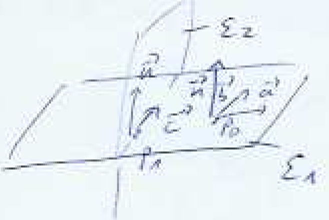
Lösungen zur Probeklausur Mathe 1 ASW

1 a) ε_2 : Aufpunkt: $P_2 = P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{n} = \vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$



D.h. $\varepsilon_2 = \left\{ P \mid P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

b) Wir bestimmen den Normalenvektor von ε_2:

$$\vec{n_2} = \vec{n} \otimes \vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und es ist $\overrightarrow{OP_2} \cdot \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = 36$

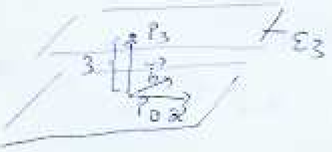
Die nichtparametrische Form von ε_2 lautet also:

$$\vec{n_2} \cdot \overrightarrow{P_2P} = 0 \Leftrightarrow -9x + 9z = -36$$

D.h., die Ebenengleichung lautet in nichtparametrischer Form:

$x - z = 4$, $x,y \in \mathbb{R}$ beliebig

c)



Aufpunkt der Ebene: $P_3 = P_0 + 3 \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2 - 4/\sqrt{2} \\ 1 + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren: $\vec{a}, \vec{b}$

D.h. die Ebene lautet:

$$\varepsilon_3 = \{ P \mid P = P_3 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

zu 2)

a) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \iff \lambda = -43/31$

b) $\vec{d} = \vec{b} \otimes \vec{c} = \begin{pmatrix} -51 \\ -31 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $|[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]| = |(\vec{b} \otimes \vec{c}, \vec{b} \otimes \vec{c})|$
$= |\vec{b} \otimes \vec{c}|^2 = 3566$

zu 3) Wir diagonalisieren die Matrix

$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$ und erhalten (nach Vertauschung der 1. und 3. Zeile): (Gaus'scher Alg.)

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a & -a \end{array}\right) = (A^* \vdots \vec{b}^*)$

Daraus folgt:

a) <u>eindeutig lösbar</u> $\iff rg(A) = 3 \iff a-1 \neq 0 \wedge 2-a^2-a \neq 0$
$\iff a \neq 1 \wedge a \neq -2$

Zu c)

<u>Für a = 1</u> ist $rg(A) = 1$ und $rg(A \vdots \vec{b}) = 3$

bzw. die obige Matrix hat die Gestalt:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

Das GS ist somit für $a = 1$ <u>nicht lösbar</u>

Für a = -2 ist ebenfalls $rg(A) \neq rg(A \vdots \vec{b})$.
D.h., das GS ist für a= -2 ebenfalls nicht lösbar!

Zu b) Die Mehrdeutige Lösbarkeit kommt nicht vor!

d) Lösungsmenge für den Fall a):

Wir bestimmen die Lösungen des GS mittels Cramerscher Regel:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{a(a-1)}{(a-1)^2(a+2)} = \underline{\underline{\frac{a}{(a-1)(a+2)}}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{2(1-a)}{(a-1)^2(a+2)} = \underline{\underline{-\frac{2}{(a-1)(a+2)}}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{a(a-1)}{(a-1)^2(a+2)} = \underline{\underline{\frac{a}{(a-1)(a+2)}}}$$

zu 4) Durch 4 Messpunkte verläuft genau ein Polynom 3. Grades

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Die 4 Messdatenpaare müssen also folgendes GS erfüllen: $y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3$ für $i = 1, \dots, 4$

d.h.:
$$-1 = a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3$$
$$0 = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3$$
$$2 = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3$$
$$1 = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3$$

bzw. in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Aus diesem GS bestimmen wir mittels GA (oder Cramerscher Regel) die unbekannten Koeffizienten a_0 bis a_3 des Polynoms. Wir erhalten:

$$a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{13}{6}, \quad a_0 = 0$$

Das Polynom lautet also:

$$\underline{y = \frac{13}{6} x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3}$$

zu 5) a), b) Wir bestimmen den Rang mittels Gaußschem Algorithmus:

$$A \xrightarrow[\text{Vertauschung 4 u. 1 Zeile}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Z3-2Z1 \\ Z4-4Z1 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ Z4+2Z2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ Z4-10Z3 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow rg(A) = \underline{\underline{4}}, \quad \det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) = \underline{\underline{-3}}$$

zu 6) Wir untersuchen das Spatprodukt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Es gilt $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det(\vec{v_1}, 2\vec{v_1} + \vec{v_2}, \vec{v_1} + 2\vec{v_3})$

$$= \det(\vec{v_1}, 2\vec{v_1}, \vec{v_1}) + \det(\vec{v_1}, 2\vec{v_1}, 2\vec{v_3})$$
$$+ \det(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_1}) + \det(\vec{v_1}, \vec{v_2}, 2\vec{v_3})$$
$$= 2\det(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Die 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen nicht in einer Ebene!

zu 7) $$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}$$

zu 8) a) Wir bestimmen den Rang von $(\vec{b_1}\ \vec{b_2}\ \vec{b_3})$:
(Gaußsche Alg.)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ z2-z1 \\ z3+z1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ z3-z2 \end{matrix}$$

$\rightarrow rg(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}) = 2$

$\rightarrow \vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$ sind nicht linear unabhängig.

b) Wir lösen das GS

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

nach $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf (mittels GA).

Wir erhalten: $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 16$, $\lambda_3 = -14$

zu 9) Wir untersuchen den Rang

$$rg\begin{pmatrix} \vec{a_1}^T \\ \vec{a_2}^T \\ \vec{a_3}^T \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & 5 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

mittels GA erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & 5 & 10 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ z2+3z1 \\ z3+7z1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 10 \\ 0 & 12 & 24 & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ z3-3z2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2 \Rightarrow \text{die 3 Vektoren}$$

sind <u>nicht</u> linear unabhängig.

zu 10)

Beweis: Vollständige Induktion:

IA: $n = 1$

LS: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1$, RS $= 1^4 = 1$

$\Rightarrow$ LS $\le$ RS qed.

IS: Vor: $\sum_{i=1}^{n} i^3 \le n^4$

Bh: $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 \le (n+1)^4$

Bew: $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \underset{\text{Vor.}}{\le} \overset{\le n \cdot n^3}{n^4} + (n+1)^3$

$\le n(n+1)^3 + (n+1)^3$

$= (n+1)^3 (n+1)$

$= (n+1)^4$ qed.

zu 11) $2x - 9 \le \sqrt{x^2 + 21}$ | quadrieren

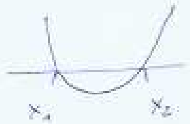
$\Rightarrow (2x-9)^2 \le x^2 + 21$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 36x + 81 \le x^2 + 21$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 60 \le 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 \le 0$

$\Leftrightarrow 2 \le x \le 10$



$\Rightarrow$ D.h. diese Ungleichung ist für alle $x \in [2, 10]$ erfüllt.

Weiterhin ist die Ungleichung aber auch für alle x mit $2x - 9 \le 0$ erfüllt, d.h. $\forall x \le \frac{9}{2} = 4{,}5$

$\Rightarrow \mathbb{L} = [2, 10] \cup (-\infty, 4{,}5] = (-\infty, 10]$

zu 12) $\lg(2x-3) - \lg(3x+4) = -1 \Leftrightarrow \lg\left(\frac{2x-3}{3x+4}\right) = -1 \mid 10^{\cdot}$

$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{3x+4} = 0{,}1 \Leftrightarrow x = 2$