

Vorlesung Mathematik 1 ¹

B.Grabowski

21. November 2011

Zusammenfassung

Das vorliegende Papier umfasst den Inhalt der Vorlesung Mathematik 1 für Ingenieure und gibt Hinweise zu weiterführender Literatur. Wir verweisen auch auf die übliche Mathematik-Standard-Literatur, z.B. [Pap01]. Zur Ergänzung der im Skript enthaltenen Übungsaufgaben, d.h. zum weiteren Üben und zum Durchführen von Selbst-Kontrollen (Klausuren) verweisen wir auf unseren E-Learning-Tutor [MathCoach](#).

Inhaltsverzeichnis

1	Algebra-Grundlagen	3
1.1	Zweiwertige mathematische Logik	3
1.1.1	Aussagen und Boolesche Funktionen	3
1.1.2	Aussageformen	8
1.1.2.1	Allquantor \forall	8
1.1.2.2	Existenzquantor \exists	8
1.1.2.3	Verneinungen von Aussageformen	9
1.1.3	Anwendung der Booleschen Funktionen in der Schaltalgebra	10
1.1.4	Übungs- und Hausaufgaben	13
1.2	Beweisprinzipien	13
1.2.1	Mathematische Sätze	13
1.2.2	Der direkte Beweis	14
1.2.3	Der indirekte Beweis und der Widerspruchsbeweis	15
1.2.4	Vollständige Induktion	17
1.2.5	Übungs- und Hausaufgaben	19
1.3	Mengenlehre	19
1.3.1	Darstellung von Mengen	19
1.3.2	Mengenrelationen	20
1.3.3	Mengenoperationen	20
1.3.4	Besondere Mengen	23
1.3.4.1	Zahlenmengen	23
1.3.4.2	Intervalle reeller Zahlen	24
1.3.4.3	Kreuzmengen	24
1.3.5	Mächtigkeit von Mengen	25
1.3.6	Übungs- und Hausaufgaben	27
1.4	Rechnen mit reellen Zahlen	27
1.4.1	Der Zahlenaufbau	27
1.4.2	Brüche und Dezimalzahlen	28
1.4.2.1	Regeln der Bruchrechnung	28
1.4.2.2	Umrechnung von Dezimalzahlen in Brüche	29
1.4.3	Das Summen- und das Produktzeichen	30
1.4.3.1	Rechnen mit dem Summen- und Produktzeichen	30
1.4.3.2	Eigenschaften von Summen- und Produktzeichen	31
1.4.3.3	Indexverschiebung	32
1.4.4	Der binomische Lehrsatz	33
1.4.4.1	Fakultät und Binomialkoeffizient	33
1.4.4.2	Kombinatorik	34
1.4.4.3	Binomischer Lehrsatz	35
1.4.4.4	Pascalsches Dreieck	35
1.4.5	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	37
1.4.5.1	Das Potenzieren	37
1.4.5.2	Das Wurzelziehen	38

1.4.5.3	Das Logarithmieren	39
1.4.6	Beträge, Gleichungen und Ungleichungen	40
1.4.7	Hausaufgabe	41
2	Einführung in die Vektorrechnung	42
2.1	Punkte und Vektoren in der Ebene	42
2.2	Punkte und Vektoren im \mathbb{R}^n	44
2.3	Addition, Subtraktion und Vielfachbildung von Vektoren	47
2.3.1	Grafische Addition von Vektoren	47
2.3.2	Grafische Subtraktion von Vektoren	48
2.3.3	Rechnerische Addition von Vektoren	49
2.3.4	Rechnerische Subtraktion von Vektoren	49
2.3.5	Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	50
2.3.6	Eigenschaften von $+, -, * \lambda$	50
2.4	Der Betrag eines Vektors	51
2.4.1	Hausaufgabe	53
2.5	Das Skalarprodukt zweier Vektoren	53
2.5.1	Karthesische Definition des Skalarproduktes	54
2.5.2	Der Winkel zwischen 2 Vektoren	54
2.5.3	Eigenschaften des Skalarproduktes	57
2.5.4	Die Vektorprojektion	58
2.5.5	Hausaufgabe	59
2.6	Das Vektorprodukt	59
2.7	Das Spatprodukt	64
2.7.1	Hausaufgabe	67

Kapitel 1

Algebra-Grundlagen

In diesem Kapitel werden grundlegenden Bezeichnungen, Definitionen und Sätze aus der mathematischen Logik, der Technik des mathematischen Beweisens, der Mengenlehre und des Rechnen mit reellen Zahlen eingeführt. Ergänzend verweise ich auf das Mathe-Brückenlursskript der HTW und das Lehrbuch [Pap01]. Zum zusätzlichen interaktiven rechner-(web-)basierten Üben und zur Klausurvorbereitung sei auf unseren E-Learning-Tutor [MathCoach](#) verwiesen.

1.1 Zweiwertige mathematische Logik

1.1.1 Aussagen und Boolesche Funktionen

Gegenstand mathematischer Betrachtungen sind Aussagen.

Definition 1.1 *Eine Zusammenfassung von Worten heißt Aussage (der 2-wertigen Logik), wenn dieser eindeutig der Wahrheitswert “wahr” ($W,1$), oder “falsch” ($F,0$) zugeordnet werden kann.*

In der Mathematik geht es darum, den Wahrheitswert (W,F) von Aussagen zu ermitteln.

Beispiele

- (1) “Ich lüge jetzt” \rightarrow Weder W noch $F \rightarrow$ keine Aussage
- (2) “Ich würfale gleich eine 6” \rightarrow Weder W noch F , Chance $\frac{1}{6} \rightarrow$ keine Aussage
- (3) “4 ist eine ungerade Zahl” $\rightarrow F \rightarrow$ Aussage

Wir bezeichnen Aussagen im folgenden allgemein durch kleine Buchstaben: $a,b,c,\dots p,q,r,\dots$.

Aussagen können durch logische Operatoren miteinander verknüpft werden.

Definition 1.2 *Verknüpft man Aussagen durch logische Operatoren (auch Junktoren genannt), so entstehen sogenannte logische Ausdrücke.*

Logische Operatoren sind:

- \wedge (Und; Konjunktion)
- \vee (Oder; Disjunktion)
- \Rightarrow (Wenn.... so....; Implikation)
- \Leftrightarrow (genau dann, wenn; Äquivalenz)
- \neg (Nicht; Negation)

Beispiele:

- (1) a="Das Objekt ist ein Quadrat."
 b="Das Objekt ist ein Viereck."
 $a \Rightarrow b$ Lies: "Ist das Objekt ein Quadrat, so ist es auch ein Viereck."
- (2) $\neg(4 < 0)$ Lies: "4 ist nicht kleiner 0."
- (3) $\neg(4 < 0) \iff 4 \geq 0$ Lies: 4 ist nicht kleiner als 0 genau dann, wenn 4 größer oder gleich 0 ist. Bzw. das Relationszeichen dreht sich bei Negation um!

