Vorlesung Mathematik 1 [1]

B.Grabowski

19. Oktober 2011

Zusammenfassung

Das vorliegende Papier umfasst den Inhalt der Vorlesung Mathematik 1 für Ingenieure und gibt Hinweise zu weiterführender Literatur. Wir verweisen auch auf die übliche Mathematik-Standard-Literatur, z.B. [Pap01]. Zur Ergänzung der im Skript enthaltenen Übungsaufgaben, d.h. zum weiteren Üben und zum Durchführen von Selbst-Kontrollen (Klausuren) verweisen wir auf unseren E-Learning-Tutor MathCoach.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Algebra-Grundlagen

In diesem Kapitel werden grundlegenden Bezeichnungen, Definitionen und Sätze aus der mathematischen Logik, der Technik des mathematischen Beweisens, der Mengenlehre und des Rechnen mit reellen Zahlen eingeführt. Ergänzend verweise ich auf das Mathe-Brückenlursskript der HTW und das Lehrbuch [Pap01]. Zum zusätzlichen interaktiven rechner-(web-)basierten Üben und zur Klausurvorbereitung sei auf unseren E-Learning-Tutor MathCoach verwiesen.

1.1 Zweiwertige mathematische Logik

1.1.1 Aussagen und Boolsche Funktionen

Gegenstand mathematischer Betrachtungen sind Aussagen.

Definition 1.1 *Eine Zusammenfassung von Worten heißt Aussage (der 2-wertigen Logik), wenn dieser eindeutig der Wahrheitswert "wahr" (W,1), oder "falsch" (F,0) zugeordnet werden kann.*

In der Mathematik geht es darum, den Wahrheitswert (W,F) von Aussagen zu ermitteln.

Beispiele

(1) "Ich lüge jetzt" -> Weder W noch F -> keine Aussage

(2) "Ich würfele gleich eine 6" -> Weder W noch F, Chance $\frac{1}{6}$ -> keine Aussage

(3) "4 ist eine ungerade Zahl" -> F -> Aussage

Wir bezeichnen Aussagen im folgenden allgemein durch kleine Buchstaben: a,b,c,...p,q,r,... .

Aussagen können durch logische Operatoren miteinander verknüpft werden.

Definition 1.2 *Verknüpft man Aussagen durch logische Operatoren (auch Junktoren genannt), so entstehen sogenannte logische Ausdrücke.*

Logische Operatoren sind:

$\wedge$ *(Und; Konjunktion)*

$\vee$ *(Oder; Disjunktion)*

$\Rightarrow$ *(Wenn.... so....; Implikation)*

$\Leftrightarrow$ *(genau dann, wenn; Äquivalenz)*

$\neg$ *(Nicht; Negation)*

Beispiele:

(1) a="Das Objekt ist ein Quadrat."

b="Das Objekt ist ein Viereck."

$a \quad \Rightarrow b$ Lies: "Ist das Objekt ein Quadrat, so ist es auch ein Viereck."

(2) $\neg(4 < 0)$ Lies: "4 ist nicht kleiner 0."

(3) $\neg(4 < 0) \Longleftrightarrow 4 \geq 0$ Lies: 4 ist nicht kleiner als 0 genau dann, wenn 4 größer oder gleich 0 ist. Bzw. das Relationszeichen dreht sich bei Negation um!

Definition 1.3 *Eine Funktion, die jeweils k Aussagen $a_1, ..., a_k$ einen Ausdruck $A(a_1, ..., a_k)$ zuordnet, heißt <u>k-stellige Boolsche Funktion.</u>*

Schreibweise: A: $(a_1, \ldots, a_k) \in \{W, F\}^k \to \{W, F\}$

Beispiele:

(1) $A(a) = \neg a \to$ Einstellige Boolsche Funktion,
A: $a \epsilon \{W, F\} \to \{W, F\}$

(2) $A(a, b) = a \vee b \to$ Zweistellige Boolsche Funktion,
A: $(a, b) \epsilon \{W, F\}^2 \to \{W, F\}$

(3) $A(a, b, c) = a \wedge b \wedge c \to$ Dreistellige Boolsche Funktion,
A:$(a, b, c) \epsilon \{W, F\}^3 \to \{W, F\}$

Boolsche Funktionen haben nur endlich viele Werte in ihrem Definitions- und Wertebereich. Deshalb können wir sie vollständig durch ihre <u>Wertetabellen</u> beschreiben, die auch als <u>Wahrheitswerttabellen</u> bezeichnet werden.

Beispiele:

(1) $A(a) = \neg a$

a	$A(a) = \neg a$
W	**F**
F	**W**

(2) $A(a, b) = a \vee b$

a	b	$A(a, b) = a \vee b$
W	W	**W**
W	F	**W**
F	W	**W**
F	F	**F**

(3) $A(a, b, c) = a \wedge b \wedge c$

a	b	c	$A(a, b, c) = a \wedge b \wedge c$
W	W	W	**W**
W	W	F	**F**
W	F	W	**F**
W	F	F	**F**
F	W	W	**F**
F	W	F	**F**
F	F	W	**F**
F	F	F	**F**

Die Boolsche Funktion in Beispiel (3) ist z.B. nur dann wahr, falls alle ihre Argumente a,b,c wahr sind.

Die Beispiele zeigen, dass es genau 2^k mögliche Werte-Kombinationen der Argumente $a_1, a_2, ..., a_k$ der k-stelligen Boolschen Funktion gibt. Diese bestimmen die Zeilenzahl der Wahrheitswerttabellen, bei einstelligen Boolschen Funktionen (Beipiel 1) ist das $2^1 = 2$, bei zweistelligen (Beispiel 2) ist das $s^2 = 4$ und bei dreistelligen (Beispiel 3) $2^3 = 8$.

Im folgenden werden die Boolschen Grundfunktionen $\neg$, $\vee$, $\wedge$ $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\oplus$ durch ihre Wahrheitswerttabellen definiert.

Definition 1.4 *Wahrheitswerttabellen von* $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Longleftrightarrow, \oplus$.

$A(a) = ^\neg a$

a	$^\neg a$
W	**F**
F	**W**

Negation

$A(a,b) = a \vee b$

a	b	$a \vee b$
W	W	**W**
W	F	**W**
F	W	**W**
F	F	**F**

Disjunktion

$A(a,b) = a \wedge b$

a	b	$a \wedge b$
W	W	**W**
W	F	**F**
F	W	**F**
F	F	**F**

Konjunktion

$A(a,b) = a \Rightarrow b$

a	b	$a \Rightarrow b$
W	W	**W**
W	F	**F**
F	W	**W**
F	F	**W**

Implikation

$A(a,b) = a \Longleftrightarrow b$

a	b	$a \Longleftrightarrow b$
W	W	**W**
W	F	**F**
F	W	**F**
F	F	**W**

Äquivalenz

$A(a,b) = a \oplus b$

a	b	$a \oplus b$
W	W	**F**
W	F	**W**
F	W	**W**
F	F	**F**

Kontravalenz (bzw. Antivalenz)

Wir sehen folgenes: Die Disjunktion ist nur falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind. Die Konjunktion ist nur wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Die Äquivalenz ist nur wahr, wenn

beide Teilaussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Die Kontravalenz ist nur wahr, wenn beide Teilaussagen unterschiedliche Wahrheitswerte haben. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus einer wahren Aussage a eine falsche Aussage b folgen soll. Dass es sinnvoll ist, die Implikation als Wahr zu definieren, wenn aus etwas Falschem etwas Falsches folgt, zeigt folgendes Beispiel: Wenn der 23.12.2010 ein Dienstag ist, so ist der 23.12.2010 ein Mittwoch. Beide Teilaussagen sind falsch, d.h. der 23.12.2010 ist kein Dienstag und der 24.12.2010 kein Mittwoch. Trotzdem ist die Implikation eine wahre Aussage.
Aus diesen Tabellen für die Boolschen Grundfunktionen kann man die Wahrheitswerttabellen (Funktionstabellen) für alle anderen Boolschen Funktionen ermitteln.
Beispiele: Stellen Sie die jeweilige Wahrheitswerttabelle auf!

(1) $A(a,b) = \neg b \Rightarrow \neg a$
Lösung:

a	b	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
W	W	F	F	**W**
W	F	W	F	**F**
F	W	F	W	**W**
F	F	W	W	**W**

(2) $A(a,b) = \neg\,[(\neg a) \wedge (\neg b)]$
Lösung:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$A(a,b)$
W	W	F	F	F	**W**
W	F	F	W	F	**W**
F	W	W	F	F	**W**
F	F	W	W	W	**F**

Aufgabe 1.1

Stellen Sie die Wahrheitswerttabelle für $(a \wedge b) \oplus (a \vee b)$ auf!

Aufgabe 1.1

Geben Sie die Wahrheitswerttabellen an!

Wenn wir uns die Tabelle (1) und die Definitionen der Boolschen Grundfunktion $(a \Rightarrow b)$ genau ansehen, so erkennen wir, dass $(\neg b \Rightarrow \neg a)$ die gleiche Wahrheitswerttabelle wie $(a \Rightarrow b)$ besitzt. D.h. es gilt: $(a \Rightarrow b) \Longleftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

Ebenso erkennen wir, dass $\neg\,[(\neg a) \wedge (\neg b)]$ die gleiche Wahrheitswerttabelle wie $(a \vee b)$ besitzt, d.h. es ist $\neg\,[(\neg a) \wedge (\neg b)] \Longleftrightarrow (a \vee b)$.

Definition 1.5 *Zwei k-stellige Boolsche Funktionen $A(a_1, ..., a_k)$und $B(a_1, ..., b_k)$ heißen äquivalent, falls ihre Wahrheitswerttabellen übereinstimmen.*
Schreibweise: $A(a_1, ..., a_k) \Longleftrightarrow B(a_1, ..., a_k)$

Satz 1.1 *Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

1. $\neg(\neg a) \iff a$
2. $a \wedge b \iff b \wedge a$
3. $a \vee b \iff b \vee a$
4. $(a \Rightarrow b) \iff [(\neg b) \Rightarrow (\neg a)]$ *Kontraposition*
5. $(a \Rightarrow b) \iff (b \vee (\neg a))$
6. $(a \iff b) \iff (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
7. $(a \iff b) \iff (b \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b)$
8. $\neg(a \wedge b) \iff \neg a \vee \neg b$ *de Morgan'sche Regeln*
9. $\neg(a \vee b) \iff \neg a \wedge \neg b$
10. $(a \vee b) \wedge c \iff (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ *Distributivität*
11. $(a \wedge b) \vee c \iff (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
12. $(a \wedge b) \wedge c \iff a \wedge (b \wedge c)$
13. $(a \vee b) \vee c \iff a \vee (b \vee c)$
14. $(a \oplus b) \iff \neg(a \Leftrightarrow b)$

Bemerkung: Wie beim Rechnen mit reellen Zahlen sind bei der Darstellung logischer Ausdrücke Klammerregeln zu beachten!

Beweis: zu 10.)

Seien $A(a,b,c) = (a \vee b) \wedge c$, $B(a,b,c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge a)$

Wir zeigen, dass die Wahrheitswerttabellen von A und B übereinstimmen.

a	b	c	$a \vee b$	$a \wedge c$	$b \wedge c$	$A(a,b,c)$	$B(a,b,c)$
W	W	W	W	W	W	**W**	**W**
W	W	F	W	F	F	**F**	**F**
W	F	W	W	W	F	**W**	**W**
W	F	F	W	F	F	**F**	**F**
F	W	W	W	F	W	**W**	**W**
F	W	F	W	F	F	**F**	**F**
F	F	W	F	F	F	**F**	**F**
F	F	F	F	F	F	**F**	**F**

q.e.d

Beweis: zu 9.)

