Mathematik 1

Dauer : 120 Minuten Prof. Dr. B. Grabowski

Verwendbar: 2 DIN A 4-Blätter (beliebig beschrieben) + n.p. TR.

Name:

Matr. Nr:

Erreichte Punktzahl:

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

Zu jedem der Komplexe I – V gibt es zwei bis drei Aufgaben. Die Aufgaben sind pro Komplex der Schwierigkeit nach angeordnet, d.h. wenn Sie die jeweils erst genannten Aufgaben lösen, können Sie 100 Punkte erreichen. Die Alternativaufgaben sind manchmal leichter und haben deshalb in der Regel weniger Punkte als die erste.

Lösen Sie zu jedem Komplex I – V jeweils nur die angegebene Anzahl von Aufgaben (Ihrer Wahl). Wenn Sie mehr Aufgaben lösen, so wird nur die mit der erreichten höheren Punktzahl in die Bewertung einbezogen!

Februar 2013
Viel Erfolg
B.Grabowski

I. *Geometrie von Geraden und Ebenen (1 von 2)*

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Seien eine Ebene E durch die Gleichung 2x+2y+z = 3 und eine Gerade g mit dem Aufpunkt $P_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

und dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Geben Sie E in nichtparametrischer Form an!
b) Welche Lage hat g zu E?
c) Geben Sie eine Ebene E1 in Parameterform an, die senkrecht auf E steht!

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Wir betrachten zwei Ebenen E1 und E2:
E_1 mit dem Normalenvektor $\vec{n}_1$ und dem Aufpunkt P1
E_2 mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2$ und dem Aufpunkt P2

und zwei Geraden g1 un g2:
g1 mit dem Richtungsvektor $\vec{a}_1$ und dem Aufpunkt Q1
g2 mit dem Richtungsvektor $\vec{a}_2$ und dem Aufpunkt Q2

Geben Sie ***nur unter Verwendung von Skalar-, Kreuz-, und Spatprodukt*** Kriterien an, die die auf der rechten Seite der Tabelle beschriebenen Lagen der Ebenen und Geraden charakterisieren, d.h. ergänzen Sie die folgende Tabelle!!

Lage	Bedingung
E1 = E2	
	$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \neq 0$
g1 windschief zu g2	

II. Vektorrechnung (1 von 3)

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Geben Sie 2 weitere Vektoren an, die zusammen mit $\vec{a}$ ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 8 bilden!

Aufgabe 4 (15 Punkte)

a) Liegen $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ in einer Ebene?

b) Wie groß ist das Volumen des durch $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spats?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt des durch $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{b}-\vec{c}$ aufgespannten Dreiecks?

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$!

III. Lineare Unabhängigkeit, Vektorräume ***(1 von 3)***

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Welche Dimension besitzt der folgende Vektorraum :

$$V=\left\{\vec{v}\mid \vec{v}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\-4\\-4\\-8\end{pmatrix},\quad \lambda,\mu,\gamma\in R\right\}$$?

b) Geben Sie eine Basis in V an!

Aufgabe 7 (20 Punkte)

a) Geben Sie 3 Vektoren im R^4 an, die linear unabhängig sind!

b) Geben Sie 3 Vektoren im R^4 an, die linear abhängig sind!

c) Geben Sie ein Erzeugendensystem in R^4 an, welches keine Basis im R^4 ist!

d) Ist $M=\left\{\vec{v}\in R^4 \mid \vec{v}=\begin{pmatrix}s\\0\\t+1\\-t\end{pmatrix}, s\in R, t\in R\right\}$ ein Vektorraum, ein affiner Raum oder weder noch?

Geben Sie im Falle eines Vektorraumes die Dimension und eine Basis von M an!
Geben Sie im Falle eines affinen Raumes den Aufpunkt und die Dimension und die Basis des zu M gehörenden Vektorraumes an!
Begründen Sie Ihre Antwort, wenn es sich weder um einen Vektor- noch um einen affinen Raum handelt!

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Berechnen Sie den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 11 & -3 & 2 & 12 \\ -5 & 2 & 5 & -12 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

IV. Matrizen, Lineare Gleichungssysteme (1 von 3)

Aufgabe 9 (20 Punkte)

Gegeben sind folgende 3 Punkte im R^2: P1= (-1,1), P2 = (1,0), P3 = (2,1)

a) Geben Sie dasjenige Polynom 2. Grades an, welches durch diese 3 Punkte verläuft!

b) Skizzieren Sie dieses Polynom, indem Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt einzeichnen!

Aufgabe 10 (20 Punkte)

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a ϵ R die Lösungen x_1, x_2 und x_3 des folgenden Gleichungssystems mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

b) Welche Werte darf a annehmen, damit die Lösungen des Gleichungssystems eindeutig sind?

Aufgabe 11 (15 Punkte)

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Matrix $D = A^{-1} \cdot B^T + 3 \cdot C$

V. Grundlagen I (2 von 5)

Aufgabe 12 (15 Punkte)

Beweisen Sie durch das Prinzip der ‚Vollständigen Induktion' folgende Aussage:

Für jede natürliche Zahl n ≥ 1 gilt: $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$

Aufgabe 13 (15 Punkte)

Seien A,B,C Teilmengen der Menge M={2,4,6,8,10,12},
Komplemente von A,B,C werden bezüglich M berechnet !
Sei $A \cup B = \{4,8,10,12\}, C = \{2,4,6\}, A \cap C = \{4\}$, A\C={8}.
Geben Sie folgende Mengen an:

a) $(B \cap C) \cup A$ b) $(A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ c) B \ A

Aufgabe 14 (15 Punkte)

a) Bilden Sie die Negation der Aussage $\forall x \in G \exists y \in M : p(y) \Rightarrow (q(x) \vee \neg a(x))$

b) Formulieren Sie folgende Aussagen in der Sprache der Logik unter Verwendung der logischen Quantoren $\forall$ und $\exists$:

„ Die Menge R^+ der positiven reellen Zahlen besitzt kein Minimum.“

c) Beweisen Sie folgende logische Äquivalenz:

$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$

Aufgabe 15 (15 Punkte)

a) Schreiben Sie die folgenden Summe mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$:

$$10 - 2\cdot 100 + 3\cdot 1000 - 4\cdot 10000 + 5\cdot 100000 - 6\cdot 1000000$$

b) Ergänzen Sie die fehlenden Bestandteile des Summenzeichens auf der rechten Seite, so dass das Gleichheitszeichen gilt!

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2i} = \sum_{?}^{?} \frac{1}{2i-8}$$

c) Berechnen Sie folgende Summe: $\sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} 2^i (-1)^{5-i}$ $\quad \left(\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \right)$

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $\log_{10}(3x-1) + \log_2(4) = 3$