Definition 1.3 Eine Funktion, die jeweils k Aussagen a_1, \dots, a_k einen Ausdruck $A(a_1, \dots, a_k)$ zuordnet, heißt k -stellige Boolesche Funktion.

Schreibweise: $A: (a_1, \dots, a_k) \in \{W, F\}^k \rightarrow \{W, F\}$

Beispiele:

- (1) $A(a) = \neg a \rightarrow$ Einstellige Boolesche Funktion,
 $A: a \in \{W, F\} \rightarrow \{W, F\}$
- (2) $A(a, b) = a \vee b \rightarrow$ Zweistellige Boolesche Funktion,
 $A: (a, b) \in \{W, F\}^2 \rightarrow \{W, F\}$
- (3) $A(a, b, c) = a \wedge b \wedge c \rightarrow$ Dreistellige Boolesche Funktion,
 $A: (a, b, c) \in \{W, F\}^3 \rightarrow \{W, F\}$

Boolesche Funktionen haben nur endlich viele Werte in ihrem Definitions- und Wertebereich. Deshalb können wir sie vollständig durch ihre Wertetabellen beschreiben, die auch als Wahrheitstabellen bezeichnet werden.

Beispiele:

- (1) $A(a) = \neg a$

a	$A(a) = \neg a$
W	F
F	W

- (2) $A(a, b) = a \vee b$

a	b	$A(a, b) = a \vee b$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

- (3) $A(a, b, c) = a \wedge b \wedge c$

a	b	c	$A(a, b, c) = a \wedge b \wedge c$
W	W	W	W
W	W	F	F
W	F	W	F
W	F	F	F
F	W	W	F
F	W	F	F
F	F	W	F
F	F	F	F

Die Boolesche Funktion in Beispiel (3) ist z.B. nur dann wahr, falls alle ihre Argumente a,b,c wahr sind.

Die Beispiele zeigen, dass es genau 2^k mögliche Werte-Kombinationen der Argumente a_1, a_2, \dots, a_k der k-stelligen Booleschen Funktion gibt. Diese bestimmen die Zeilenzahl der Wahrheitstabelle, bei einstelligen Booleschen Funktionen (Beispiel 1) ist das $2^1 = 2$, bei zweistelligen (Beispiel 2) ist das $2^2 = 4$ und bei dreistelligen (Beispiel 3) $2^3 = 8$.

Im folgenden werden die Booleschen Grundfunktionen $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus$ durch ihre Wahrheitstabellen definiert.

Definition 1.4 Wahrheitstabellen von $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus$.

$A(a) = \neg a$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">$\neg a$</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> </table>	a	$\neg a$	W	F	F	W	Negation
a	$\neg a$							
W	F							
F	W							

$A(a, b) = a \vee b$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">b</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">$a \vee b$</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> </table>	a	b	$a \vee b$	W	W	W	W	F	W	F	W	W	F	F	F	Disjunktion
a	b	$a \vee b$															
W	W	W															
W	F	W															
F	W	W															
F	F	F															

$A(a, b) = a \wedge b$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">b</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">$a \wedge b$</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> </table>	a	b	$a \wedge b$	W	W	W	W	F	F	F	W	F	F	F	F	Konjunktion
a	b	$a \wedge b$															
W	W	W															
W	F	F															
F	W	F															
F	F	F															

$A(a, b) = a \Rightarrow b$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">b</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">$a \Rightarrow b$</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> </table>	a	b	$a \Rightarrow b$	W	W	W	W	F	F	F	W	W	F	F	W	Implikation
a	b	$a \Rightarrow b$															
W	W	W															
W	F	F															
F	W	W															
F	F	W															

$A(a, b) = a \Leftrightarrow b$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">b</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">$a \Leftrightarrow b$</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> </table>	a	b	$a \Leftrightarrow b$	W	W	W	W	F	F	F	W	F	F	F	W	Äquivalenz
a	b	$a \Leftrightarrow b$															
W	W	W															
W	F	F															
F	W	F															
F	F	W															

$A(a, b) = a \oplus b$	<table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">a</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">b</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">$a \oplus b$</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">W</td></tr> <tr><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td><td style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px;">F</td></tr> </table>	a	b	$a \oplus b$	W	W	F	W	F	W	F	W	W	F	F	F	Kontravalenz (bzw. Antivalenz)
a	b	$a \oplus b$															
W	W	F															
W	F	W															
F	W	W															
F	F	F															

Wir sehen folgendes: Die Disjunktion ist nur falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind. Die Konjunktion ist nur wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Die Äquivalenz ist nur wahr, wenn

beide Teilaussagen den gleichen Wahrheitswert haben. Die Kontravalenz ist nur wahr, wenn beide Teilaussagen unterschiedliche Wahrheitswerte haben. Die Implikation ist nur dann falsch, wenn aus einer wahren Aussage a eine falsche Aussage b folgen soll. Dass es sinnvoll ist, die Implikation als Wahr zu definieren, wenn aus etwas Falschem etwas Falsches folgt, zeigt folgendes Beispiel: Wenn der 23.12.2010 ein Dienstag ist, so ist der 23.12.2010 ein Mittwoch. Beide Teilaussagen sind falsch, d.h. der 23.12.2010 ist kein Dienstag und der 24.12.2010 kein Mittwoch. Trotzdem ist die Implikation eine wahre Aussage.

Aus diesen Tabellen für die Booleschen Grundfunktionen kann man die Wahrheitstabellen (Funktionstabellen) für alle anderen Booleschen Funktionen ermitteln.

Beispiele: Stellen Sie die jeweilige Wahrheitstabelle auf!

(1) $A(a, b) = \neg b \Rightarrow \neg a$

Lösung:

a	b	$\neg b$	$\neg a$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
W	W	F	F	W
W	F	W	F	F
F	W	F	W	W
F	F	W	W	W

(2) $A(a, b) = \neg [(\neg a) \wedge (\neg b)]$

Lösung:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$A(a, b)$
W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	F	W
F	W	W	F	F	W
F	F	W	W	W	F



Aufgabe 1.1

Stellen Sie die Wahrheitstabelle für $(a \wedge b) \oplus (a \vee b)$ auf!



Aufgabe 1.1

Geben Sie die Wahrheitstabellen an!