$A(a,b) = \neg a \wedge \neg b$

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$A(a,b)$
W	W	F	F	**F**
W	F	F	W	**F**
F	W	W	F	**F**
F	F	W	W	**W**

q.e.d

Aufgabe 1.2

Weisen Sie die folgende Äquivalenz nach: $(a \Rightarrow b) \Longleftrightarrow (b \vee (\neg a))$

Wie wir aus Satz 1.1 erkennen können, lässt sich jede andere Boolesche Funktion mit zwei oder mehr Argumenten (Eingängen) mit den Funktionen UND (Konjunktion), ODER (Disjunktion) und NICHT (Negation) realisieren. So kann man z.B. $a \Rightarrow b$ äquivalent durch $b \vee (\neg a)$ darstellen. In der Praxis der digitalen Schaltungstechnik wird das auch so gehandhabt. Deshalb sind diese drei Boolesche Funktionen $\neg, \vee, \wedge$ die wichtigsten Grundfunktionen. Manchmal werden auch nur sie als Grundfunktionen bezeichnet.

1.1.2 Aussageformen

Definition 1.6 *Ersetzt man in einer Aussage a eine Konstante durch eine Variable x, so entsteht eine sogenannte* <u>*Aussageform*</u> *$a(x)$.*

Beispiele:

(1) $a(x): \; x^2 \geq 0$

(2) $a(m): \; m^2$ gerade $\Rightarrow m$ gerade

Bei Aussageformen wird durch **<u>Quantoren</u>** angegeben, auf welche Werte für die enthaltene Variable x (oder m) sich die Aussageform bezieht.

1.1.2.1 Allquantor $\forall$

$\forall\, x \in M : \; a(x)$ man liest das so: “Für alle x aus der Menge M gilt a(x)”

1.1.2.2 Existenzquantor $\exists$

$\exists\, x \in M : \; a(x)$ man liest das so: ”Es existiert ein x aus der Menge M, für welches a(x) gilt”

Beispiel: Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

“Die Menge $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element” kann wie folgt als logische Aussageform formuliert werden:

$\exists\, m \in \mathbb{N} \forall\, n \in \mathbb{N} : \; n \geq m$

(d.h.: es existiert eine nat. Zahl m, die kleiner oder gleich jeder anderen nat. Zahl ist)

Weitere Beispiele

Logische Darstellung	Bedeutung
$\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geq 0$	Das Quadrat jeder reellen Zahl ist ≥ 0
$\forall\, x \in \mathbb{R} \forall\, y \in \mathbb{R} : \; x < y \Rightarrow (\exists\, z \in \mathbb{R} : \; x < z < y)$	Zwischen je 2 reellen Zahlen liegt eine dritte
$\forall\, n \in \mathbb{N} \exists\, m \in \mathbb{N} : \; m > n$	Zu jeder nat. Zahl gibt es eine größere nat. Zahl

Bemerkung: In der Klausur sollten Sie logische Aussagen als Boolsche Funktionen (logische Darstellung) darstellen können und ihre Bedeutung in Worten erklären können!

Beispiel:

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:
$x=$ Student x
$G=$ Menge der Studenten an der HTW
$e(x) = x$ ist im ersten Semester
$m(x) = x$ besucht die Mathe-Vorlesung

Aufgabe: Stellen Sie folgende Sätze als logische Ausdrücke bzw. Aussageformen dar!

(1) Jeder Student der HTW, der die Mathe-Vorlesung besucht, ist im 1. Semester.
Lösung: $\forall\, x \in G:\ m(x) \Rightarrow e(x)$

(2) Nur Studenten des 1. Semesters (HTW) besuchen die Mathe-Vorlesung.
Lösung: $\forall\, x \in G:\ m(x) \Rightarrow e(x)$

(3) Alle Studenten des 1. Semesters besuchen die Mathe-Vorlesung.
Lösung: $\forall\, x \in G:\ e(x) \Rightarrow m(x)$

(4) Alle Studenten des 1. Semesters besuchen die Mathe-Vorlesung und kein anderer Student der HTW.
Lösung: $\forall\, x \in G:\ m(x) \Leftrightarrow e(x)$

Aufgabe 1.3

Formulieren Sie in Ergänzung des Beispiels folgende Aussage als Aussageform:

Es gibt einen Studenten der HTW, der im ersten Semester ist, aber die Mathevorlesung nicht besucht.

1.1.2.3 Verneinungen von Aussageformen

Definition 1.7 *Existenz- und Allquantor werden wie folgt negiert (verneint):*
$\neg(\forall\, x \in M:\ a(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in M:\ \neg a(x)$
$\neg(\exists\, x \in M:\ a(x)) \Leftrightarrow \forall\, x \in M:\ \neg a(x)$

Bei der Verneinung drehen sich die Quantoren um (aus $\forall$ wird $\exists$ und umgekehrt) und das Negationszeichen wird hinter den Quantor gezogen.

Beispiel:
Verneinen Sie: $\forall\, n \in \mathbb{N} \exists\, k \in \mathbb{N}:\ n < k$

Lösung:

$\neg(\forall\, n \in \mathbb{N} \exists\, k \in \mathbb{N}:\ n < k)$
$\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\, \neg(\exists\, k \in \mathbb{N}: n < k)$
$\Leftrightarrow \exists n \epsilon \mathbb{N} \forall k \epsilon \mathbb{N}:\ \neg(n < k)$
$\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \forall\, k \in \mathbb{N}:\ n \geq k$

Bedeutung dieser Aussage: "$\mathbb{N}$ besitzt ein Maximum"

Aufgabe 1.4

Formulieren Sie folgende Aussage als Boolsche Funktionen bzw. Aussageformen:

(a) Die Menge der natürlichen Zahlen hat ein Minimum.

(b) Die Menge der natürlichen Zahlen hat kein Maximum.

(c) Für je zwei reelle Zahlen gilt: Ist $a > b$, so ist auch $a^2 > b^2$

(d) Negieren Sie die Aussage in (c)!

(e) Bilden Sie die Negation der Aussage: Zwischen je zwei natürlichen Zahlen liegt ein Bruch.

(f) Bilden Sie die Kontraposition der Aussage: $m^2 > 0 \Longrightarrow m > 0$.

Aufgabe 1.5

Was bedeutet die folgende Aussageformen:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_o \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} : n > n_o \Longrightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$$

Was meinen Sie? Ist diese Aussageform wahr oder falsch?

1.1.3 Anwendung der Boolschen Funktionen in der Schaltalgebra

In der Schaltungstechnik verwendet man Boolsche Funktionen zur Beschreibung von Schaltungen. Begründet wurde diese als Schaltalgebra bezeichnete Vorgehensweise hauptsächlich von Claude Shannon in seiner Master-Abschlussarbeit A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits von 1937. Die Schaltnetze, die man mithilfe der Schaltalgebra beschreibt, wurden früher hauptsächlich in Relais-Technik oder ähnlichen elektromechanischen Bauweisen hergestellt und die Boolschen Funktionen wurden zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den Zuständen von Schaltern im Innern einer Schaltanordnung verwendet. In der Regel wird hierbei dem Schalterzustand "aus" eine logische Null zugeordnet, dem Schalterzustand "ein" entsprechend eine logische Eins. Die Darstellung von $\wedge$ erfolgt durch eine Parallelschaltung, bei der die Lampe nur brennt, wenn beide Schalter geschlossen sind. Die Darstellung von $\vee$ erfolgt durch eine Reihenschaltung, bei der die Lampe brennt, wenn mindestens einer der beiden Schalter geschlossen ist, siehe Abbildung 1.1.

In der heutigen Digitaltechnik werden k-stellige Boolsche Funktionen nicht durch Schalter bzw. Relais, sondern durch elektronischen Bauelemente (Gatter) aufgebaut. Die Werte der Argumente der Boolschen Funktion sind die Eingänge des jeweiligen Gatters, der Wert der Boolschen Funktion der Ausgang des Gatters. Hierbei werden die logischen Werte der Eingänge durch unterschiedliche Spannungspegel realisiert. Im Normalfall bedeutet hier der höhere Pegel die logische Eins (bzw. W) und der niedrigere Pegel die logische Null (bzw. F), siehe Abbildung . Dabei reichen 3 Grundgatter, das AND-, OR-, und NOT-Gatter, zur Darstellung aller Boolschen Schaltungen aus (siehe auch Satz 1.1 über die Äquivalenz von Boolschen Funktionen). Zusätzlich wird manchmal das XOR-Gatter verwendet.

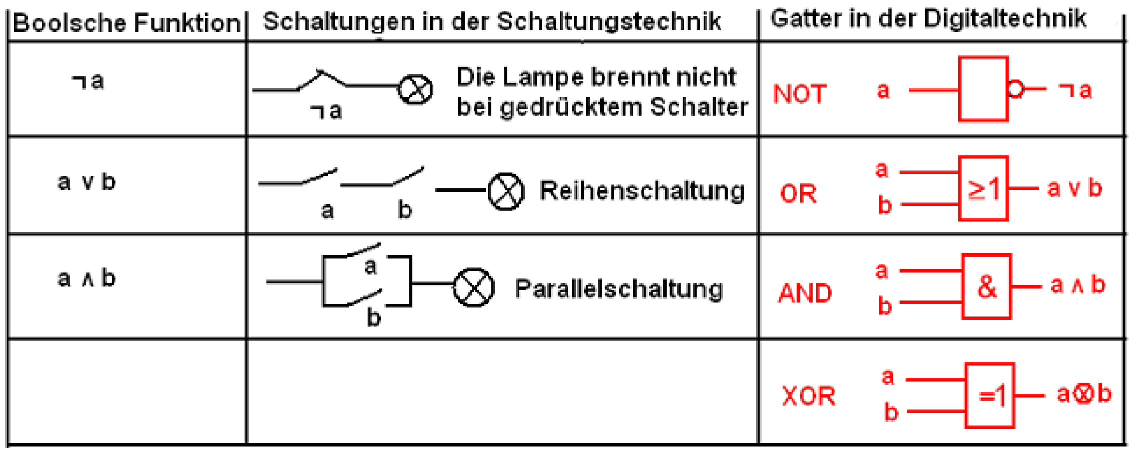


Abbildung 1.1: Darstellung Boolscher Grundfunktionen durch Schaltungen und Gatter

Man kann aus den in Abbildung 1.1 aufgeführten Grundschaltungen und Gatter komplexere Schaltungen und Gatter zusammenbauen, siehe Abbildung 1.2.

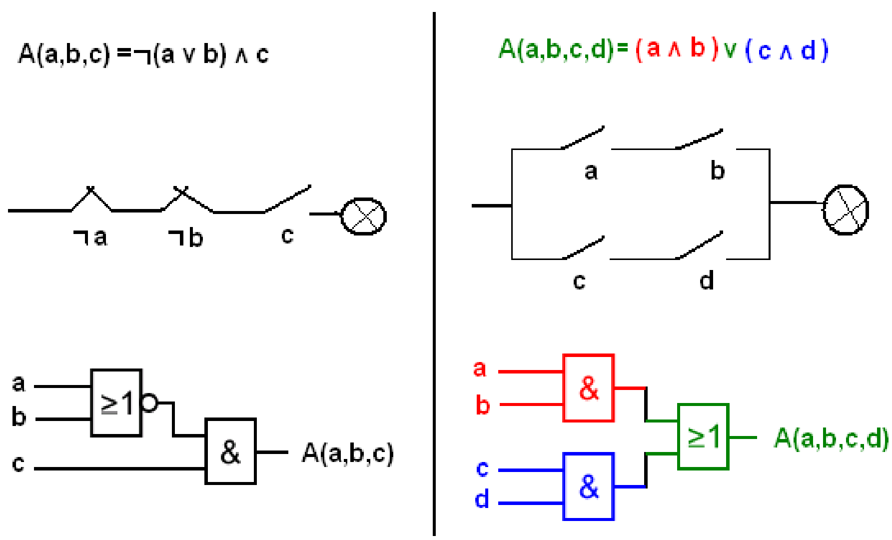


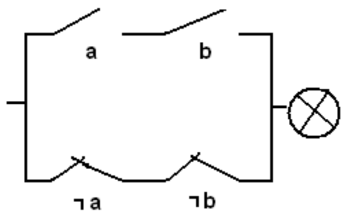
Abbildung 1.2: Darstellung komplexerer Boolscher Funktionen durch Schaltungen und Gatter

Beispiele:

(1) Konstruieren Sie ein Gatter mit zwei Eingängen und einem Ausgang, das nur dann am Ausgang eine 1 hat, wenn beide Eingänge den gleichen Zustand (entweder beide 1 oder beide 0) haben. Alternativ lautet die Aufgabe: Konstruieren Sie eine Schaltung mit zwei Schaltern, bei der die Lampe nur brennt, wenn beide Schalter offen oder beide gedrückt sind.

