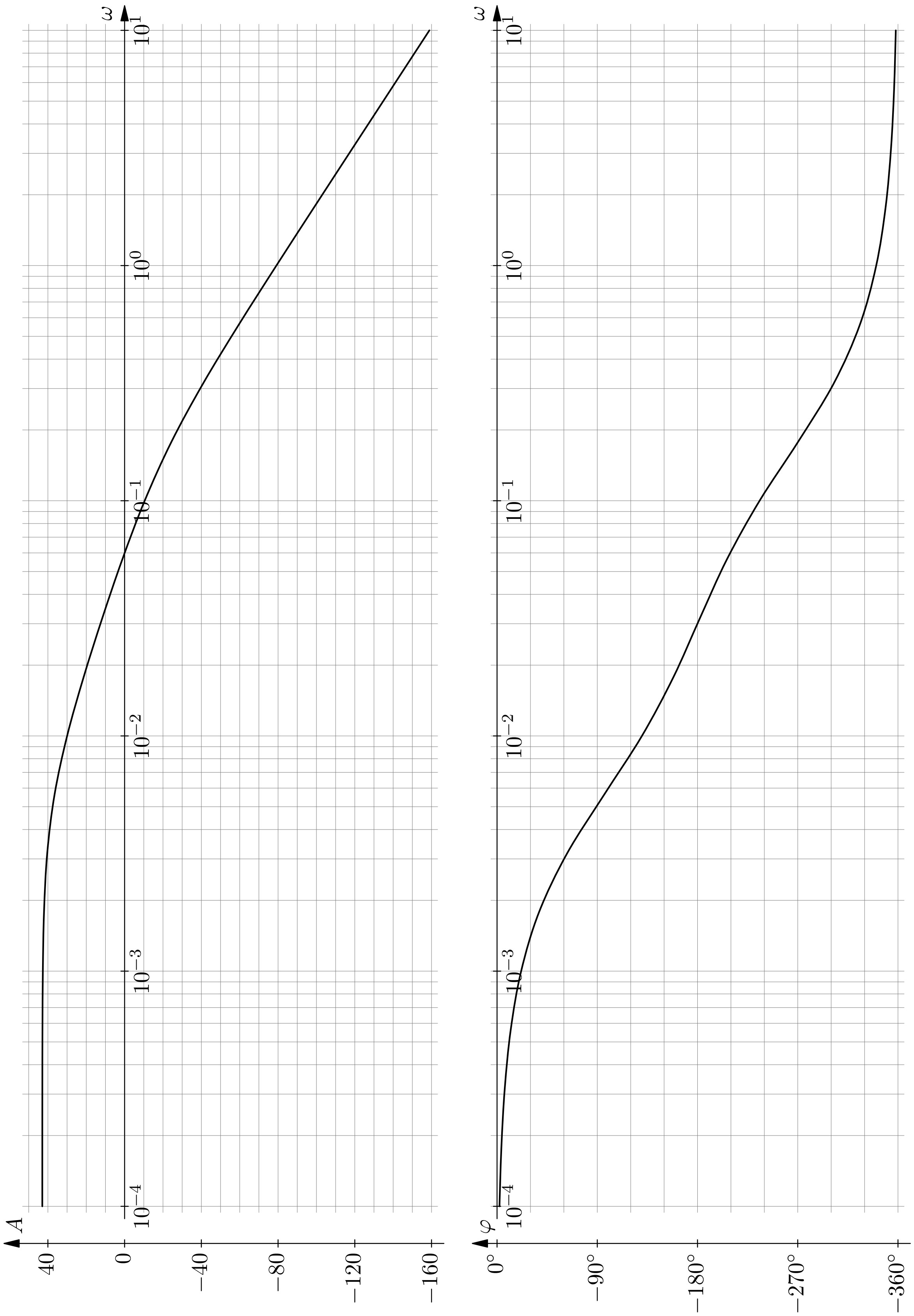
  Hinweis: Die Verstärkungsfaktoren sind $K_{\mathrm{P,a}} = 5{,}5$, $K_{\mathrm{P,b}} \to \infty$, $K_{\mathrm{P,c}} = 0{,}23$ und $K_{\mathrm{P,d}} = 1$.