Wenn wir uns die Tabelle (1) und die Definitionen der Booleschen Grundfunktion $(a \Rightarrow b)$ genau ansehen, so erkennen wir, dass $(\neg b \Rightarrow \neg a)$ die gleiche Wahrheitstabelle wie $(a \Rightarrow b)$ besitzt. D.h. es gilt: $(a \Rightarrow b) \iff (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

Ebenso erkennen wir, dass $\neg [(\neg a) \wedge (\neg b)]$ die gleiche Wahrheitstabelle wie $(a \vee b)$ besitzt, d.h. es ist $\neg [(\neg a) \wedge (\neg b)] \iff (a \vee b)$.

Definition 1.5 Zwei k -stellige Boolesche Funktionen $A(a_1, \dots, a_k)$ und $B(a_1, \dots, a_k)$ heißen *äquivalent*, falls ihre Wahrheitstabellen übereinstimmen.

Schreibweise: $A(a_1, \dots, a_k) \iff B(a_1, \dots, a_k)$

Satz 1.1 *Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

1. $\neg(\neg a) \iff a$
2. $a \wedge b \iff b \wedge a$
3. $a \vee b \iff b \vee a$
4. $(a \implies b) \iff [(\neg b) \implies (\neg a)]$ *Kontraposition*
5. $(a \implies b) \iff (b \vee (\neg a))$
6. $(a \iff b) \iff (a \implies b) \wedge (b \implies a)$
7. $(a \iff b) \iff (b \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg b)$
8. $\neg(a \wedge b) \iff \neg a \vee \neg b$ *de Morgan'sche Regeln*
9. $\neg(a \vee b) \iff \neg a \wedge \neg b$
10. $(a \vee b) \wedge c \iff (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ *Distributivität*
11. $(a \wedge b) \vee c \iff (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
12. $(a \wedge b) \wedge c \iff a \wedge (b \wedge c)$
13. $(a \vee b) \vee c \iff a \vee (b \vee c)$
14. $(a \oplus b) \iff \neg(a \iff b)$

Bemerkung: Wie beim Rechnen mit reellen Zahlen sind bei der Darstellung logischer Ausdrücke Klammerregeln zu beachten!

Beweis: zu 10.)

Seien $A(a, b, c) = (a \vee b) \wedge c$, $B(a, b, c) = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$

Wir zeigen, dass die Wahrheitstabellen von A und B übereinstimmen.

a	b	c	$a \vee b$	$a \wedge c$	$b \wedge c$	$A(a, b, c)$	$B(a, b, c)$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	F
W	F	W	W	W	F	W	W
W	F	F	W	F	F	F	F
F	W	W	W	F	W	W	W
F	W	F	W	F	F	F	F
F	F	W	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

q.e.d

Beweis: zu 9.)

$A(a, b) = \neg a \wedge \neg b$

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$A(a, b)$
W	W	F	F	F
W	F	F	W	F
F	W	W	F	F
F	F	W	W	W

q.e.d



Aufgabe 1.2

Weisen Sie die folgende Äquivalenz nach: $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (b \vee (\neg a))$

Wie wir aus Satz 1.1 erkennen können, lässt sich jede andere Boolesche Funktion mit zwei oder mehr Argumenten (Eingängen) mit den Funktionen UND (Konjunktion), ODER (Disjunktion) und NICHT (Negation) realisieren. So kann man z.B. $a \Rightarrow b$ äquivalent durch $b \vee (\neg a)$ darstellen. In der Praxis der digitalen Schaltungstechnik wird das auch so gehandhabt. Deshalb sind diese drei Boolesche Funktionen \neg, \vee, \wedge die wichtigsten Grundfunktionen. Manchmal werden auch nur sie als Grundfunktionen bezeichnet.

1.1.2 Aussageformen

Definition 1.6 Ersetzt man in einer Aussage a eine Konstante durch eine Variable x , so entsteht eine sogenannte Aussageform $a(x)$.

Beispiele:

(1) $a(x) : x^2 \geq 0$

(2) $a(m) : m^2 \text{ gerade} \Rightarrow m \text{ gerade}$

Bei Aussageformen wird durch **Quantoren** angegeben, auf welche Werte für die enthaltene Variable x (oder m) sich die Aussageform bezieht.

1.1.2.1 Allquantor \forall

$\forall x \in M : a(x)$ man liest das so: "Für alle x aus der Menge M gilt $a(x)$ "

1.1.2.2 Existenzquantor \exists

$\exists x \in M : a(x)$ man liest das so: "Es existiert ein x aus der Menge M , für welches $a(x)$ gilt"

Beispiel: Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

"Die Menge \mathbb{N} besitzt ein kleinstes Element" kann wie folgt als logische Aussageform formuliert werden:

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq m$$

(d.h.: es existiert eine nat. Zahl m , die kleiner oder gleich jeder anderen nat. Zahl ist)

Weitere Beispiele

Logische Darstellung	Bedeutung
$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$	Das Quadrat jeder reellen Zahl ist ≥ 0
$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R} : x < z < y)$	Zwischen je 2 reellen Zahlen liegt eine dritte
$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n$	Zu jeder nat. Zahl gibt es eine größere nat. Zahl

Bemerkung: In der Klausur sollten Sie logische Aussagen als Boolesche Funktionen (logische Darstellung) darstellen können und ihre Bedeutung in Worten erklären können!

Beispiel:

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

x = Student x

G = Menge der Studenten an der HTW

$e(x) = x$ ist im ersten Semester

$m(x) = x$ besucht die Mathe-Vorlesung

Aufgabe: Stellen Sie folgende Sätze als logische Ausdrücke bzw. Aussageformen dar!

- (1) Jeder Student der HTW, der die Mathe-Vorlesung besucht, ist im 1. Semester.

Lösung: $\forall x \in G : m(x) \Rightarrow e(x)$

- (2) Nur Studenten des 1. Semesters (HTW) besuchen die Mathe-Vorlesung.

Lösung: $\forall x \in G : m(x) \Rightarrow e(x)$

- (3) Alle Studenten des 1. Semesters besuchen die Mathe-Vorlesung.

Lösung: $\forall x \in G : e(x) \Rightarrow m(x)$

- (4) Alle Studenten des 1. Semesters besuchen die Mathe-Vorlesung und kein anderer Student der HTW.

Lösung: $\forall x \in G : m(x) \Leftrightarrow e(x)$

**Aufgabe 1.3**

Formulieren Sie in Ergänzung des Beispiels folgende Aussage als Aussageform:

Es gibt einen Studenten der HTW, der im ersten Semester ist, aber die Mathevorlesung nicht besucht.

1.1.2.3 Verneinungen von Aussageformen

Definition 1.7 Existenz- und Allquantor werden wie folgt negiert (verneint):

$$\neg(\forall x \in M : a(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg a(x)$$

$$\neg(\exists x \in M : a(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg a(x)$$

Bei der Verneinung drehen sich die Quantoren um (aus \forall wird \exists und umgekehrt) und das Negationszeichen wird hinter den Quantor gezogen.