Lösung:
Zunächst beschreiben wir die gewünschte Schaltung durch die passende Boolsche Funktion. Das ist offensichtlich A(a,b) $=$ a $\Leftrightarrow$ b.
$a \Leftrightarrow b$ wird nun durch Verwendung der Grundfunktionen $\wedge, \vee, \neg$ dargestellt. Es ist $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)]$, siehe Satz 1.1 über die Äquivalenz von Boolschen Funktionen. Die gesuchte Boolsche Funktion kann durch die folgende Schaltung bzw. Gatter unter

Verwendung von AND-, OR-, und NOT dargestellt werden:



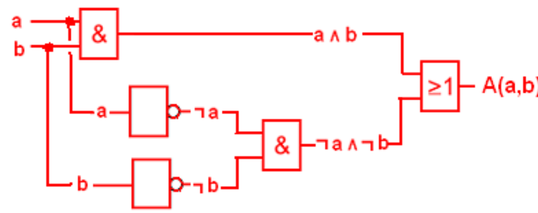


Abbildung 1.3: Darstellung der Boolschen Funktion $A(a, b) = a \Leftrightarrow b$ durch Schaltung und Gatter

(2) Vereinfachen Sie folgende Schaltung:

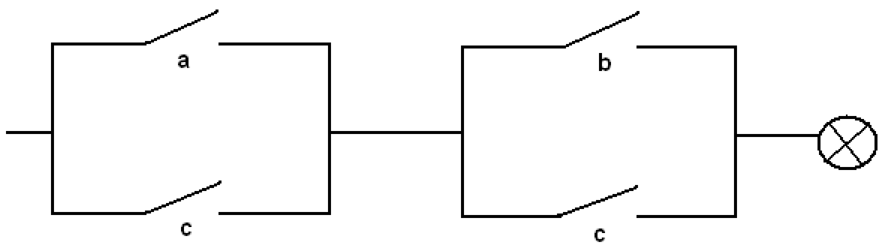


Abbildung 1.4: Zu vereinfachende Schaltung

Lösung:
Wir beschreiben die Schaltung zunächst durch eine Boolsche Funktion, offensichtlich lässt sie sich durch die folgende Boolsche Funktion darstellen: $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

Diese Funktion können wir durch Anwendung des Distributivgesetzes (siehe Satz 1.1) vereinfachen:

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee c$$

Daraus ergibt sich die folgende Vereinfachung der Schaltung:

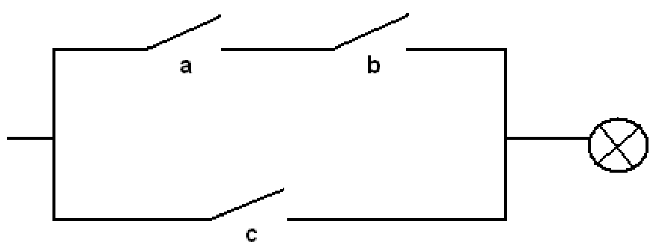


Abbildung 1.5: Äquivalente vereinfachte Schaltung

Aufgabe 1.6

Konstruieren Sie ein Gatter mit drei Eingängen a, b und c und einem Ausgang, das nur dann am Ausgang den Wert 1 hat (die Lampe brennt), wenn alle drei Eingänge das gleiche Eingangssignal besitzen (a=b=c=1 oder a=b=c=0). Wie sieht die dazugehörige Schaltung aus?

Aufgabe 1.7

Vereinfachen Sie den folgenden boolschen Ausdruck und stellen Sie ihn als Schaltung und als Gatter nur unter Verwendung von AND, OR und NOT dar!

$$(\neg(a \wedge b) \vee b) \Rightarrow c$$

1.1.4 Übungs- und Hausaufgaben

Hausaufgabe 1 : Übungsblatt 1

1.2 Beweisprinzipien

1.2.1 Mathematische Sätze

Gegenstand mathematischer Betrachtungen sind Aussagen, die als Lehrsätze formuliert werden. Ein mathematischer Satz hat folgende Gestalt:

Satz
Voraussetzung: a (wird als W angesehen)
Behauptung: b

Kurzform:
Satz *Es gilt:* $a \Rightarrow b$.

Bezeichnungen: In dieser Implikation wird a als hinreichend für b und b als notwendig für a bezeichnet.

Beispiele:

- **Satz** *Es gilt: A ist ein Quadrat ⇒ A ist ein Viereck*
- **Satz** *Beh.: Wenn* m^2 *eine gerade natürliche Zahl ist, so ist auch* m *eine gerade natürliche Zahl.*
- **Satz** *Die Menge* $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen hat kein Maximum.*

Bei der Formulierung eines Satzes wird oft die Angabe von "Es gilt:" oder "Behauptung: (Beh.:)" weggelassen. Zu jedem Satz gehört ein Beweis. Ein Beweis ist der Nachweis, dass die Behauptung des Satzes, also b, Wahr ist, bzw. dass aus a=W folgt, dass b=W ist. Dazu wenden wir die Prinzipien der mathematischen Logik an. Wir unterscheiden 3 verschiedene Techniken des Beweisens:

- der direkte Beweis
- der indirekte Beweis und der Widerspruchsbeweis
- das Prinzip der Vollständigen Induktion

1.2.2 Der direkte Beweis

Satz *Behauptung:* $a \Rightarrow b$

Um die Aussage des Satzes zu beweisen, leiten wir ausgehend von der Voraussetzung, dass a = W ist, Schritt für Schritt her, dass b = W ist. Am Ende eines erfolgreichen Beweises steht q.e.d (quot erra demonstrandum) als Zeichen dafür, dass der Beweis zu Ende ist.

Allgemein sieht dann ein direkter Beweis zum obigen Satz wie folgt aus:

Beweis: Sei a = W. Daraus folgt a_1= W, daraus folgt a_2= W,..., daraus folgt $b = W$.
q.e.d.

Wir werden das Prinzip des direkten Beweises nun an 3 Beispielen demonstrieren.

Satz 1.2
Vor.: $m \in \mathbb{N}$ *und m ist durch 2 teilbar (gerade).*
Beh.: m^2 *ist durch 2 teilbar (gerade)*

Beweis: Sei m eine gerade natürliche Zahl.
$\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} : m = 2 * k$
$\Rightarrow m^2 = (2k)^2 = 4 * k * k = 2 * (2 * k * k)$
$\Rightarrow m^2 = 2 * r$ und $r(= 2 * k * k) \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow m^2$ ist gerade.
q.e.d.

Satz 1.3
Vor.: Sei $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$
Beh.: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n*(n+1)}{2}$

Beweis: Es ist

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & n & = & S & \text{und} \\ & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & ... & + & 1 & = & S & \\ \Rightarrow & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & ... & + & (n+1) & = & 2S & \end{array}$$

$\Rightarrow n * (n + 1) = 2S$
$\Rightarrow S = \frac{n*(n+1)}{2}$
q.e.d.

Satz 1.4
Vor.: $n \in \mathbb{N}$
Beh.: $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\frac{n^3+2}{n^5+n} > \frac{1}{n^2}$

Beweis: Wir formen die Behauptung solange äquivalent um, bis man sieht, ob sie wahr ist oder falsch.

$\frac{n^3+2}{n^5+n^2} > \frac{1}{n^2} \qquad \| * n^2 * (n^5 + n^2)$
$\Leftrightarrow (n^3 + 2) * n^2 > 1 * (n^5 + n^2)$
$\Leftrightarrow n^5 + 2n^2 > n^5 + n^2 \qquad \| - (n^5 + n^2)$
$\Leftrightarrow n^2 > 0$

Das ist offensichtlich für alle $n \in \mathbb{N}$ der Fall.
q.e.d.

Aufgabe 1.8

Beweisen Sie folgende Sätze mittels "direktem Beweis".

(a) ***Satz*** *Ist* $m \in \mathbb{N}$ *ungerade so ist auch* m^2 *ungerade.*

(b) ***Satz***
Vor.: Seien f(x) und g(x) zwei punktsymmetrische Funktionen, d.h. es gilt:

$$-f(x) = f(-x) \text{ und } -g(x) = g(-x)$$

Beh.: Dann ist die Funktion $h(x) = f(x) * g(x)$ *achsensymmetrisch, d.h. es gilt:* $h(x) = h(-x)$.

(c) ***Satz*** *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $q \in \mathbb{R}, \mid q \mid < 1$. *Dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$$

1.2.3 Der indirekte Beweis und der Widerspruchsbeweis

Grundlage als indirekten Beweis ist die **Kontraposition** $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

Statt:

Satz *Es gilt:* $a \Rightarrow b$

zeigen wir die äquivalente Kontraposition:

Satz *Es gilt:* $\neg b \Rightarrow \neg a$

Diese zeigen wir durch den direkten Beweis.

Beispiel:

Satz 1.5 $\forall m \in \mathbb{N}$ *gilt: Wenn* m^2 *gerade (a), so ist* m *gerade (b).*

Beweis: Durch direkten Beweis lässt sich diese Aussage nicht nachweisen.

Wir verwenden den indirekten Beweis und zeigen die Kontraposition:
m ist ungerade $(\neg b) \Rightarrow m^2$ *ist ungerade* $(\neg a)$

Diese zeigen wir durch den direkten Beweis:

Sei m ungerade $(\neg b) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : m = 2k + 1$ (2k+1 ist allgemeine Darstellung ungerader (d.h. nicht durch 2 teilbarer) Zahlen für $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$)
$\Rightarrow m^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 4k + 1$
$\Rightarrow 4k^2 + 4k + 1$
$\Rightarrow 2 * (2k^2 + 2k) + 1$
$\Rightarrow m^2 = 2r + 1,\ r \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow m^2$ ist ungerade.
q.e.d.

Eine andere spezielle Form des indirekten Beweises ist der **Wiederspruchsbeweis**.

Satz:
(Vor.: wird nicht explizit hingeschrieben, es gilt das gesamte bisherige Vorwissen als Voraussetzung)
Beh: b

Bew: indirekt: Wir nehmen an, dass gilt $\neg b = W$. Hieraus leiten wir Schritt für Schritt auf direktem Wege $\Rightarrow a_1 = W \Rightarrow a_2 = W \Rightarrow a_3 = W ... \Rightarrow ....$ einen Wiederspruch zu unserem bisherigen Wissen, oder zu $\neg b = W$ ab.
Demzufolge kann die Annahme $\neg b = W$ nicht stimmen, d.h.es muss $\neg b = F$ sein und folglich ist $b = W$.
q.e.d.

Wir demonstrieren dieses Beweisprinzip an einem Beispiel.

