HTW

Klausur Mathematik I

Dauer : 120 Minuten   Prof. Dr. B. Grabowski

Name:

Matr. Nr.:

Erreichte Punktzahl:

Hinweis zur Bearbeitung der Aufgaben:

Zu jedem der Komplexe I – V gibt es 2 oder 3 Aufgaben. Die jeweils erstgenannte bekommt die volle Punktzahl, die Alternativaufgaben sind leichter und hat deshalb in der Regel weniger Punkte als die erste.
Lösen Sie zu jedem Komplex I – V jeweils e i n e Aufgabe (Ihrer Wahl). ***Es wird nur eine Aufgabe bewertet!*** Wenn Sie beide Aufgaben lösen, so wird nur die mit der erreichten höheren Punktzahl in die Bewertung einbezogen!

Mit der jeweils ersten Aufgabe zu jedem Komplex I – V können Sie 20 Punkte, mit der jeweils zweiten Aufgabe zu jedem Komplex 15 Punkte erreichen. Ihre in der Kurzkontrolle erreichten Punkte werden außerdem noch dazuaddiert , falls Sie 8 Punkte nicht unterschreiten !

Viel Erfolg
B.Grabowski

I. Vektorrechnung im Anschauungsraum:

1) (4 Punkte)

Gegeben seien eine Ebene $\varepsilon_1 = \{P \,/\, P = P_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \quad \lambda \in R, \mu \in R\} \subseteq \mathrm{R}^3$ mit

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

und eine Gerade : $g = \{Q \,/\, Q = P_1 + \lambda\vec{c}, \lambda \in R\}$ mit $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

a) Bestimmen Sie die Ebene ε_2 in parametrischer Form, die senkrecht auf ε_1 steht und deren Schnittgerade mit ε_1 die Gerade g ist!

b) Beschreiben Sie ε_2 in nicht parametrischer Form !

c) Bestimmen Sie eine Ebene, die parallel zu ε_1 im Abstand 3 verläuft!

---

2) (3 Punkte)

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Wie muss λ gewählt werden, damit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar sind?

b) Geben Sie einen Vektor $\vec{d}$ an, der senkrecht auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht!

c) Wie groß ist das Volumen des durch $\vec{d}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds?

II. Gleichungssysteme:

3) (4 Punkte)

Für welche Werte von a ist das Gleichungssystem

$$ax_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 + a\,x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + ax_3 = 1$$

a) eindeutig lösbar?
b) mehrdeutig lösbar?
c) nicht lösbar?
d) Geben Sie im Falle der Lösbarkeit (a) und b) die jeweilige Lösungsmenge an!

---

4) (3 Punkte)
Gegeben seien folgende Messdatenpaare:

xi	-1	0	1	2
yi	-1	0	2	1

Bestimmen Sie ein Polynom, das genau durch diese Messpunkte (xi,yi), i=1,...,4 verläuft!

III. Matrizen und Determinanten

5) (4 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Berechnen Sie a) rg(A), b) det(A)

---

6) (3 Punkte) Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 3 Vektoren im R^3 mit der Determinante $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = 2$.
Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \vec{v}_1, \vec{b} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{c} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_3$ in einer Ebene liegen !

---

7) (2 Punkte) Berechnen Sie die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

IV. Lineare Unabhängigkeit, Basis

7) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die 3 Vektoren $\vec{b}_1 = (1,1,-1)^T$, $\vec{b}_2 = (-1,0,2)^T$, $\vec{b}_3 = (-1,1,1)^T$ linear unabhängig sind, d.h. eine Basis im R^3 bilden!

b) Schreiben Sie den Vektor $\vec{a} = (10,-2,6)^T$ als Linearkombination $\vec{a} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3$, d.h. geben Sie die Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3 an!

---

8) (3 Punkte)

Seien $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$ drei Vektoren im R^4. Untersuchen Sie, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind oder nicht! (Begründung!)

V. Beweisprinzipien und Rechnen mit reellen Zahlen

11) (4 Punkte) Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^3 \leq n^4$ (ausführliche Herleitung)!

---

12) (4 Punkte) Lösen Sie folgende Ungleichung nach x auf: $2x - 9 \leq \sqrt{x^2 + 21}$

---

13) (3 Punkte) Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichung: $\lg(2x-3) - \lg(3x+4) = -1$