Beispiel:

Verneinen Sie: $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : n < k$

Lösung:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : n < k)$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \neg(\exists k \in \mathbb{N} : n < k)$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : \neg(n < k)$$

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : n \geq k$$

Bedeutung dieser Aussage: "N besitzt ein Maximum"



Aufgabe 1.4

Formulieren Sie folgende Aussage als Boolesche Funktionen bzw. Aussageformen:

- (a) Die Menge der natürlichen Zahlen hat ein Minimum.
- (b) Die Menge der natürlichen Zahlen hat kein Maximum.
- (c) Für je zwei reelle Zahlen gilt: Ist $a > b$, so ist auch $a^2 > b^2$
- (d) Negieren Sie die Aussage in (c)!
- (e) Bilden Sie die Negation der Aussage: Zwischen je zwei natürlichen Zahlen liegt ein Bruch.
- (f) Bilden Sie die Kontraposition der Aussage: $m^2 > 0 \implies m > 0$.



Aufgabe 1.5

Was bedeutet die folgende Aussageformen:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_o \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n > n_o \implies \frac{1}{n} < \epsilon$$

Was meinen Sie? Ist diese Aussageform wahr oder falsch?

1.1.3 Anwendung der Booleschen Funktionen in der Schaltalgebra

In der Schaltungstechnik verwendet man Boolesche Funktionen zur Beschreibung von Schaltungen. Begründet wurde diese als Schaltalgebra bezeichnete Vorgehensweise hauptsächlich von Claude Shannon in seiner Master-Abschlussarbeit A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits von 1937. Die Schaltnetze, die man mithilfe der Schaltalgebra beschreibt, wurden früher hauptsächlich in Relais-Technik oder ähnlichen elektromechanischen Bauweisen hergestellt und die Booleschen Funktionen wurden zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den Zuständen von Schaltern im Innern einer Schaltanordnung verwendet. In der Regel wird hierbei dem Schalterzustand "aus" eine logische Null zugeordnet, dem Schalterzustand "ein" entsprechend eine logische Eins. Die Darstellung von \wedge erfolgt durch eine Parallelschaltung, bei der die Lampe nur brennt, wenn beide Schalter geschlossen sind. Die Darstellung von \vee erfolgt durch eine Reihenschaltung, bei der die Lampe brennt, wenn mindestens einer der beiden Schalter geschlossen ist, siehe Abbildung 1.1.

In der heutigen Digitaltechnik werden k-stellige Boolesche Funktionen nicht durch Schalter bzw. Relais, sondern durch elektronischen Bauelemente (Gatter) aufgebaut. Die Werte der Argumente der Booleschen Funktion sind die Eingänge des jeweiligen Gatters, der Wert der Booleschen Funktion der Ausgang des Gatters. Hierbei werden die logischen Werte der Eingänge durch unterschiedliche Spannungspegel realisiert. Im Normalfall bedeutet hier der höhere Pegel die logische Eins (bzw. W) und der niedrigere Pegel die logische Null (bzw. F), siehe Abbildung . Dabei reichen 3 Grundgatter, das AND-, OR-, und NOT-Gatter, zur Darstellung aller Booleschen Schaltungen aus (siehe auch Satz 1.1 über die Äquivalenz von Booleschen Funktionen). Zusätzlich wird manchmal das XOR-Gatter verwendet.

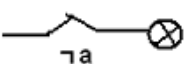

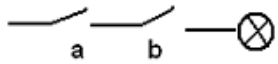
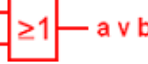
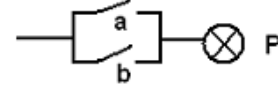

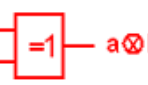
Boolsche Funktion	Schaltungen in der Schaltungstechnik	Gatter in der Digitaltechnik
$\neg a$	 Die Lampe brennt nicht bei gedrücktem Schalter	NOT  $a \rightarrow \neg a$
$a \vee b$	 Reihenschaltung	OR  $a \vee b$
$a \wedge b$	 Parallelschaltung	AND  $a \wedge b$
		XOR  $a \oplus b$

Abbildung 1.1: Darstellung Boolescher Grundfunktionen durch Schaltungen und Gatter

Man kann aus den in Abbildung 1.1 aufgeführten Grundsaltungen und Gatter komplexere Schaltungen und Gatter zusammenbauen, siehe Abbildung 1.2.

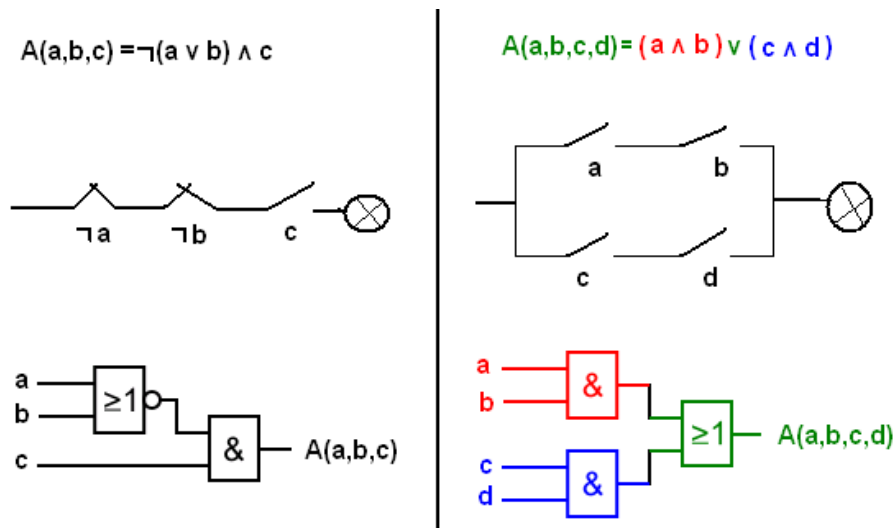


Abbildung 1.2: Darstellung komplexerer Boolescher Funktionen durch Schaltungen und Gatter

Beispiele:

- (1) Konstruieren Sie ein Gatter mit zwei Eingängen und einem Ausgang, das nur dann am Ausgang eine 1 hat, wenn beide Eingänge den gleichen Zustand (entweder beide 1 oder beide 0) haben. Alternativ lautet die Aufgabe: Konstruieren Sie eine Schaltung mit zwei Schaltern, bei der die Lampe nur brennt, wenn beide Schalter offen oder beide gedrückt sind.

Lösung:

Zunächst beschreiben wir die gewünschte Schaltung durch die passende Boolesche Funktion. Das ist offensichtlich $A(a,b) = a \Leftrightarrow b$.