Satz 1.6 *Beh: Die Menge aller reellen Zahlen x mit* $0 < x < 1$ *ist nicht durchnummerierbar.*

Bew.:(Cantorsches Diagonalverfahren)
Annahme: Die reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ sind durchnummerierbar.
Nummerierung:
$x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}...$
$x_2 = 0x_{21}x_{22}x_{23}...$
$x_i = 0, x_{i1}x_{i2}x_{i3}...\ x_{ii}...$
wobei $(x_{ij} \in \{0, 1, ..., 9\})$
Mit dieser Nummerierung sind dann alle Zahlen x mit $0 < x < 1$ erfasst, der erste Index i charakterisiert die Nummer der Zahl in der Durchnumerierung und der zweite Index j die Position der Nachkommastelle der Zahl.
Wir konstruieren nun eine neue Zahl:

$x^* = 0, x^*_{11}\ x^*_{22}\ x^*_{33}\ ...\ x^*_{ii}\ ...$

mit $x^*_{ii} = \begin{cases} x_{ii} + 1 & \text{falls} \quad x_{ii} < 9 \\ 0 & \text{falls} \quad x_{ii} = 9 \end{cases}$

Offensichtlich ist
$x^* \neq x_1$,weil die 1. Ziffer hinterm Komma nicht stimmt
$x^* \neq x_2$,weil die 2. Ziffer hinterm Komma nicht stimmt
$x^* \neq x_i$, weil die i.te Ziffer hinterm Komma nicht stimmt
usw. usf..

D.h. x^* ist eine Zahl, die auch zwischen 0 und 1 liegt, aber nicht durch unsere Nummerierung erfasst werden konnte. D.h. man benötigt mehr Zahlen als natürliche Zahlen existieren, um alle Zahlen aus (0,1) zu erfassen bzw. durch zu numerieren.
$\Longrightarrow$ Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass sich alle reellen Zahlen $\in (0, 1)$ (durch die Menge $\mathbb{N}$) nummerieren lassen.
q.e.d.

Aufgabe 1.9

Beweisen Sie folgende Sätze mittels "indirektem Beweis".

(a) ***Satz*** *Ist* m^2 *für* $m \in \mathbb{N}$ *ungerade, so ist auch m ungerade.*

(b) ***Satz*** *Ist* m^2 *für* $m \in \mathbb{N}$ *durch 5 teilbar, so ist auch m durch 5 teilbar.*

(c) ***Satz*** *Die Menge der natürlichen Zahlen hat kein Maimum.*

1.2.4 Vollständige Induktion

Siehe hierzu auch diesen Link.

Diese Technik wird auf Behauptungen der folgenden Form angewendet:

Satz *Beh:* $\forall$ *natürlichen Zahlen* $n \geq n_0$ *gilt* $a(n)$.
Kurzschreibweise: $\forall n \geq n_0 : a(n)$.

Beispiele:
a)**Satz** $\forall\, n \geq 4 :\ 2^n \leq n! \quad (n_0 = 4)$
b)**Satz** $\forall\, n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\ (n_0 = 1)$
c)**Satz** $\forall\, n \in \mathbb{N} : \frac{n^3+2n^2}{n^5+n^2} \geq \frac{1}{n^2} \quad (n_0 = 1)$

Allgemeine Beweistechnik der vollständigen Induktion:

Beweis:
(a) **I.A. (Induktionsanfang)** $n = n_0$
Wir zeigen, dass $a(n_0)$ gilt (d.h. $a(n) = W$ für den Startwert $n = n_0$)

(b) **I.S. (Induktionsschritt)**
Vor: $a(n)$
Beh: $a(n+1)$

D.h. wir zeigen, wenn $a(n)$ für irgendein beliebiges festes n Wahr ist, so ist $a(n+1)$, -d.h. die Aussage auch für den Nachfolger von $a(n)$- Wahr. Damit gilt $a(n)$ für alle $n \geq n_0$, denn es gilt:

$$\underset{I.A.}{a(n_0) = W} \underset{I.S.}{\rightarrow} a(n_0+1) = W \underset{I.S.}{\rightarrow} a(n_0+1+1) = W \underset{I.S.}{\rightarrow} \ldots.$$

Wir demonstrieren das Beweisprinzip der Vollständigen Induktion an 3 Beispielen.

Satz 1.7 $\forall\, n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis: V.I.
(a) **I.A.** $n_0 = 1$
LS (linke Seite): $\sum_{i=1}^{1} i = 1$
RS (rechte Seite): $\frac{1*(1+1)}{2} = 1$
$\Rightarrow$ LS=RS $\Rightarrow a(n_0) = W$
q.e.d.

(b) **I.S.**
Vor: Für ein festes beliebiges n gilt: $a(n) : \sum\limits_{i=1}^{1} i = \frac{n(n+1)}{2}$
Beh: $a(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Bew:
Die Beweistechnik für den Induktionsschritt I.S. kann man wie folgt allgemein beschreiben. Wir gehen von der linken Seite (LS) der Behauptung aus, **zerlegen** sie so, dass die linke Seite der Voraussetzung darin vorkommt, **ersetzen** dann die linke Seite der Vorausstzung durch die rechte Seite der Voraussetzung und **formen** dann den entstehenden Ausdruck solange **um**, bis die rechte Seite (RS) der Behauptung da steht.

$LS_{Beh} = \sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \sum_{i=1}^{n} i\ + (n+1) \quad$ (Zerlegung)

$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ (Ersetzung)

$= \frac{n(n+1)=+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (Umformen)

$= RS_{Beh}$

q.e.d.

Satz 1.8 $\forall n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{(n+1)^2 * (n)^2}{4}$

Bew: V.I.
(a) **I.A.** Wir zeigen, dass $a(n)$ für $n = n_0 = 1$ gilt.
$n_0 = 1 : LS = \sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$
$RS = \frac{(1+1)^2 * (1)^2}{4} = 1$
$\Longrightarrow LS = RS$
q.e.d.

(b) **I.S.**
Vor: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n+1)^2 * n^2}{4}$
Beh: $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+2)^2 * (n+1)^2}{4}$

Bew:
LS_{Beh}
$= \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3$
$= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3$ (Zerlegung)
$= \frac{(n+1)^2 * n^2}{4} + (n+1)^3$ (Ersetzung)
$= \frac{(n+1)^2 * n^2 + 4(n+1)^3}{4}$ (Umformung)
$= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4 * (n+1))}{4}$
$= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4}$
$= RS_{Beh}$

q.e.d.

Satz 1.9 $\forall n \geq 4 : \ 2^n < n!$

Bew: V.I.
(a) **I.A.** $n_0 = 4$: LS=$2^4 = 16$, RS=$4! = 24 \Rightarrow$ LS < RS.
q.e.d.

(b) **I.S.**
Vor: $2^n < n!$
Beh: $2^{(n+1)} < (n+1)!$

Bew:
LS_{Beh}
$= 2^{(n+1)} = 2^n * 2$ (Zerlegung)
$< n! * 2$ (Ersetzung)
$\leq n! * (n+1)$ (Umformung)
$= (n+1)!$
$= RS_{Beh}$

q.e.d.

Aufgabe 1.10

Beweisen Sie folgende Sätze mittels ”Vollständiger Induktion”.

(a) ***Satz*** *Ist* m^2 *für* $m \in \mathbb{N}$ *ungerade, so ist auch* m *ungerade.*

(b) ***Satz*** *Ist* m^2 *für* $m \in \mathbb{N}$ *durch 5 teilbar, so ist auch* m *durch 5 teilbar.*

(c) ***Satz*** *Die Menge der natürlichen Zahlen hat kein Maimum.*

1.2.5 Übungs- und Hausaufgaben

Hausaufgabe 2 : Übungsblatt 2, Aufgabe 1

1.3 Mengenlehre

Definition 1.8 *Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohl unterschiedener Objekte, die hinsichtlich einer oder mehrerer Eigenschaften als gleichartig angesehen werden können, zu einer Gesamtheit.*

Schreibweisen:

- A,B,C,...M = Mengen
- M=$\{o_1, o_2, ..., o_k\}$, o_i= Elemente der Menge
- $\{\}$=leere Menge
- x $\in$ M: x ist Element von M
- x $\notin$ M: x ist kein Element von M

1.3.1 Darstellung von Mengen

1. M=$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ $\Rightarrow$ Aufzählen aller Elemente der Menge. Bsp.: M=$\{3, 6, 9\}$
2. Durch Angabe einer die Elemente charakterisierenden Eigenschaft: M=$\{(x \in D) \mid E(x)\}$ (E(x) = definierende Eigenschaft).

   Beispiel:

   - M=$\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{3} \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \leq 12\}$
   - M=$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ =Menge der nicht negativen reellen Zahlen.
   - $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}\}$ =Menge der Brüche = Menge der rationalen Zahlen
   - $\mathbb{Z} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \vee n = 0 \vee -n \in \mathbb{N}\}$ =Menge der ganzen Zahlen
3. Induktive Definition einer Menge
   $n_0 \in M \wedge n \in M \Rightarrow f(n) \in M$
   (f(n) ist eine gegebene Funktion)

   Beispiel:

   - $\mathbb{N} : 1 \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
   - Menge aller durch 2 teilbaren nat. Zahlen: $A : 2 \in A \wedge (n \in A \Rightarrow n + 2 \in A)$

1.3.2 Mengenrelationen

Definition 1.9 *1. $A \subseteq B$ heißt: Die Menge A ist in B enthalten.*
($A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$)

2. $A = B$ heißt: A und B sind identisch, d.h. enthalten genau die gleichen Elemente.

3. $A \subset B$ heißt: Die Menge A ist in B echt enthalten.
($A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$ und $A \neq B$.)

Venn-Diagramme:
Die grafische Darstellung von Mengenrelationen und Operationen erfolgt durch sogenannte Venn-Diagramme.

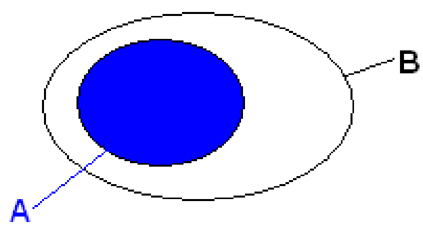


Abbildung 1.6: Darstellung der Relation $A \subset B$ im Venn-Diagramm

Beispiele:

1. $\{2, 4, 6\} \subset \mathbb{N}$
2. $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$

Definition 1.10 *Die Menge $P = \{A \mid A \subseteq M\}$ aller Teilmengen einer Menge M heißt Potenzmenge von M.*

Beispiel:
Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Die Potenzmenge von M ist dann $P = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, M\}$.

1.3.3 Mengenoperationen

Definition 1.11

1. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ sprich: A vereinigt B

2. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ sprich: A geschnitten B

3. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ sprich: "A minus B" bzw. "A ohne B"

Beispiel:
Seien $A = \{2, 3, 4\}$ und $B = \{2, 4, 8\}$. Dann ist:
$A \cup B = \{2, 3, 4, 8\}$
$A \cap B = \{2, 4\}$
$A \setminus B = \{3\}$
$B \setminus A = \{8\}$.

Auch die Mengenoperationen kann man im Venn-Diagramm verdeutlichen, siehe Abbildung 1.7.

