Mathematik 1

Dauer : 120 Minuten Prof. Dr. B. Grabowski

Verwendbar: 2 DIN A 4-Blätter (beliebig beschrieben) + n.p. TR.

Name:

Matr. Nr:

Erreichte Punktzahl:

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

Zu jedem der Komplexe I – V gibt es zwei bis drei Aufgaben. Die Aufgaben sind pro Komplex der Schwierigkeit nach angeordnet, d.h. wenn Sie die jeweils erst genannten Aufgaben lösen, können Sie 100 Punkte erreichen. Die Alternativaufgaben sind manchmal leichter und haben deshalb in der Regel weniger Punkte als die erste.

Lösen Sie zu jedem Komplex I – V jeweils nur die angegebene Anzahl von Aufgaben (Ihrer Wahl). Wenn Sie mehr Aufgaben lösen, so wird nur die mit der erreichten höheren Punktzahl in die Bewertung einbezogen!

Februar 2015
Viel Erfolg
B.Grabowski

I. *Geometrie von Geraden und Ebenen (1 von 2)*

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Seien eine Ebene E durch die Gleichung 2x+2y+z = 3 und eine Gerade g mit dem Aufpunkt $P_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

und dem Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Geben Sie E in parametrischer Form an!
b) Welche Lage hat g zu E?
c) Geben Sie eine Ebene E1 in Parameterform an, die senkrecht auf E steht!

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Wir betrachten zwei Ebenen E1 und E2:
E_1 mit dem Normalenvektor $\vec{n}_1$ und dem Aufpunkt P1
E_2 mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2$ und dem Aufpunkt P2

und zwei Geraden g1 un g2:
g1 mit dem Richtungsvektor $\vec{a}_1$ und dem Aufpunkt Q1
g2 mit dem Richtungsvektor $\vec{a}_2$ und dem Aufpunkt Q2

Geben Sie ***nur unter Verwendung von Skalar-, Kreuz-, und Spatprodukt*** Kriterien an, die die auf der rechten Seite der Tabelle beschriebenen Lagen der Ebenen und Geraden charakterisieren, d.h. ergänzen Sie die folgende Tabelle!!

Lage	Bedingung
E1 = E2	
	$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \neq 0$
g1 windschief zu g2	

II. Vektorrechnung (1 von 2)

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Geben Sie 2 weitere Vektoren an, die zusammen mit $\vec{a}$ ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 8 bilden!

Aufgabe 4 (15 Punkte)

a) Liegen $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ in einer Ebene?

b) Wie groß ist das Volumen des durch $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Spats?

c) Seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$!

III. Lineare Unabhängigkeit, Vektorräume (1 von 3)

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Welche Dimension besitzt der folgende Vektorraum :

$$V=\left\{\vec{v}\mid \vec{v}=\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\-4\\-4\\-8\end{pmatrix},\quad \lambda,\mu,\gamma\in R\right\}$$?

Weisen Sie Ihre Aussage nach!

Aufgabe 6 (20 Punkte)

a) Geben Sie 3 Vektoren im R^4 an, die linear unabhängig sind!

b) Geben Sie 3 Vektoren im R^4 an, die linear abhängig sind!

c) Geben Sie ein Erzeugendensystem in R^4 an, welches keine Basis im R^4 ist!

d) Ist $M=\left\{\vec{v}\in R^4 \mid \vec{v}=\begin{pmatrix}s\\0\\t+1\\-t\end{pmatrix}, s\in R, t\in R\right\}$ ein Vektorraum, ein affiner Raum oder weder noch?

Geben Sie im Falle eines Vektorraumes die Dimension und eine Basis von M an!
Geben Sie im Falle eines affinen Raumes den Aufpunkt und die Dimension und die Basis des zu M gehörenden Vektorraumes an!
Begründen Sie Ihre Antwort, wenn es sich weder um einen Vektor- noch um einen affinen Raum handelt!

Aufgabe 7 (15 Punkte)

Sei A= $\begin{pmatrix}2&2&-1&1&0\\11&-3&2&12&1\\-5&2&5&-12&0\\3&0&4&-1&1\end{pmatrix}$

a) Wie groß kann der Rang rg(A) höchstens werden?

b) Berechnen Sie rg(A) !

IV. Matrizen, Lineare Gleichungssysteme (1 von 2)

Aufgabe 8 (20 Punkte)
Gegeben sind folgende 3 Punkte im R^2: P1= (-1,1), P2 = (1,0), P3 = (2,1)

a) Geben Sie dasjenige Polynom 2. Grades an, welches durch diese 3 Punkte verläuft!
b) Skizzieren Sie dieses Polynom, indem Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt einzeichnen!

Aufgabe 9 (20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen x_1, x_2 und x_3 des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\
x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= 1 \\
5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

b) Welches geometrische Gebilde stellt die Lösungsmenge im R^3 dar? Geben Sie das Koordinatensystem und die Dimension der Lösungsmenge an!

V. Grundlagen I (2 von 5)

Aufgabe 10 (15 Punkte)
Beweisen Sie durch das Prinzip der ‚Vollständigen Induktion' folgende Aussage:

Für jede natürliche Zahl n ≥ 1 gilt: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

Aufgabe 11 (15 Punkte)
Seien A,B,C Teilmengen der Menge M={2,4,6,8,10,12},
Komplemente von A,B,C werden bezüglich M berechnet !
Sei $A \cup B = \{4,8,10,12\}, C = \{2,4,6\}, A \cap C = \{4\}$, A\C={8}.
Geben Sie folgende Mengen an:

a) $(B \cap C) \cup A$ b) $(A \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ c) B \ A

Aufgabe 12 (15 Punkte)
a) Bilden Sie die Negation der Aussage $\forall x \in G \exists y \in M : p(y) \Rightarrow (q(x) \vee \neg a(x))$

b) Formulieren Sie folgende Aussagen in der Sprache der Logik unter Verwendung der logischen Quantoren ∀ und ∃:
„ Die Menge R^+ der positiven reellen Zahlen besitzt kein Minimum."

c) Beweisen Sie folgende logische Äquivalenz:
(a ⇒ b) ⇔ (¬ b ⇒ ¬ a)

Aufgabe 13 (15 Punkte)

a) Schreiben Sie die folgenden Summe mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$:

$$10-2\cdot 100+3\cdot 1000-4\cdot 10000+5\cdot 100000-6\cdot 1000000$$

b) Ergänzen Sie die fehlenden Bestandteile des Summenzeichens auf der rechten Seite, so dass das Gleichheitszeichen gilt!

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2i}=\sum_{?}^{?}\frac{1}{2i-8}$$

c) Berechnen Sie folgende Summe: $\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}2^{i}(-1)^{5-i}$ $\left(\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}\right)$

Aufgabe 14 (15 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 \geq |x-2|$ zeichnerisch und rechnerisch!

b) Berechnen Sie $\log_4(32x)-\log_{16}(64x^2)$! Machen Sie Ihren Lösungsweg deutlich!