$a \Leftrightarrow b$ wird nun durch Verwendung der Grundfunktionen \wedge, \vee, \neg dargestellt. Es ist $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)]$, siehe Satz 1.1 über die Äquivalenz von Booleschen Funktionen. Die gesuchte Boolesche Funktion kann durch die folgende Schaltung bzw. Gatter unter

Verwendung von AND-, OR-, und NOT dargestellt werden:

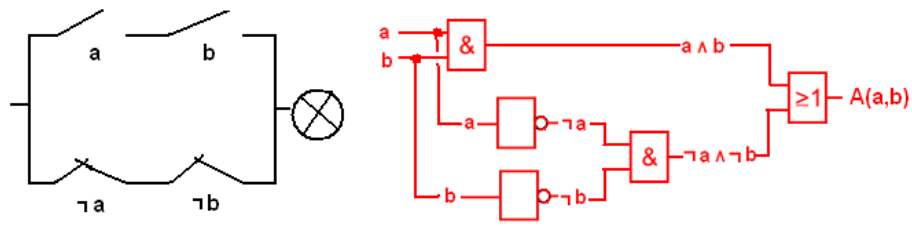


Abbildung 1.3: Darstellung der Booleschen Funktion $A(a, b) = a \Leftrightarrow b$ durch Schaltung und Gatter

(2) Vereinfachen Sie folgende Schaltung:

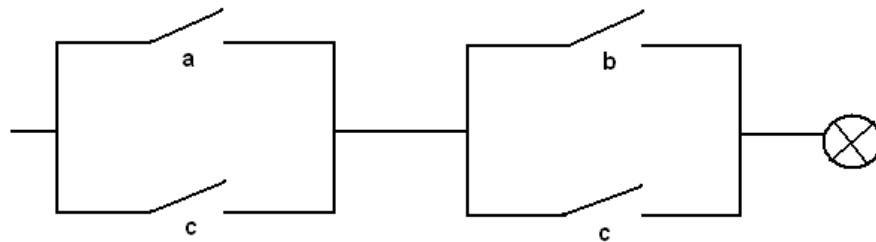


Abbildung 1.4: Zu vereinfachende Schaltung

Lösung:

Wir beschreiben die Schaltung zunächst durch eine Boolesche Funktion, offensichtlich lässt sie sich durch die folgende Boolesche Funktion darstellen: $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

Diese Funktion können wir durch Anwendung des Distributivgesetzes (siehe Satz 1.1) vereinfachen:

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee c$$

Daraus ergibt sich die folgende Vereinfachung der Schaltung:

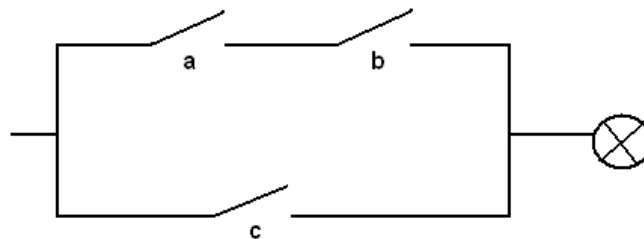


Abbildung 1.5: Äquivalente vereinfachte Schaltung



Aufgabe 1.6

Konstruieren Sie ein Gatter mit drei Eingängen a, b und c und einem Ausgang, das nur dann am Ausgang den Wert 1 hat (die Lampe brennt), wenn alle drei Eingänge das gleiche Eingangssignal besitzen ($a=b=c=1$ oder $a=b=c=0$). Wie sieht die dazugehörige Schaltung aus?



Aufgabe 1.7

Vereinfachen Sie den folgenden booleschen Ausdruck und stellen Sie ihn als Schaltung und als Gatter nur unter Verwendung von AND, OR und NOT dar!

$$(\neg(a \wedge b) \vee b) \Rightarrow c$$

1.1.4 Übungs- und Hausaufgaben



Hausaufgabe 1 : Übungsblatt 1

1.2 Beweisprinzipien

1.2.1 Mathematische Sätze

Gegenstand mathematischer Betrachtungen sind Aussagen, die als Lehrsätze formuliert werden. Ein mathematischer Satz hat folgende Gestalt:

Satz

Voraussetzung: a (wird als W angesehen)

Behauptung: b

Kurzform:

Satz Es gilt: $a \Rightarrow b$.

Bezeichnungen: In dieser Implikation wird a als hinreichend für b und b als notwendig für a bezeichnet.

Beispiele:

- **Satz** Es gilt: A ist ein Quadrat $\Rightarrow A$ ist ein Viereck
- **Satz** Beh.: Wenn m^2 eine gerade natürliche Zahl ist, so ist auch m eine gerade natürliche Zahl.
- **Satz** Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen hat kein Maximum.

Bei der Formulierung eines Satzes wird oft die Angabe von "Es gilt:" oder "Behauptung: (Beh.:" weggelassen. Zu jedem Satz gehört ein Beweis. Ein Beweis ist der Nachweis, dass die Behauptung des Satzes, also b , Wahr ist, bzw. dass aus $a=W$ folgt, dass $b=W$ ist. Dazu wenden wir die Prinzipien der mathematischen Logik an. Wir unterscheiden 3 verschiedene Techniken des Beweisens:

- der direkte Beweis
- der indirekte Beweis und der Widerspruchsbeweis
- das Prinzip der Vollständigen Induktion

1.2.2 Der direkte Beweis

Satz Behauptung: $a \Rightarrow b$

Um die Aussage des Satzes zu beweisen, leiten wir ausgehend von der Voraussetzung, dass $a = W$ ist, Schritt für Schritt her, dass $b = W$ ist. Am Ende eines erfolgreichen Beweises steht q.e.d (quot erra demonstrandum) als Zeichen dafür, dass der Beweis zu Ende ist.

Allgemein sieht dann ein direkter Beweis zum obigen Satz wie folgt aus:

Beweis: Sei $a = W$. Daraus folgt $a_1 = W$, daraus folgt $a_2 = W, \dots$, daraus folgt $b = W$.
q.e.d.

Wir werden das Prinzip des direkten Beweises nun an 3 Beispielen demonstrieren.

Satz 1.2

Vor.: $m \in \mathbb{N}$ und m ist durch 2 teilbar (gerade).

Beh.: m^2 ist durch 2 teilbar (gerade)

Beweis: Sei m eine gerade natürliche Zahl.

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = 2 * k$$

$$\Rightarrow m^2 = (2k)^2 = 4 * k * k = 2 * (2 * k * k)$$

$$\Rightarrow m^2 = 2 * r \text{ und } r (= 2 * k * k) \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow m^2 \text{ ist gerade.}$$

q.e.d.

Satz 1.3

Vor.: Sei $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

Beh.: $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n*(n+1)}{2}$

Beweis: Es ist

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & = & S & \text{und} \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 & = & S \\ \Rightarrow & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & = & 2S \end{array}$$

$$\Rightarrow n * (n+1) = 2S$$

$$\Rightarrow S = \frac{n*(n+1)}{2}$$

q.e.d.