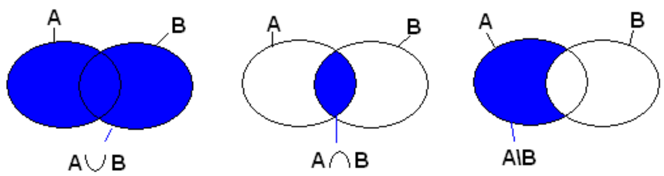
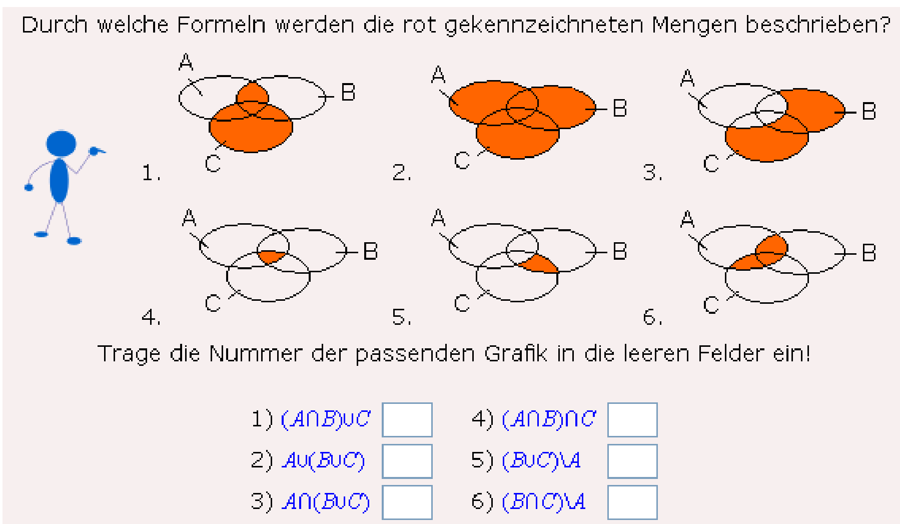


Abbildung 1.7: Darstellung der Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus$ im Venn-Diagramm

Aufgabe 1.11



Definition 1.12 *Zwei Mengen A und B heißen* <u>*disjunkt*</u> *(durchschnittsfremd), falls gilt:*

$$A \cap B = \{\}$$

.

Beispiel: Die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 4, 6\}$ sind disjunkt.

Definition 1.13 *Sei $A \subseteq M$. Dann heißt M Obermenge von A und $\bar{A}_M = \{x \in M \mid x \notin A\}$heißt* <u>*Komplement*</u> *(bzw. Komplementärmenge) von A bzgl M.*

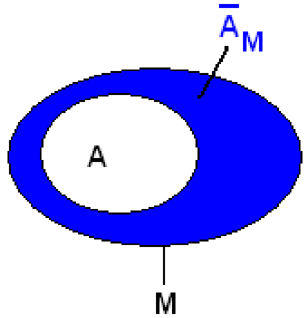


Abbildung 1.8: Darstellung des Mengen-Komplements im Venn-Diagramm

Offensichtlich gilt: $\bar{A}_M = M \setminus A$.

Beispiele:

- $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$. Dann ist $\bar{A}_M = \{1, 3, 5\}$
- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der geraden nat. Zahlen. Dann ist
  $\bar{A}_{\mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{N} : \, n = 2k - 1\}$
  die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Aufgabe 1.12

Verwenden Sie die richtigen Symbole!

Aufgabe 1.2

Berechnen Sie folgende Mengen!

Aufgabe 1.3

Veranschaulichen Sie Mengenoperationen im Venn-Diagramm!

Für die Mengenoperationen gelten folgende Rechenregeln.

Satz 1.10 *(Eigenschaften von Mengenoperationen)*
Beh.: Es gilt:

1. $\bar{\bar{A}} = A$
2. $A \cap B = B \cap A$ *Kommutativität*
3. $A \cup B = B \cup A$ *Kommutativität*
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *Assoziativität*
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *Assoziativität*
6. $(A \cap B) \cup C = (C \cup B) \cap (C \cup A)$ *Distributivität*
7. $(A \cup B) \cap C = (C \cap B) \cup (C \cap A)$ *Distributivität*

8. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ *De Morgansche Regel*
9. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ *De Morgansche Regel*
10. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$
11. $A \cap A = A \cup A = A$
12. $A \cap \{\} = \{\}$, $A \cup \{\} = A$

Beweisen kann man diese Rechenregeln auf sehr anschauliche Weise mittels Venn-Diagrammen. Dazu stellt man die linke und die rechte Seite der entsprechenden zu beweisenden Gleichung im Venn-Diagramm dar und prüft, ob die Grafiken, die die Mengen beider Seiten darstellen, identisch sind. Wir demonstrieren das an einem Beispiel.

Beweis zu 8. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ **(De Morgansche Regel):**

Wir stellen die linke Seite und die rechte Seite dieser Gleichung im Venn-Diagramm dar, siehe Abbildung 1.9.

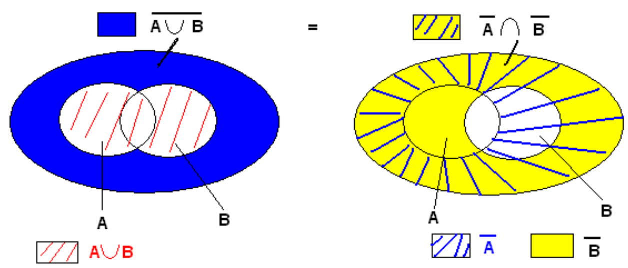


Abbildung 1.9: Darstellung der De Morganschen Regel im Venn-Diagramm

Wie wir an dieser Abbildung sehen, sind die linke und die rechte Seite der Gleichung 8. identisch. q.e.d.

Aufgabe 1.13

Beweisen Sie die Beziehungen 7. und 10. des Satzes 1.10 mittels Venn-Diagrammen!

Aufgabe 1.4

Welche Mengen sind gleich? Geben Sie die richtigen Mengenoperationen an!

1.3.4 Besondere Mengen

1.3.4.1 Zahlenmengen

In der Mathematik unterscheiden wir Mengen von Zahlen. So zum Beispiel die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen und die reellen Zahlen. Die Bezeichnungen der uns bisher bekannten Zahlenbereiche listen wir im folgenden auf.

- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$.
  (Induktive Definition: $1 \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$)

- Menge der natürlichen Zahlen mit der Null: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{z \mid z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N} \vee z = 0\}$.
- Menge der rationalen Zahlen (Brüche): $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \vee n \in \mathbb{N}\}$.
  Die Brüche kann man als periodische oder endliche Dezimalzalen darstellen, so z.B. ist $\frac{1}{2} = 0,5$ eine endliche Dezimalzahl und $\frac{1}{3} = 0,333...$ eine periodische Dezimalzahl.
- Menge der irrationalen Zahlen:
  $\mathbb{I}$ = Menge aller nicht endlichen und nicht periodischen Dezimalzahlen.
  So z.B. sind $\sqrt{2}$ und die Eulersche Zahl e und die Zahl π irrationale Zahlen.
- Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

1.3.4.2 Intervalle reeller Zahlen

Für $a \leq b$ unterscheiden wir folgende Intervalle:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ geschlossenes Intervall von a bis b.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (linksseitig) halboffenes Intervall von a bis b.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (rechtsseitig) halboffenes Intervall von a bis b.
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall von a bis b.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ und $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ und $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Aufgabe 1.14

Geben Sie folgende Menge als Intervall an!

$$((-2, 4] \cap [-3, 1)) \cup [0, 5]$$

1.3.4.3 Kreuzmengen

Definition 1.14 *Das Gebilde* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ *für* $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1...n$, $n \in \mathbb{N}$ *heißt n-Tupel.*

Bezeichnungen:
$n = 2$: (x_1, x_2) *geordnetes Paar*
$n = 3$: (x_1, x_2, x_3) *Tripel*
$n = 4$ (x_1, x_2, x_3, x_4) *Quadrupel*

Achtung
Tupel unterscheiden sich von Mengen dadurch, dass die Reihenfolge der Elemente bei Tupeln eine Rolle spielt und bei Mengen nicht. Es ist M=$\{1, 2, 3\}$=$\{3, 2, 1\}$ und $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$

Beispiel
Eine Parabel wird durch eine Menge von Punkten dargestellt:
$f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$. Kurzschreibweise: $y = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Definition 1.15
$A = \{(x_1, ...x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge ...x_n \in A_n\} = A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ heißt Kreuzmenge von $A_1, ...A_n$

Bezeichnung für Kreuzmengen aus n identischen Mengen: $B \times B \times ... \times B = B^n$

Beispiele:

Rechteck der Seitenlängen 3 und 2:
$A = \{(x, y) \mid x \in [-1, 2] \wedge y \in [-1, 1]\} \quad = [-1, 2] \times [-1, 1]$

Dreidimensionaler Würfel der Kantenlänge 1:
$W = \{(x, y, z) \mid x \in [0, 1] \wedge y \in [0, 1] \wedge z \in [0, 1]\} \quad = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \quad = [0, 1]^3$

Quadrat der Seitenlänge 2:
$A = [-1, 1]^2$

Die reelle Zahlenebene:
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

Der n-dimensionale reelle Raum:
$\mathbb{R}^n$=Menge aller n-Tupel mit $x_i \in \mathbb{R} \; \forall i = 1...n$.

Weitere Beispiele:

Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2\}$.

Dann ist:
$AxB = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$
$BxA = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

Wir sehen, dass das Kreuzprodukt $\times$ nicht kommutativ ist, d.h. es gilt i.A. $A \times B \neq B \times A$.

$(AxB) \setminus (BxA) = \{(3, 1), (3, 2)\}$
$(BxA) \setminus (AxB) = \{(1, 3), (2, 3)\}$

$(AxB) \cap (BxA) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$

Wir sehen, dass in unserem Beispiel $(AxB) \cap (BxA) = (A \cap B) \times (A \cap B)$ ist. Das kann man auch allgemein für beliebige Mengen A und B nachweisen.

Aufgabe 1.15 Zeigen Sie dass für beliebige Mengen A und B folgende Behauptung stimmt:

Satz: Es gilt $(AxB) \cap (BxA) = (A \cap B)^2$

1.3.5 Mächtigkeit von Mengen

Definition 1.16 *Sei M eine Menge. Dann ist $\mid M \mid$ gleich der Anzahl der Elemente in M.*

Beispiele

M=$\{1,2,3,4,5,7,13\} \Rightarrow \mid M \mid = 7$
$\mid \{\} \mid = 0$
$\mid p(A) \mid = 2^{\mid A \mid}$

Definition 1.17
a) Eine Menge M mit $\mid M \mid = k \in \mathbb{N}$ heißt endlich.
b) Eine Menge M mit $\mid M \mid = \mid \mathbb{N} \mid$ heißt abzählbar ∞
c) Eine Menge M mit $\mid M \mid > \mid \mathbb{N} \mid$ heißt überabzählbar ∞

Definition 1.18 *2 Mengen A,B heißen gleichmächtig, falls gilt: $\mid A \mid = \mid B \mid$*

Satz 1.11 *Es gilt*
$\mid M \mid = \mid \mathbb{N} \mid$
$\Leftrightarrow$
Es existiert bijektive Abbildung von f $M \leftrightarrow N$, die jedes Element aus M genau ein Element aus $\mathbb{N}$ zuordnet und umgekehrt.
$\Leftrightarrow$
Alle Elemente von M sind durchnummerierbar.

Beispiel
Sei $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{Z} = \{-...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ die Menge der ganzen Zahlen.

<u>Behauptung:</u> $\mid Z \mid = \mid \mathbb{N} \mid$

Beweis: Wir definieren eine bijektive Zuordnung $\mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{N}$ der natürlichen zu den ganzen Zahlen wie folgt, d.h. wir numerieren die ganzen Zahlen wie folgt durch:
Wir ordnen der ganzen Zahl 0 die natürliche Zahl 1 zu, den positiven ganzen Zahlen die geraden natürlichen Zahlen und den negativen ganzen Zahlen die ungeraden natürlichen Zahlen:
$\mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{N}$

......
$-3 \leftrightarrow 7$
$-2 \leftrightarrow 5$
$-1 \leftrightarrow 3$
$0 \leftrightarrow 1$
$1 \leftrightarrow 2$
$2 \leftrightarrow 4$
.....

q.e.d

Für den Nachweis, dass auch die Menge $\mathbb{Q}$ der Brüche abzählbar unendlich ist, benötigen wir eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$. Diese lässt sich nicht so leicht konstruieren. Wir verwenden hier den folgenden Satz.