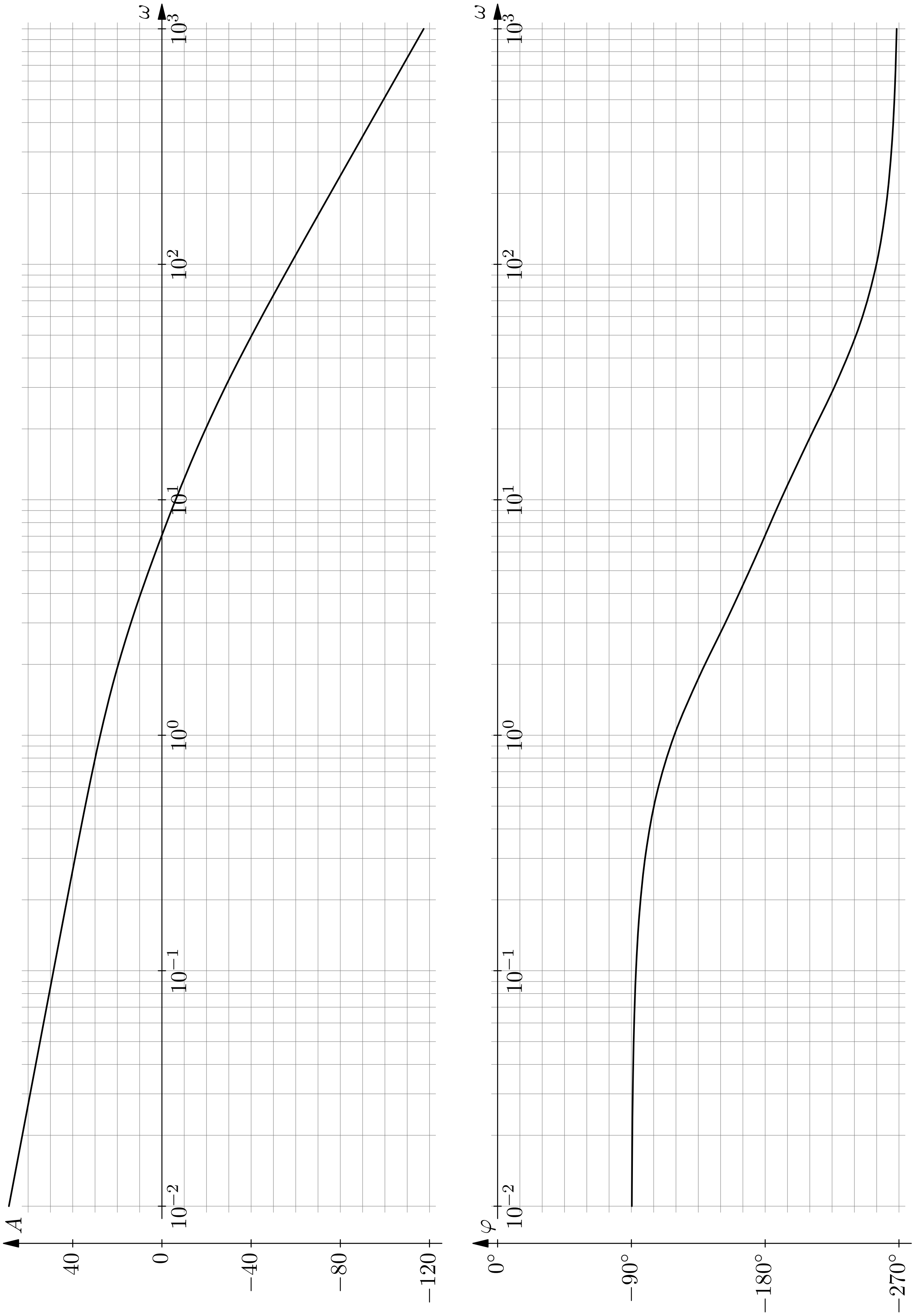
Bode-Diagramm der Strecke (a) zu Kapitel 6



Bode-Diagramm der Strecke (b) zu Kapitel 6



Bode-Diagramm der Strecke (c) zu Kapitel 6



Bode-Diagramm der Strecke (d) zu Kapitel 6

6.4 Für die folgenden Regelkreise

- berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises;
- bestimmen Sie das charakteristische Polynom;
- berechnen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium, für welche Parameterwerte der Strecke bzw. des Reglers der geschlossene Regelkreis stabil ist.