Satz 1.4

Vor.: $n \in \mathbb{N}$

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^3+2}{n^5+n} > \frac{1}{n^2}$

Beweis: Wir formen die Behauptung solange äquivalent um, bis man sieht, ob sie wahr ist oder falsch.

$$\begin{array}{l} \frac{n^3+2}{n^5+n^2} > \frac{1}{n^2} \quad \parallel * n^2 * (n^5 + n^2) \\ \Leftrightarrow (n^3 + 2) * n^2 > 1 * (n^5 + n^2) \\ \Leftrightarrow n^5 + 2n^2 > n^5 + n^2 \quad \parallel - (n^5 + n^2) \\ \Leftrightarrow n^2 > 0 \end{array}$$

Das ist offensichtlich für alle $n \in \mathbb{N}$ der Fall.

q.e.d.

**Aufgabe 1.8**

Beweisen Sie folgende Sätze mittels "direktem Beweis".

(a) **Satz** Ist $m \in \mathbb{N}$ ungerade so ist auch m^2 ungerade.

(b) **Satz**

Vor.: Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei punktsymmetrische Funktionen, d.h. es gilt:

$$-f(x) = f(-x) \text{ und } -g(x) = g(-x)$$

Beh.: Dann ist die Funktion $h(x) = f(x) * g(x)$ achsensymmetrisch, d.h. es gilt: $h(x) = h(-x)$.

(c) **Satz** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n q^i = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

1.2.3 Der indirekte Beweis und der Widerspruchsbeweis

Grundlage als indirekten Beweis ist die **Kontraposition** $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

Statt:

Satz Es gilt: $a \Rightarrow b$

zeigen wir die äquivalente Kontraposition:

Satz Es gilt: $\neg b \Rightarrow \neg a$

Diese zeigen wir durch den direkten Beweis.

Beispiel:

Satz 1.5 $\forall m \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn m^2 gerade (a), so ist m gerade (b).

Beweis: Durch direkten Beweis lässt sich diese Aussage nicht nachweisen.

Wir verwenden den indirekten Beweis und zeigen die Kontraposition:

m ist ungerade ($\neg b$) $\Rightarrow m^2$ ist ungerade ($\neg a$)

Diese zeigen wir durch den direkten Beweis:

Sei m ungerade ($\neg b$) $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : m = 2k + 1$ ($2k+1$ ist allgemeine Darstellung ungerader (d.h. nicht durch 2 teilbarer) Zahlen für $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$)

$$\Rightarrow m^2 = (2k + 1)^2 = (2k)^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow 2 * (2k^2 + 2k) + 1$$

$$\Rightarrow m^2 = 2r + 1, r \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow m^2 \text{ ist ungerade.}$$

q.e.d.

Eine andere spezielle Form des indirekten Beweises ist der Widerspruchsbeweis.

Satz:

(Vor.: wird nicht explizit hingeschrieben, es gilt das gesamte bisherige Vorwissen als Voraussetzung)

Beh: b

Bew: indirekt: Wir nehmen an, dass gilt $\neg b = W$. Hieraus leiten wir Schritt für Schritt auf direktem Wege $\Rightarrow a_1 = W \Rightarrow a_2 = W \Rightarrow a_3 = W \dots \Rightarrow \dots$ einen Widerspruch zu unserem bisherigen Wissen, oder zu $\neg b = W$ ab.

Demzufolge kann die Annahme $\neg b = W$ nicht stimmen, d.h.es muss $\neg b = F$ sein und folglich ist $b = W$.

q.e.d.

Wir demonstrieren dieses Beweisprinzip an einem Beispiel.

Satz 1.6 Beh: Die Menge aller reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ ist nicht durchnummerierbar.

Bew.:(Cantorsches Diagonalverfahren)

Annahme: Die reellen Zahlen x mit $0 < x < 1$ sind durchnummerierbar.

Nummerierung:

$$x_1 = 0, x_{11}x_{12}x_{13}\dots$$

$$x_2 = 0x_{21}x_{22}x_{23}\dots$$

$$x_i = 0, x_{i1}x_{i2}x_{i3}\dots x_{ii}\dots$$

wobei $(x_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\})$

Mit dieser Nummerierung sind dann alle Zahlen x mit $0 < x < 1$ erfasst, der erste Index i charakterisiert die Nummer der Zahl in der Durchnummerierung und der zweite Index j die Position der Nachkommastelle der Zahl.

Wir konstruieren nun eine neue Zahl:

$$x^* = 0, x_{11}^* x_{22}^* x_{33}^* \dots x_{ii}^* \dots$$

$$\text{mit } x_{ii}^* = \begin{cases} x_{ii} + 1 & \text{falls } x_{ii} < 9 \\ 0 & \text{falls } x_{ii} = 9 \end{cases}$$

Offensichtlich ist

$x^* \neq x_1$, weil die 1. Ziffer hinterm Komma nicht stimmt

$x^* \neq x_2$, weil die 2. Ziffer hinterm Komma nicht stimmt

$x^* \neq x_i$, weil die i .te Ziffer hinterm Komma nicht stimmt

usw. usf..

D.h. x^* ist eine Zahl, die auch zwischen 0 und 1 liegt, aber nicht durch unsere Nummerierung erfasst werden konnte. D.h. man benötigt mehr Zahlen als natürliche Zahlen existieren, um alle Zahlen aus $(0,1)$ zu erfassen bzw. durch zu nummerieren.

\Rightarrow Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass sich alle reellen Zahlen $\in (0, 1)$ (durch die Menge \mathbb{N}) nummerieren lassen.

q.e.d.

**Aufgabe 1.9**

Beweisen Sie folgende Sätze mittels "indirektem Beweis".

- Satz** Ist m^2 für $m \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist auch m ungerade.
- Satz** Ist m^2 für $m \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar, so ist auch m durch 5 teilbar.
- Satz** Die Menge der natürlichen Zahlen hat kein Maximum.

1.2.4 Vollständige Induktion

Siehe hierzu auch [diesen Link](#).

Diese Technik wird auf Behauptungen der folgenden Form angewendet:

Satz Beh: \forall natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt $a(n)$.

Kurzschreibweise: $\forall n \geq n_0 : a(n)$.