Satz 1.12

a) Seien A_i, $i = 1,...,k$ k endliche Mengen. Dann ist $\cup_{i=1}^{k} \ A_i = A_1 \cup A_2 ... A_k$ auch endlich.
b) Seien A_i, $i = 1,2...,k$ k abzählbare ∞ Mengen. Dann ist $\cup_{i=1}^{k} A_i$ abzählbar ∞.
c) Seien A_i, $i = 1,2...$ abzählbar unendlich viele abzählbare ∞ Mengen. Dann ist $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ abzählbar ∞.

Mit Hilfe dieses Satzes können wir leicht zeigen, dass die Menge der Brüche ebenfalls abzählbar unendlich ist, d.h. es gibt genauso viele Brüche, wie natürliche Zahlen.

Satz 1.13 *Es gilt:* $|\ \mathbb{Q}\ |=|\ \mathbb{N}\ |$

Beweis: Sei $\mathbb{Q}_n = \left\{\frac{n}{m} \mid m \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4}, ...\right\} \Rightarrow |\ \mathbb{Q}_n\ |=|\ \mathbb{N}\ | \Rightarrow \mathbb{Q}_n$ ist für jedes feste $n \in \mathbb{Z}$ abzählbar ∞.
Weiterhin ist $\mathbb{Q} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_n$
und folglich ist $\mathbb{Q}$ die Vereinigung von abzählbar viewlen abzählbar ∞ Mengen $\mathbb{Q}_n$. Nach Satz 1.12 c) ist damit $\mathbb{Q}$ abzählbar ∞, also gilt $|\ \mathbb{Q}\ |=|\ \mathbb{N}\ |$.
q.e.d.

Satz 1.14
Es gilt:

- $|\ (0,1)\ | > |\ \mathbb{N}\ |$
- $|\ \mathbb{R}\ |>|\ \mathbb{N}\ |$
- *Jedes relle Zahlenintervall* (a,b) *ist überabzählbar* ∞.

1.3.6 Übungs- und Hausaufgaben

Hausaufgabe 3 : Übungsblatt 2, Aufgaben 2 bis 8

1.4 Rechnen mit reellen Zahlen

1.4.1 Der Zahlenaufbau

$\boxed{\mathbb{N} = \textbf{Natürliche Zahlen}}$

erlaubte Operationen: <,>, =, ≠, +, * (Abkürzung für +).

Problem: Die Lösung x von $x + 7 = 2$ führt aus $\mathbb{N}$ heraus, es ist $x = -5$.

$\boxed{\mathbb{Z} = \{z \mid z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N} \vee z = 0\} \ = \textbf{Ganze Zahlen}}$

erlaubte Operationen: <,>, =, ≠, +, -, * (Abkürzung für +).

Problem: Die Lösung x von $x * 7 = 2$ führt aus $\mathbb{Z}$ heraus, es ist $x = \frac{2}{7}$.

$\boxed{\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\} \ = \textbf{Rationale Zahlen}}$

Besonderheit: Menge der rationalen Zahlen = Menge der endlichen oder periodischen Dezimalzahlen. Z.B. $\frac{2}{5} = 0,4$, $\frac{7}{3} = 2,666\overline{6}$.

erlaubte Operationen: <,>, =, ≠, +, -, * , / .

Problem: Die Diagonale d in einem Quadrat der Seitenlänge 1 ergibt sich nach Pythagoras als Lösung der Gleichung $d^2 = 2$. Diese Lösung $d = \sqrt{2}$ ist kein Bruch, d.h. die Lösung dieser Gleichung führt aus $\mathbb{Q}$ heraus.

$\boxed{\mathbb{I}\mathrm{r} = \textbf{Irrationale Zahlen} = \textbf{Menge der nichtendlichen und nichtperiodischen Dezimalzahlen.}}$

Besonderheit: Zur Menge der irrationalen Zahlen gehören Z.B. $\sqrt{2} = 1,4142135...,\pi = 3,1415926...$ und die Eulersche Zahl $e = 2,7182818...$.
Bei praktischen Rechnungen muss man irrationale Zahlen runden, dabei entstehen Rundungsfehler, die sich zu sehr großen Fehlern fortpflanzen können.
Besser ist es, bei Rechnungen so lange wie möglich das entsprechende Zahlensymbol e, π, $\sqrt{2}$ usw. zu verwenden und erst zu runden, wenn der Term nicht weiter vereinfacht werden kann. Das machen z.B. Mathematik-Softwaresysteme, die als *Computeralgebrasysteme (CAS)* bezeichnet werden. Mathematik-Software, die nicht mit Symbolen rechnen kann, bezeichnet man demgegenüber als *numerische Software*.
Irrationale Zahlen kann man in berechenbare und nichtberechenbare Zahlen unterscheiden. Eine Zahl heißt berechenbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der sie mit jeder beliebigen vorgegebenen Genauigkeit (= Stellenzahl nach dem Komma) ermitteln kann. Andernfalls heisst sie nicht berechenbar. Z.B. ist $\sqrt{2}$ berechenbar, π ist nicht berechenbar.

erlaubte Operationen: $<$, $>$, $=$, $\neq$, $+$, -, * , / , Potenzieren, $\sqrt{}$, $log_a()$.

$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}\mathrm{r} = \textbf{Reelle Zahlen} = \textbf{Alle Dezimalzahlen.}}$

Besonderheit: Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine dritte. Die reellen Zahlen kann man nicht mehr durchnumerieren (abzählen), d.h. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich, bzw. $\mid \mathbb{R} \mid > \mid \mathbb{N} \mid$.

erlaubte Operationen: $<$, $>$, $=$, $\neq$, $+$, -, * , / , Potenzieren, $\sqrt{}$, $log_a()$.

Problem: Die Lösungen x der Gleichung $x^2 + 4 = 0$ führen aus $\mathbb{R}$ heraus, es ist $x = \sqrt{-1} * 2$ oder $x = \sqrt{-1} * 2$.

$\boxed{\mathbb{C} = \{x + \sqrt{-1} * y \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \textbf{Komplexe Zahlen.}}$

Besonderheit: Die neue Zahl $j = \sqrt{-1}$ wird als imaginäre Einheit bezeichnet.

erlaubte Operationen: $=$, $\neq$, $+$, -, * , / , Potenzieren, $\sqrt{}$, $log_a()$. Es sind alle arithmetischen Operationen möglich, es treten keine Probleme mehr auf. Aber in $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnung mehr, man kann komplexe Zahlen nicht anordnen, $<$ und $>$ sind nicht mehr erlaubt.

Mit komplexen Zahlen werden wir uns im Sommersemester befassen. In den folgenden Abschnitten beschäftigen wir uns mit reellen Zahlen.

1.4.2 Brüche und Dezimalzahlen

1.4.2.1 Regeln der Bruchrechnung

Sie müssen die Regeln der Bruchrechnung perfekt beherrschen.
Dazu verweisen wir auf das Brückenkursskript, Kapitel 1.4.

Aufgabe 1.16

Lesen Sie sich das Kapitel 1.4. in diesem Brückenkursskript durch!
Link:
http://www.htw-saarland.de/Members/grabowski/uebersicht/vl/Material_mathe_1_MST_KI/ws-07-08/Brueckenkurs-07-08

Lösen Sie anschließend folgende Übungsaufgaben!

Aufgabe 1.17 Vereinfachen Sie folgende Terme!

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$

b) $\frac{7}{2} + \frac{8}{3}$

c) $\frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} - \frac{1}{4}}$

d) $\frac{3x}{x+y} + \frac{2y}{x+y} - \frac{2x+y}{x+y}$

e) $\frac{a}{xy} + \frac{b}{x} - \frac{c}{y}$

f) $\frac{3x}{4-y} : (4+y)$

g) $\frac{x}{\frac{x^2-9}{x-2}} + \frac{7-x}{\frac{x^2-6x+9}{x-1}}$

h) $\frac{3-x}{x^2-4} + \frac{2x+1}{x^2-4x+4}$

i) $\frac{3}{\frac{x+3}{x-2}} + \frac{\frac{x-102}{x-4}}{x+3}$

Aufgabe 1.5

Lösen Sie diese Aufgaben zur Bruchrechnung in MathCoach!

1. Dividieren Sie Brüche!
2. Kürzen Sie Brüche!
3. Bilden Sie den Hauptnenner!
4. Vereinfachen Sie Terme!
5. Ordnen Sie Brüche an!

1.4.2.2 Umrechnung von Dezimalzahlen in Brüche

Brüche sind endliche oder periodische Dezimalzahlen.

Beispiele:

$\frac{1}{5} = 0.2$ und $\frac{1}{3} = 0.33\overline{3}$

Die Umrechnung von Brüchen in Dezimalzahlen erfolgt einfach durch schriftliche Division.

Beispiel:
$\frac{3}{11} = 3 : 11 = 0,207207\overline{207}...$

Die Umrechnung von Dezimalzahlen in Brüche erfolgt so:

Endliche Dezimalzahlen mit k Nachkommastellen werden mit 10^k erweitert, d.h. die Zahl wird mit 10^k multipliziert, das ergibt den Zähler des Bruches; und anschließend durch 10^k dividiert. Das Ergebnis kann man dann noch kürzen.

Beispiel:
$21.345 = \frac{21.345 * 10^3}{10^3} = \frac{21345}{1000} = \frac{4269}{200}$

Nicht endliche, aber periodische Dezimalzahlen p, bei denen die Periode in der k.ten Nachkommastelle beginnt und m Ziffern die Periode bilden, werden wie folgt umgerechnet:
1. Sie werden mit 10^m multipliziert, wir erhalten $10^m * p$
2. Die Differenz $q = 10^m * p - p$ ist immer eine endliche Dezimalzahl
3. Diese endliche Dezimalzahl q wird wie oben beschrieben als Bruch dargestellt
4. Anschließend wird $q = 10^m * p - p$ nach p umgestellt, wir erhalten das Ergebnis: $p = \frac{q}{10^m - 1}$

Beispiele

1. $p = 0.\overline{3}$ ist umzurechnen.
   Es ist $m = 1$, nur eine Ziffer (die 3) ist an der Periode beteiligt, und wir erhalten
   $10 * p - p = 3.\overline{3} - 0.\overline{3} = 3$
   Daraus folgt
   $p = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

2. $p = 21.12\overline{3}$ ist umzurechnen.
   Es ist $m = 1$ (nur die Ziffer 3 ist an der Periode beteiligt) und wir erhalten
   $10 * p - p = 211.2\overline{3} - 21.12\overline{3} = 211.23\overline{3} - 21.12\overline{3} = 211.23 - 21.12 = 190.11 = \frac{19011}{100}$
   Daraus folgt
   $p = \frac{\frac{19011}{100}}{10-1} = \frac{19011}{900} = \frac{6337}{300}$

3. $p = 21.12\overline{345}$ ist umzurechnen.
   Es ist nun $m = 3$, denn die drei Ziffern 345 sind an der Periode beteiligt, und wir erhalten
   $10^3 * p - p = 21123.45\overline{345} - 21.12\overline{345} = 21123.45 - 21.12 = 21101.88 = \frac{2110188}{100}$
   Daraus folgt
   $p = \frac{\frac{2110188}{100}}{10^3-1} = \frac{2110188}{99900} = \frac{527547}{24975}$

Aufgabe 1.18 Rechnen Sie folgende Dezimalzahlen in Brüche um!

a) $0.2\overline{4}$

b) $12.\overline{12}$

c) $341.901\overline{123}$

d) $-1.2\overline{87}$

1.4.3 Das Summen- und das Produktzeichen

1.4.3.1 Rechnen mit dem Summen- und Produktzeichen

Möchte man das Quadrat aller Zahlen von 1 bis 10 addieren, so müsste man schreiben: $1+4+9+16+25+36+49+64+81+100$. Wir verwenden dafür eine abkürzende Schreibweise: $\sum_{i=1}^{10} i^2$. Die abkürzende Schreibweise lohnt sich, wenn man viele Summanden addieren möchte. Für die Summe der Quadrate aller Zahlen von 1 bis 1000 schreiben wir dann z.B. $\sum_{i=1}^{1000} i^2$.