(a) $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{1}{s^3 + 8s^2 + 3s + 1}\,, \quad G_\mathrm{R}(s) = K_\mathrm{R}\,, \quad K_\mathrm{R} > 0$

(b) $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{3}{s^2 + 3s + 1}\,, \quad G_\mathrm{R}(s) = K_\mathrm{R}\dfrac{1 + sT_\mathrm{N}}{sT_\mathrm{N}}\,, \quad K_\mathrm{R}, T_\mathrm{N} > 0$

(c) $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}\,, \quad G_\mathrm{R}(s) = \dfrac{1 + 4s}{2s}\,, \quad \omega_0 > 0\,, \quad 0 < D < 1$

(d) $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{4}{(1 + sT_1)^3}\,, \quad G_\mathrm{R}(s) = \dfrac{1}{sT_\mathrm{I}}\,, \quad T_1, T_\mathrm{I} > 0$

6.5 (a) Zeigen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium, dass ein geschlossener Regelkreis aus einem P-Regler und einer PT_2-Strecke (für $D, \omega_0 > 0$) niemals instabil werden kann.

(b) Zeigen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium, dass ein geschlossener Regelkreis aus einem I-Regler und einer IT_2-Strecke immer instabil ist.

(c) Bestimmen Sie mit dem Hurwitz-Kriterium die Zeitkonstante eines I-Reglers so, dass der geschlossene Regelkreis aus diesem Regler und einer PT_2-Strecke (für $D, \omega_0 > 0$) grenzstabil wird.

6.6 Gegeben ist ein P-Regler mit einer PT_3-Strecke

$$G_\mathrm{R}(s) = K\,, \quad G_\mathrm{S}(s) = \frac{1}{(1 + sT)^3}\,, \quad K, T > 0\,.$$

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des vereinfachten Nyquist-Kriteriums, für welchen Wert von K der geschlossene Regelkreis grenzstabil wird.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Hurwitz-Kriteriums, für welchen Wert von K der geschlossene Regelkreis grenzstabil wird.

(c) Zeichnen Sie das Pol-Nullstellen-Diagramm des grenzstabil ausgelegten geschlossenen Regelkreises.

Hinweis: Was wissen Sie über die Lage der Polstellen eines grenzstabilen Systems? Machen Sie einen geeigneten Ansatz für eine Polstelle, um den Nenner von $G_w(s)$ faktorisieren zu können.

(d) Berechnen Sie die Sprungantwort zu (c).

7 Reglerauslegungen

7.1 Die additive und multiplikative Form der Laplace-Übertragungsfunktionen eines PI-, PD- und PID-Reglers lauten

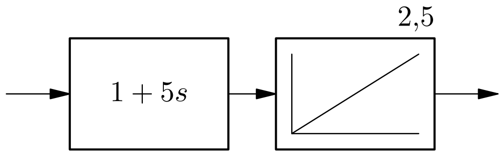
$$G_\mathrm{PI}(s) = K_\mathrm{P} + \frac{1}{sT_\mathrm{I}} = \frac{K_\mathrm{R}(1 + sT_\mathrm{N})}{sT_\mathrm{N}}\,, \quad G_\mathrm{PD}(s) = K_\mathrm{P} + sT_\mathrm{D} = K_\mathrm{R}(1 + sT_\mathrm{V})\,,$$

$$G_\mathrm{PID}(s) = K_\mathrm{P} + \frac{1}{sT_\mathrm{I}} + sT_\mathrm{D} = \frac{K_\mathrm{R}(1 + sT_\mathrm{N})(1 + sT_\mathrm{V})}{sT_\mathrm{N}}$$

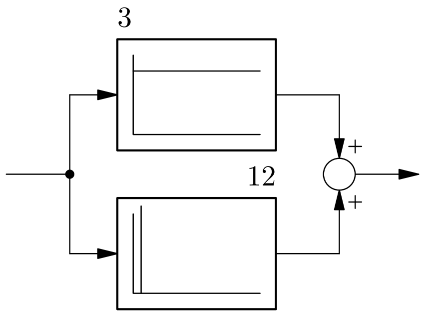
mit $K_\mathrm{P}, K_\mathrm{R}, T_\mathrm{I}, T_\mathrm{D} > 0$ und $T_\mathrm{N} \geq T_\mathrm{V} > 0$. Von den folgenden Reglern

- bestimmen Sie, um welchen Typ es sich handelt;
- geben Sie die Übertragungsfunktion in additiver und multiplikativer Form an;
- zeichnen Sie das Blockschaltbild der additiven und multiplikativen Form.