Beispiele:

a) **Satz** $\forall n \geq 4 : 2^n \leq n!$ ($n_0 = 4$)

b) **Satz** $\forall n \geq 1 : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ($n_0 = 1$)

c) **Satz** $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n^3+2n^2}{n^5+n^2} \geq \frac{1}{n^2}$ ($n_0 = 1$)

Allgemeine Beweistechnik der vollständigen Induktion:

Beweis:

(a) **I.A. (Induktionsanfang)** $n = n_0$

Wir zeigen, dass $a(n_0)$ gilt (d.h. $a(n) = W$ für den Startwert $n = n_0$)

(b) **I.S. (Induktionsschritt)**

Vor: $a(n)$

Beh: $a(n+1)$

D.h. wir zeigen, wenn $a(n)$ für irgendein beliebiges festes n Wahr ist, so ist $a(n+1)$, -d.h. die Aussage auch für den Nachfolger von $a(n)$ - Wahr. Damit gilt $a(n)$ für alle $n \geq n_0$, denn es gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} a(n_0) = W & \rightarrow & a(n_0 + 1) = W & \rightarrow & a(n_0 + 1 + 1) = W & \rightarrow & \dots \\ I.A. & & I.S. & & I.S. & & I.S. \end{array}$$

Wir demonstrieren das Beweisprinzip der Vollständigen Induktion an 3 Beispielen.

Satz 1.7 $\forall n \geq 1 : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis: V.I.

(a) **I.A.** $n_0 = 1$

LS (linke Seite): $\sum_{i=1}^1 i = 1$

RS (rechte Seite): $\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$

\Rightarrow LS=RS $\Rightarrow a(n_0) = W$

q.e.d.

(b) **I.S.**

Vor: Für ein festes beliebiges n gilt: $a(n) : \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Beh: $a(n+1) : \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Bew:

Die Beweistechnik für den Induktionsschritt I.S. kann man wie folgt allgemein beschreiben. Wir gehen von der linken Seite (LS) der Behauptung aus, **zerlegen** sie so, dass die linke Seite der Voraussetzung darin vorkommt, **ersetzen** dann die linke Seite der Voraussetzung durch die rechte Seite der Voraussetzung und **formen** dann den entstehenden Ausdruck solange **um**, bis die rechte Seite (RS) der Behauptung da steht.

$$LS_{Beh} = \sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \sum_{i=1}^n i + (n+1) \quad (\text{Zerlegung})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{Ersetzung}) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (\text{Umformen}) \\
&= RS_{Beh}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 1.8 $\forall n \geq 1 : \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{(n+1)^2 * (n)^2}{4}$

Bew: V.I.

(a) **I.A.** Wir zeigen, dass $a(n)$ für $n = n_0 = 1$ gilt.

$$n_0 = 1 : LS = \sum_{i=1}^1 i^3 = 1^3 = 1$$

$$RS = \frac{(1+1)^2 * (1)^2}{4} = 1$$

$$\implies LS = RS$$

q.e.d.

(b) **I.S.**

$$\text{Vor: } \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{(n+1)^2 * n^2}{4}$$

$$\text{Beh: } \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{(n+2)^2 * (n+1)^2}{4}$$

Bew:

$$\begin{aligned}
LS_{Beh} &= \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 \quad (\text{Zerlegung}) \\
&= \frac{(n+1)^2 * n^2}{4} + (n+1)^3 \quad (\text{Ersetzung}) \\
&= \frac{(n+1)^2 * n^2 + 4(n+1)^3}{4} \quad (\text{Umformung}) \\
&= \frac{(n+1)^2 (n^2 + 4 * (n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \\
&= RS_{Beh}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 1.9 $\forall n \geq 4 : 2^n < n!$

Bew: V.I.

(a) **I.A.** $n_0 = 4 : LS = 2^4 = 16, RS = 4! = 24 \implies LS < RS.$

q.e.d.

(b) **I.S.**

Vor: $2^n < n!$

Beh: $2^{(n+1)} < (n+1)!$

Bew:

$$\begin{aligned}
LS_{Beh} &= 2^{(n+1)} = 2^n * 2 \quad (\text{Zerlegung}) \\
&< n! * 2 \quad (\text{Ersetzung}) \\
&\leq n! * (n+1) \quad (\text{Umformung}) \\
&= (n+1)! \\
&= RS_{Beh}
\end{aligned}$$

q.e.d.

**Aufgabe 1.10**

Beweisen Sie folgende Sätze mittels "Vollständiger Induktion".

- (a) **Satz** Ist m^2 für $m \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist auch m ungerade.
- (b) **Satz** Ist m^2 für $m \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar, so ist auch m durch 5 teilbar.
- (c) **Satz** Die Menge der natürlichen Zahlen hat kein Maximum.

1.2.5 Übungs- und Hausaufgaben**Hausaufgabe 2 : Übungsblatt 2, Aufgabe 1****1.3 Mengenlehre**

Definition 1.8 Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohl unterschiedener Objekte, die hinsichtlich einer oder mehrerer Eigenschaften als gleichartig angesehen werden können, zu einer Gesamtheit.

Schreibweisen:

- A, B, C, \dots, M = Mengen
- $M = \{o_1, o_2, \dots, o_k\}$, o_i = Elemente der Menge
- $\{\}$ = leere Menge
- $x \in M$: x ist Element von M
- $x \notin M$: x ist kein Element von M

1.3.1 Darstellung von Mengen

1. $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \Rightarrow$ Aufzählen aller Elemente der Menge. Bsp.: $M = \{3, 6, 9\}$
2. Durch Angabe einer die Elemente charakterisierenden Eigenschaft: $M = \{(x \in D) \mid E(x)\}$
($E(x)$ = definierende Eigenschaft).

Beispiel:

- $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{3} \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq n \leq 12\}$
 - $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ = Menge der nicht negativen reellen Zahlen.
 - $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}\}$ = Menge der Brüche = Menge der rationalen Zahlen
 - $\mathbb{Z} = \{n \mid n \in \mathbb{N} \vee n = 0 \vee -n \in \mathbb{N}\}$ = Menge der ganzen Zahlen
3. Induktive Definition einer Menge
 $n_0 \in M \wedge n \in M \Rightarrow f(n) \in M$
 ($f(n)$ ist eine gegebene Funktion)

Beispiel:

- $\mathbb{N} : 1 \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Menge aller durch 2 teilbaren nat. Zahlen: $A : 2 \in A \wedge (n \in A \Rightarrow n + 2 \in A)$

1.3.2 Mengenrelationen

Definition 1.9 1. $A \subseteq B$ heißt: Die Menge A ist in B enthalten.

$$(A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B)$$

2. $A = B$ heißt: A und B sind identisch, d.h. enthalten genau die gleichen Elemente.

3. $A \subset B$ heißt: Die Menge A ist in B echt enthalten.

$$(A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ und } A \neq B.)$$

Venn-Diagramme:

Die grafische Darstellung von Mengenrelationen und Operationen erfolgt durch sogenannte Venn-Diagramme.