$\sum$ heißt *Summenzeichen*. Im folgenden beschäftigen wir uns mit diesem Summenzeichen $\sum$ und außerdem mit dem *Produktzeichen* $\prod$.

Definition 1.19 (Summen- und Produktzeichen) *Wir verwenden für die Summe von n reellen Zahlen folgende abkürzende Schreibweise:*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Der erste Summand wird gebildet durch die Zuordnung $i = 1$ zu a_i und man erhält a_1. Im folgenden wird der Laufindex i jeweils um 1 erhöht und man erhält den nächsten Summanden. Der letzte

Summand a_n ergibt sich dann für $i = n$. Diese Schreibweise lässt sich verallgemeinern, für $m \leq n$ ist:

$$a_m + a_{m+1} + ... + a_n = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

i heißt Summationsindex , *m und n sind die* Summationsgrenzen *und $a_m, \cdots, a_n$ sind die* Summanden*.*

Analog definieren wir das Produkt von reellen Zahlen:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i \quad \textit{und} \quad a_m \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=m}^{n} a_i$$

Beispiele zum Summen- und Produktzeichen.

a) $4 + 8 + 16 = \sum_{i=2}^{4} 2^i$

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i}$

c) $-x + x^2 - x^3 + x^4 = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i \cdot x^i$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \prod_{i=2}^{5} \frac{1}{i}$

e) $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = \prod_{i=1}^{3} i^2$

Aufgabe 1.19 Stellen Sie den Term mittels Summen- bzw. Produktzeichen dar!

a) $2 - 4 + 6 - 8 + 10$

b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6}$

Aufgabe 1.20 Berechnen Sie den Wert der Summen und Produkte!

a) $\sum_{i=2}^{4} 2^i$

b) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i}$

c) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^i \cdot i$

d) $\prod_{i=1}^{4} \frac{i}{i+1}$

e) $\prod_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \cdot \frac{i+1}{i}$

f) $\sum_{i=-1}^{2} \Big((2i)^2 - i \Big)$

g) $\sum_{i=1}^{5} \big(2i + 3i^2 - 4\big)$

1.4.3.2 Eigenschaften von Summen- und Produktzeichen

Für das Summen- und Produktzeichen gelten natürlich die gleichen Regeln wie für das Addieren und Multiplizieren von reellen Zahlen. Zum Beispiel gelten folgende Eigenschaften:

Satz 1.15 *Es ist:*

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$
2. $\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$
4. $\sum_{i=k^n c=(n-k+1)\cdot c}$

Analog gilt für das Produktzeichen:

Satz 1.16 *Es ist:*

1. $\prod_{i=1}^{n}(a_i)^n = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^n$
2. $\prod_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$
3. $\prod_{i=1}^{n} c = c^n$
4. $\prod_{i=k}^{n} c = c^{(n-k+1)}$

Aufgabe 1.21 Die Summe

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

bezeichnet man als arithmetisches Mittel der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Rechnen Sie die Summen auf der linken Seite der folgenden Gleichungen aus und weisen Sie dadurch nach, dass sie gleich der rechten Seite sind!

a) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$

b) $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot (\overline{x})^2$

1.4.3.3 Indexverschiebung

Die Darstellung einer Summe von Zahlen durch ein Summenzeichen ist nicht eindeutig. Z.B. Kann man leicht prüfen, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{10} i = \sum_{i=11}^{20}(i-10) = \sum_{i=21}^{30}(i-20) = \sum_{i=-9}^{0}(i+10)$$

Oft ist es sinnvoll, den Laufindex i von einem anderen Startwert als 1 anfangen zu lassen. Damit sich der Wert der Summe nicht verändert, ist folgende Regel zu beachten:
Wenn wir die Summationsgrenzen unter und über dem Summenzeichen um eine konstante Zahl c erhöhen, so müssen wir in den Summanden a_i die Indexvariable i um diese Konstante c veringern!
Wenn wir die Summationsgrenzen unter und über dem Summenzeichen um eine konstante Zahl c veringern, so müssen wir in den Summanden a_i die Indexvariable i um diese Konstante c erhöhen!
Diesen Vorgang nennt man *Indexverschiebung*.

Satz 1.17 (Indexverschiebung) *Es gilt für jede Zahl $c \geq 0$:*

$$\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n+c}^{m+c} a_{i-c} = \sum_{i=n-c}^{m-c} a_{i+c}$$

Analog gilt:

$$\prod_{i=n}^{m} a_i = \prod_{i=n+c}^{m+c} a_{i-c} = \prod_{i=n-c}^{m-c} a_{i+c}$$

Aufgabe 1.22 Füllen Sie die richtigen Werte in die leeren Felder (Kästchen) ein!

a) $\sum_{i=2}^{4} 2^i = \sum_{i=3}^{5} \square$

b) $\sum_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i} = \sum_{i=\square}^{\square}(-1)^i \cdot \frac{1}{i-1}$

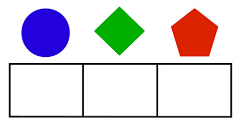
c) $\prod_{i=0}^{5} \frac{i}{i+1} = \prod_{i=-10}^{\square} \square$

d) $\prod_{i=1}^{4} (-1)^{i+1} \cdot \frac{i+1}{i} = \prod_{i=10}^{\square} (-1)^{i-8} \cdot \frac{i-8}{i-9}$

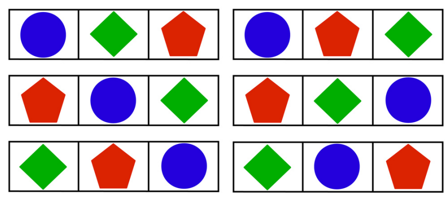
1.4.4 Der binomische Lehrsatz

1.4.4.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 3 Symbole auf 3 Felder zu legen, so dass in jedem Feld ein Symbol liegt?



Offensichtlich sind das folgende 6 Möglichkeiten:



Wir haben 3 Möglichkeiten, den 1. Platz zu belegen (1. Spalte der Grafik). Ist der 1.Platz belegt, so haben wir noch 2 Möglichkeiten, für den 2.Platz (das wird durch die Zeilen der Grafik dargestellt). Für den 3. Platz verbleibt dann nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt sind das $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.
In Verallgemeinerung dieser Tatsache kann man zeigen, dass es genau
$k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten gibt, k Objekte auf k Plätzen anzuordnen.
Die Anzahl verschiedener Layouts einer Tastatur mit 50 Zeichen ist dann zum Beispiel gleich $50 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Die Kenntnis dieser Anzahl ist dann von praktischem Interesse, wenn man unter allen Varianten die beste finden möchte. Das Gebiet, welches sich mit derartigen Fragen befasst, nennt man kombinatorische Optimierung.
Das Produkt $k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1$ der ersten k natürlichen Zahlen kommt auch in vielen anderen mathematischen Fragestellungen vor. Deshalb führt man eine abkürzende Schreibweise dafür ein: $k! = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1$. $k!$ bezeichnet man als k Fakultät.
Die ***Fakultät*** und auch der sogenannte ***Binomialkoeffizient***, die wir im folgenden erläutern werden, sind abkürzende Schreibweisen für zwei mathematische Ausdrücke, die häufig in mathematischen Rechnungen vorkommen. Sie finden vor allem in der Kombinatorik Anwendung.
Auch können ***Binomische Formeln*** leicht unter Verwendung der ***Binomialkoeffizienten*** ausgerechnet werden.

Definition 1.20 (Die Fakultät) *Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man $n!$ (sprich* ***n Fakultät****) als:*
$0! = 1$ *und* $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ *für* $n > 0$
Die Fakultät $n!$ ist für $n > 0$ folglich das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.

a) $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

b) $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Definition 1.21 (Der Binomialkoeffizient) *Für $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$, definiert man den* ***Binomialkoeffizienten*** $\binom{n}{k}$ *(sprich* ***n über k*** *) als:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)}$$

a) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10$

b) $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{5}{1} = 5$

Aufgabe 1.6 Berechnen Sie Fakultät und Binomialkoefizient!

1.4.4.2 Kombinatorik

Satz 1.18 (Kombinatorische Bedeutung von Fakultät und Binomialkoeffizient) *Es gilt:*

1. ***Kombinatorische Bedeutung von*** $n!$

   $n!$ *ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene Objekte auf n Plätze anzuordnen.*

2. ***Kombinatorische Bedeutung von*** $\binom{n}{k}$

   $\binom{n}{k}$ *ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten genau k ($k \leq n$) auszuwählen.*

Wieviele Worte ergeben sich aus den 3 Buchstaben A,B,C?
Es ergeben sich die folgenden $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten: (A,B,C) (A,C,B) (B,A,C) (B,C,A) (C,A,B) (C,B,A).
Wieviele Wortkombinationen mit genau zwei der 3 Buchstaben A,B,C kann man bilden?
Es sind alle Paare aus den Buchstaben A,B,C zu bilden, deshalb ist k=2 und n=3 und es gibt genau $\binom{3}{2} = 3$ solche Paare: (A,B) (A,C) (B,C).
Zahlenlotto „6 aus 49 “:
Wieviele mögliche verschiedene Tipps gibt es beim Zahlenlotto „6 aus 49“?
Die Anzahl der verschiedenen Tipp-Möglichkeiten ist gleich der Anzahl, 6 verschiedene Zahlen aus 49 Zahlen auszuwählen, also gleich

$$\binom{n}{k} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{44\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 13983816.$$

Die Chance, beim Lotto „6 aus 49“6 Richtige zu ziehen ist also 1 zu ca. 14 Millionen.

Aufgabe 1.23 Auf einer Feier erhalten 10 Personen ein Glas Wein, je zwei stoßen miteinander an. Wie oft erklingen die Gläser?

Aufgabe 1.24 Am Ende eines Skiwochenendes fahren alle 30 Teilnehmer in einer langen Schlange den Berg hinunter. Auf wieviele Arten können sie sich zu einer Schlange formieren?

Aufgabe 1.25 5 Bücher sollen auf 5 Regalpl¨atze verteilt werden. Dabei stammen 2 vom gleichen Autor Peter Meier, die anderen 3 von 3 anderen Autoren.

1. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 5 Bücher in die 5 Regalplätze einzuordnen?
2. Bei wieviel Anordnungen stehen die beiden Bücher von Peter Meier nebeneinander?

1.4.4.3 Binomischer Lehrsatz

Ausdrücke der Form $(a+b)^n$ bezeichnet man als ***Binomische Formeln***.
Mit Hilfe der Binomialkoeffizienten lassen sich die Binomischen Formeln ausmultiplizieren.

Satz 1.19 (Der Binomische Lehrsatz) *Für alle $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

zum Binomischen Lehrsatz:
$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot a^{0-k} \cdot b^k = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot a^{1-k} \cdot b^k = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = a+b$$
$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k = \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 \cdot b^2 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot a^{3-k} \cdot b^k \\ &= \binom{3}{0} \cdot a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1} \cdot a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} \cdot a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3} \cdot a^0 \cdot b^3 \\ &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3\end{aligned}$$

Aufgabe 1.26 Rechnen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes die Binomische Formel $(a+b)^4$ aus!