(a)



(b)

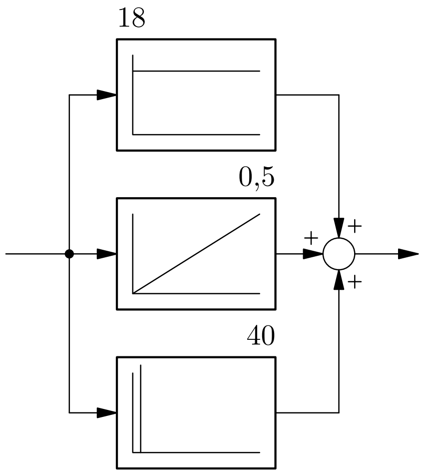


(c) $G(s) = 6 + \dfrac{1}{3s}$

(d) $G(s) = 100(1+2s)$

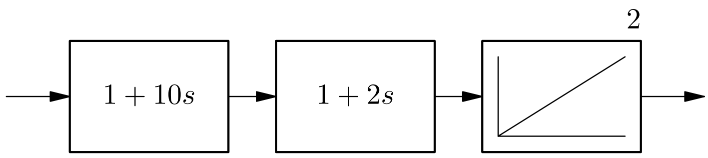
(e) $G(s) = \dfrac{(1+7s)(1+8s)}{2s}$

(f)

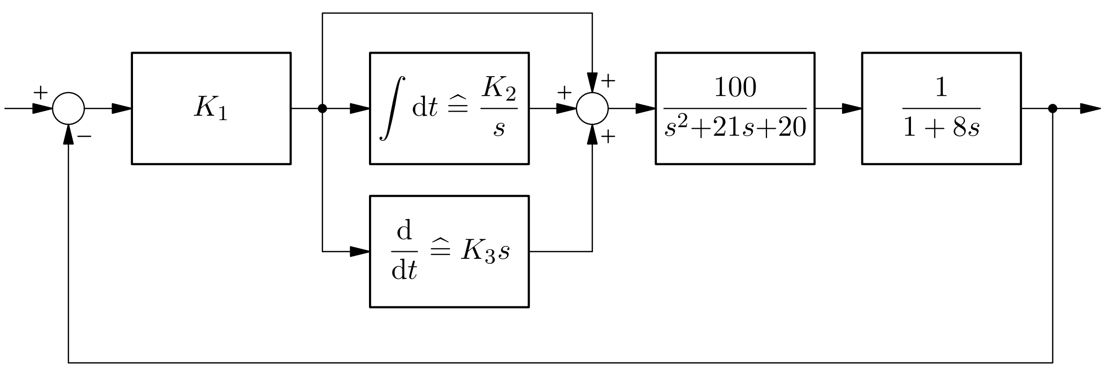


(g) $G(s) = \dfrac{1}{s} + 18s + 9$

(h)



7.2 Bestimmen Sie die Parameter K_1, K_2 und K_3 derart, dass als Regler ein Kompensationsregler und als geschlossener Regelkreis ein System zweiter Ordnung mit Dämpfung $1/\sqrt{2}$ entstehen.



7.3 Für die folgenden Regler-Strecke-Kombinationen

- legen Sie den Regler nach dem Betragsoptimum aus;
- skizzieren Sie das Bode-Diagramm von $G_0(s) = G_\mathrm{R}(s)G_\mathrm{SE}(s)$, wobei $G_\mathrm{SE}(s)$ die Ersatz-Strecke ist, die zur Auslegung des Reglers benutzt wurde;
- berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort des geschlossenen Regelkreises (mit der Ersatz-Strecke).

(a) I-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{20}{1+4s}$

(b) I-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{5}{(1+10s)(1+s)}$

(c) PI-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{5}{(1+10s)(1+s)}$

(d) PI-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{15}{(1+s)(10+s)(1+20s)}$

(e) PID-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{15}{(1+s)(10+s)(1+20s)}$

(f) PID-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{3}{(1+0{,}2s)^2(1+10s)(1+5s)}$

7.4 Für die folgenden Regler-Strecke-Kombinationen

- legen Sie den Regler nach dem symmetrischen Optimum für $a = 2$ aus;
- skizzieren Sie das Bode-Diagramm von $G_0(s) = G_\mathrm{R}(s)G_\mathrm{SE}(s)$, wobei $G_\mathrm{SE}(s)$ die Ersatz-Strecke ist, die zur Auslegung des Reglers benutzt wurde;
- dimensionieren Sie einen Vorfilter für den geschlossenen Regelkreis.