1.4.4.4 Pascalsches Dreieck

Die Berechnung der Koeffizienten $\binom{n}{k}$ beim Ausrechnen der Binomischen Formel ist recht mühsehlig. Mit Hilfe des sogenannten ***Pascalschen Dreiecks*** können wir die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ relativ leicht ermitteln. Im Pascalschen Dreieck ordnen wir die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ in Form eines Deieckes an.
In der ersten Zeile steht $\binom{0}{0}$.
In der 2. Zeile stehen $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$.
In der 3. Zeile stehen $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$.
Und in der n+1.ten Zeile stehen alle Koeffizienten
$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ \ldots \ \binom{n}{n-1}, \ \binom{n}{n}.$$

Wir erhalten dann das Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

usw. usf.

Rechnen wir alle Binomialkoeffizienten in diesem Dreieck aus, so ergeben sich folgende Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

usw. usf.

Wir erkennen folgende Gesetzmäßigkeiten im Dreieck:

- Die Ränder des Dreiecks $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ sind für jedes n=0,1,..., gleich 1.
- Das Dreieck ist symmetrisch um die vertikale Mittelachse.
- Jeder Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ der nicht am Rand steht, ist die Summe der beiden Koeffizienten $(\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k})$ der vorhergehenden Reihe, in dessen Mitte er steht.

Wenn wir also die 5. Reihe berechnen wollen, so müssen wir nur folgende Zeile anfügen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

usw. usf.

Es ist also

$$\binom{4}{0} = 1,\ \binom{4}{1} = 4,\ \binom{4}{2} = 6,\ \binom{4}{3} = 4 \text{ und } \binom{4}{4} = 1.$$

Nach Binomischen Lehrsatz würde sich dann z.B. ergeben:
$(a+b)^4 \ = \ a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$.

Satz 1.20 (Eigenschaften des Binomialkoeffizienten) *Für Binomialkoeffizienten gelten folgende nützliche Eigenschaften:*

1. *Symmetrie:*
   Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$, gilt:

   (a) $\binom{n}{0} \ = \ \binom{n}{n} \ = \ 1$

   (b) $\binom{n}{1} \ = \ \binom{n}{n-1} \ = \ n$

(c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. *Rekursivität:*
   Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$, gilt:
   $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Aufgabe 1.27 Beweisen Sie Rekursivität des Binomialkoeffizienten:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$, gilt:
$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Aufgabe 1.28 Multiplizieren Sie mittels Pascalschem Dreieck das Polynom $(x+y)^6$ aus!

Aufgabe 1.7

Rechnen Sie mit den Gesetzmäßigkeiten im Pascalschen Dreieck!

1.4.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Soll eine Zahl a n mal mit sich selbst multipliziert werden, so schreibt man abkürzend:
$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$. Der Term a^n wird *"a hoch n"* gelesen. Berechnet man das Produkt $x = a^n$, so sprechen wir vom *Potenzieren*. a heißt *Basis* und n heißt *Exponent*.

Die Gleichung $x = a^n$ kann man nach a und nach n umstellen. Es ist $a = \sqrt[n]{x}$ und $n = \log_a(x)$. Die erste Operation nennt man *Wurzelziehen*, die zweite Operation heißt *Logarithmieren*. Das heißt, das Logarithmieren und das Wurzelziehen sind die beiden Umkehroperationen des Potenzierens.

1.4.5.1 Das Potenzieren

Für das Potenzieren gelten Rechengesetze. Die grundlegenden Potenzgesetze sind die folgenden:

1. $a^0 = 1$
2. $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$
3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
4. $a^{(-n)} = \frac{1}{a^n}$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{(-m)} = a^{(n-m)}$
6. $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
7. $(a^n)^m = a^{(n \cdot m)}$
8. $a^{n^m} = a^{(n^m)}$

Beispiele:

a) $$\left(\frac{x^3}{x^{-3}}\right)^{-1} = (x^3 \cdot x^3)^{-1} = (x^6)^{-1} = \frac{1}{x^6}$$

b) $\left(\dfrac{x^2}{a^3}\right)^{-2} \cdot 3x^2 \cdot a^{-4}$

$= \left(\dfrac{a^3}{x^2}\right)^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot a^{-4} = \dfrac{a^6}{x^4} \cdot 3 \cdot x^2 \cdot a^{-4} = 3 \cdot \dfrac{a^2}{x^2} = 3 \cdot \left(\dfrac{a}{x}\right)^2$

Aufgabe 1.29 Berechnen Sie folgende Potenzen und vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich!

a) $\dfrac{(15 \cdot x)^2}{5 \cdot x^{-3}}$

b) $\left(\dfrac{x^2}{a^3}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{3a^2}{4x^3}\right)^2 \cdot 5xa^{-4}$

c) $(a^8 - 1) \cdot (a^4 + 1)^{-1}$

d) $27 \cdot 3^{-6}$

e) $(a-b)^3 + 3(b-a)^3$

Aufgabe 1.8 Rechnen Sie mit Potenzen!

1.4.5.2 Das Wurzelziehen

Definition 1.22 (Rechenregeln für das Wurzelziehen) *Die Gleichung $x = a^n$ kann man nach a und nach n umstellen. Es ist $a = \sqrt[n]{x}$ (*"n-te Wurzel aus x"*).*
Diese Operation nennt man Wurzelziehen*, d.h., das Wurzelziehen ist eine Umkehroperation des Potenzierens.*
a heißt Wurzel*, x heißt* Radikand *und n* Radikator.
Aus den Potenzgesetzen, die für die Ausgangsgleichung $x = a^n$ gelten, folgen entsprechende Gesetze für die Wurzel. Dazu muss man sich nur klarmachen, dass gilt: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
Wurzelgesetze sind damit z.B. die folgenden:

1. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = (x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
2. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$
3. $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[m]{x})^n$
4. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = x^{\frac{-1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x}}$

usw., usf..

Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2-\sqrt{2}} \\
&= \frac{3}{2-\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{3 \cdot (2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2})} \\
&= \frac{3 \cdot (2+\sqrt{2})}{4-2} = \frac{3}{2} \cdot (2+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.30 Vereinfachen Sie folgende Terme!

a) $\sqrt[3]{x^6(2y)^{12}}$ b) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y}}$ c) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{y}}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{y}}$

Aufgabe 1.31 Erweitern Sie den Nenner mit Hilfe der Binomischen Formeln so, das keine Wurzeln mehr im Nenner vorhanden sind!

a) $\dfrac{2+3\sqrt{5}}{4-\sqrt{15}}$ b) $\dfrac{6-14\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Aufgabe 1.9 Rechnen Sie mit Wurzeln!

1.4.5.3 Das Logarithmieren

Definition 1.23 (Rechenregeln für das Logarithmieren) *Die Gleichung* $x = a^n$ *kann man nach* n *umstellen. Es ist* $n = \log_a(x)$. a *bezeichnet man als* Basis *des Logarithmus und* n *heißt* Logarithmus *von* x *zur Basis* a. *Diese Operation nennt man* Logarithmieren. *D.h., das Logarithmieren ist eine Umkehroperation des Potenzierens.*

Spezielle Logarithmen:
Ist die Basis gleich der Eulerschen Zahle e=2,718..., so sprechen wir vom natÃ¼rlichen Logarithmus *und schreiben kurz* $\log_e(x) = \ln(x)$.
Ist die Basis $a = 10$, *so sprechen wir vom* dekadischen Logarithmus *und schreiben kurz* $\log_{10}(x) = \lg(x)$.

Aus den Potenzgesetzen, die für die Ausgangsgleichung $x = a^n$ *gelten, folgen entsprechende Gesetze für den Logarithmus.*
Die grundlegenden Logarithmengesetze sind die folgenden:

1. *1-Regel:* $\log_a(a) = 1$
2. *0-Regel:* $\log_a(1) = 0$
3. *Potenzregel:* $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
4. *Produktregel:* $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
5. *Quotientenregel:* $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
6. *Reziproke Regel:* $\log_a(x) = \frac{1}{\log_x(a)}$
7. *Logarithmen-Umrechnung:* $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Daraus lassen sich weitere Regeln ableiten, wie zum Beispiel:

8. $a^{\log_a(x)} = x$ insbesondere $e^{ln(x)} = x$
9. Potenzregel: $\log_{a^x}(b) = \frac{1}{x}\cdot\log_a(b)$

Beispiel:
Vereinfachen Sie $4\log_{256}(16) - 2\log_4(64)$!
Es ist:

$$
\begin{aligned}
&4\log_{256}(16) - 2\log_4(64)\\
&= 4\cdot\frac{1}{\log_{16}(256)} - 2\cdot\log_4(4^3)\\
&= 4\cdot\frac{1}{\log_{16}(16^2)} - 2\cdot\log_4(4^3)\\
&= 4\cdot\frac{1}{2\cdot\log_{16}(16)} - 2\cdot 3\cdot\log_4(4)\\
&= 4\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 3\\
&= -4
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.32 Vereinfachen Sie folgende Terme ohne Taschenrechner!

a) $\lg(4) + 2\cdot\lg(5)$

b) $e^{5\cdot\ln(2)}$

c) $\log_{(a+b)}(a+b)^2$

d) $\log_5(625)$

e) $\lg\left(\frac{a^3 b}{c^2}\right)$

f) $\lg\left(\sqrt[3]{a^4 b^2}\right)$

Aufgabe 1.33 Berechnen Sie folgende Logarithmen ohne Taschenrechner!

a) $-\log_{125}(625) + 5\cdot\log_{125}(5)$

b) $2\cdot\log_{16}\left(\frac{1}{4}\right) + 20\cdot\log_{16}(4)$

c) $5\cdot\log_{125}\left(\frac{1}{5}\right) + 16\cdot\log_{125}(5)$

d) $\log_{27}(81) + 14\cdot\log_{27}(27)$

Aufgabe 1.10 Berechnen Sie Logarithmen!

Aufgabe 1.11 Rechnen Sie mit Logarithmen!

Aufgabe 1.12 Vereinfachen Sie Terme!

1.4.6 Beträge, Gleichungen und Ungleichungen

Sie müssen die Regeln des Rechnens mit Beträgen, und die Methoden zum Auflösen von Gleichungen und Ungleichungen beherrschen. Sie sollten Gleichungen und Ungleichungen lösen können, gerade in den Fällen, bei denen es sich um quadratische Gleichungen und Ungleichungen handelt, oder diese Beträge enthalten. Wir verweisen dazu auf das Brückenkursskript.

Aufgabe 1.34

Lesen Sie sich das Kapitel 1.7. in diesem Brückenkursskript durch!
Link:
http://www.htw-saarland.de/Members/grabowski/uebersicht/vl/Material_mathe_1_MST_KI/ws-07-08/Brueckenkurs-07-08

Lösen Sie folgende Übungsaufgaben!

Aufgabe 1.35 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen grafisch und analytisch!

a) $\frac{x-2}{x+1} \leq 2,\ x \neq -1$

b) $x^2 \geq 20$

c) $-x^2 > 16 - 8x$

d) $\|x-2\| > 5$

e) $\|x-2\| < x+1$

f) $\|x-2\| < |x+1|$

Aufgabe 1.36 Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\frac{x-2}{x+1} = 2,\ x \neq -1$

b) $x^2 = 20$

c) $-x^2 = 16 - 8x$

d) $\|x-2\| = 5$

e) $\|x-2\| = x+1$

f) $\|x-2\| = |x+1|$

1.4.7 Hausaufgabe

Hausaufgabe 4 : Übungsblatt 3

Literaturverzeichnis

[Pap01] L.Papula. Mathematik für Ingenieure. *Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig/Wiesbaden*, Band 1, 2005.