(a) PI-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{5}{s(1+s)}$

(b) PI-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{15}{s(1+s)(1+20s)}$

(c) PID-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{15}{s(1+s)(1+20s)}$

(d) PID-Regler für $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{3}{s(1+5s)(1+0{,}2s)^2}$

7.5 Ein $\mathrm{PDT_1}$-Regler hat die Laplace-Übertragungsfunktion

$$G_\mathrm{R}(s) = K\,\frac{1+sT_\mathrm{V}}{1+sT_1}\,, \quad K > 0\,, \quad T_\mathrm{V} > T_1 > 0\,.$$

Der offene Regelkreis bestehend aus einem solchen Regler und einer allgemeinen, aber bekannten Strecke $G_\mathrm{S}(s)$ soll eine vorgegebene Durchtrittskreisfrequenz ω_D mit einer vorgegebenen Phasenreserve $\varPhi_\mathrm{Res}$ haben.

(a) Die Phase $\varphi_\mathrm{R}(\omega)$ des Reglers hat ein Maximum φ_max bei der Kreisfrequenz ω_0. Leiten Sie die Formeln

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_\mathrm{V} T_1}}\,, \quad \varphi_\mathrm{max} = \arctan \frac{T_\mathrm{V} - T_1}{2\sqrt{T_\mathrm{V} T_1}}$$

her.

Hinweis: Benutzen Sie die Identität

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy} \quad \forall\, x, y > 0\,.$$

(b) Stellen Sie die Gleichungen für ω_0 und φ_max aus (a) nach T_V und T_1 um. Dabei ergeben sich die Formeln

$$T_\mathrm{V} = \frac{1 + \sin \varphi_\mathrm{max}}{\omega_0 \cos \varphi_\mathrm{max}}\,, \quad T_1 = \frac{1 - \sin \varphi_\mathrm{max}}{\omega_0 \cos \varphi_\mathrm{max}}\,.$$

(c) Der Regler soll so ausgelegt werden, dass $\omega_0 = \omega_\mathrm{D}$ gilt. Zeigen Sie, dass sich in Abhängigkeit der vorgegebenen Phasenreserve die Forderung

$$\varphi_\mathrm{max} = -180^\circ + \varPhi_\mathrm{Res} - \varphi_\mathrm{S}(\omega_\mathrm{D})$$

ergibt. Darin ist $\varphi_\mathrm{S}(\omega)$ die Phase der Strecke.

(d) Schließlich muss noch der Übertragungsbeiwert K des Reglers so eingestellt werden, dass sich die Durchtrittskreisfrequenz des Regelkreises tatsächlich zu ω_D ergibt. Leiten Sie dafür die Formel

$$K = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_\mathrm{max}}{1 + \sin \varphi_\mathrm{max}}} \cdot \frac{1}{|G_\mathrm{S}(\mathrm{j}\omega_\mathrm{D})|}$$

her.

Hinweis: Gehen Sie von der Forderung $|G_\mathrm{R}(\mathrm{j}\omega_\mathrm{D}) G_\mathrm{S}(\mathrm{j}\omega_\mathrm{D})| = 1$ aus.

7.6 Für die folgenden Strecken samt Regelkreisdaten

- legen Sie einen PDT_1-Regler derart aus, dass sich die angegebene Durchtrittskreisfrequenz und Phasenreserve für den offenen Regelkreis einstellt (Formeln (c), (b) und (d) der letzten Aufgabe);
- skizzieren Sie die Bode-Diagramme von $G_\mathrm{R}(s)$, $G_\mathrm{S}(s)$ und $G_0(s)$.

(a) $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{2}{(1 + 10s)(1 + 3s)(1 + s)}$, $\omega_\mathrm{D} = 0{,}8$, $\varPhi_\mathrm{Res} = 30^\circ$

(b) $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{2}{(1 + 10s)(1 + 3s)(1 + s)}$, $\omega_\mathrm{D} = 0{,}3$, $\varPhi_\mathrm{Res} = 60^\circ$

(c) $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{8}{s(1 + 5s)(1 + 2s)}$, $\omega_\mathrm{D} = 0{,}8$, $\varPhi_\mathrm{Res} = 30^\circ$

(d) $G_\mathrm{S}(s) = \dfrac{8}{s(1 + 5s)(1 + 2s)}$, $\omega_\mathrm{D} = 0{,}3$, $\varPhi_\mathrm{Res} = 60^\circ$