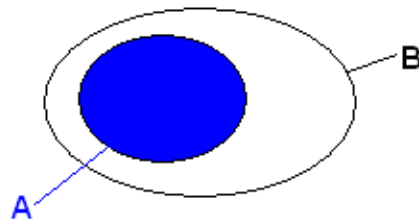


Abbildung 1.6: Darstellung der Relation $A \subset B$ im Venn-Diagramm

Beispiele:

1. $\{2, 4, 6\} \subset \mathbb{N}$
2. $\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$

Definition 1.10 Die Menge $P = \{A \mid A \subseteq M\}$ aller Teilmengen einer Menge M heißt Potenzmenge von M .

Beispiel:

Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Die Potenzmenge von M ist dann $P = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, M\}$.

1.3.3 Mengenoperationen

Definition 1.11

1. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ sprich: A vereinigt B
2. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ sprich: A geschnitten B
3. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ sprich: "A minus B" bzw. "A ohne B"

Beispiel:

Seien $A = \{2, 3, 4\}$ und $B = \{2, 4, 8\}$. Dann ist:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 8\}$$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

$$A \setminus B = \{3\}$$

$$B \setminus A = \{8\}.$$

Auch die Mengenoperationen kann man im Venn-Diagramm verdeutlichen, siehe Abbildung 1.7.

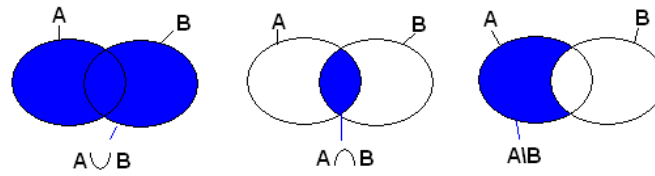


Abbildung 1.7: Darstellung der Mengenoperationen \cup, \cap, \setminus im Venn-Diagramm



Aufgabe 1.11

Durch welche Formeln werden die rot gekennzeichneten Mengen beschrieben?

1. 2. 3.

4. 5. 6.

Trage die Nummer der passenden Grafik in die leeren Felder ein!

- | | | | |
|------------------------|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 1) $(A \cap B) \cup C$ | <input type="checkbox"/> | 4) $(A \cap B) \cap C$ | <input type="checkbox"/> |
| 2) $A \cup (B \cap C)$ | <input type="checkbox"/> | 5) $(B \cup C) \setminus A$ | <input type="checkbox"/> |
| 3) $A \cap (B \cup C)$ | <input type="checkbox"/> | 6) $(B \cap C) \setminus A$ | <input type="checkbox"/> |

Definition 1.12 Zwei Mengen A und B heißen disjunkt (durchschnittsfremd), falls gilt:

$$A \cap B = \{\}$$

Beispiel: Die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 4, 6\}$ sind disjunkt.

Definition 1.13 Sei $A \subseteq M$. Dann heißt M Obermenge von A und $\bar{A}_M = \{x \in M \mid x \notin A\}$ heißt Komplement (bzw. Komplementärmenge) von A bzgl M .

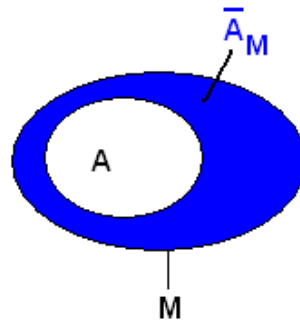


Abbildung 1.8: Darstellung des Mengen-Komplements im Venn-Diagramm

Offensichtlich gilt: $\bar{A}_M = M \setminus A$.

Beispiele:

- $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$. Dann ist $\bar{A}_M = \{1, 3, 5\}$
- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge der geraden nat. Zahlen. Dann ist $\bar{A}_{\mathbb{N}} = \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}$ die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

**Aufgabe 1.12**

Verwenden Sie die richtigen Symbole!

**Aufgabe 1.2**

Berechnen Sie folgende Mengen!

**Aufgabe 1.3**

Veranschaulichen Sie Mengenoperationen im Venn-Diagramm!

Für die Mengenoperationen gelten folgende Rechenregeln.

Satz 1.10 (Eigenschaften von Mengenoperationen)

Beh.: Es gilt:

1. $\bar{\bar{A}} = A$
2. $A \cap B = B \cap A$ Kommutativität
3. $A \cup B = B \cup A$ Kommutativität
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Assoziativität
5. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Assoziativität
6. $(A \cap B) \cup C = (C \cup B) \cap (C \cup A)$ Distributivität
7. $(A \cup B) \cap C = (C \cap B) \cup (C \cap A)$ Distributivität

8. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ De Morgansche Regel

9. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ De Morgansche Regel

10. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

11. $A \cap A = A \cup A = A$

12. $A \cap \{\} = \{\}, A \cup \{\} = A$

Beweisen kann man diese Rechenregeln auf sehr anschauliche Weise mittels Venn-Diagrammen. Dazu stellt man die linke und die rechte Seite der entsprechenden zu beweisenden Gleichung im Venn-Diagramm dar und prüft, ob die Grafiken, die die Mengen beider Seiten darstellen, identisch sind. Wir demonstrieren das an einem Beispiel.

Beweis zu 8. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (De Morgansche Regel):

Wir stellen die linke Seite und die rechte Seite dieser Gleichung im Venn-Diagramm dar, siehe Abbildung 1.9.

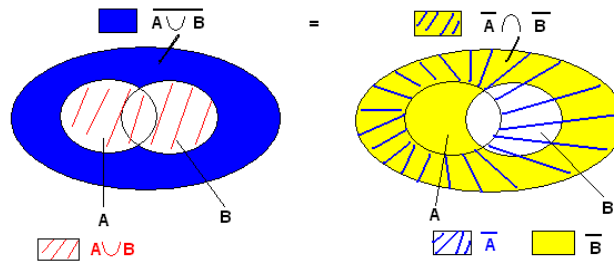


Abbildung 1.9: Darstellung der De Morganschen Regel im Venn-Diagramm

Wie wir an dieser Abbildung sehen, sind die linke und die rechte Seite der Gleichung 8. identisch. q.e.d.



Aufgabe 1.13

Beweisen Sie die Beziehungen 7. und 10. des Satzes 1.10 mittels Venn-Diagrammen!



Aufgabe 1.4

Welche Mengen sind gleich? Geben Sie die richtigen Mengenoperationen an!

1.3.4 Besondere Mengen

1.3.4.1 Zahlenmengen

In der Mathematik unterscheiden wir Mengen von Zahlen. So zum Beispiel die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen und die reellen Zahlen. Die Bezeichnungen der uns bisher bekannten Zahlenbereiche listen wir im folgenden auf.

- Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.
(Induktive Definition: $1 \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$)

- Menge der natürlichen Zahlen mit der Null: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{Z} = \{z \mid z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N} \vee z = 0\}$.
- Menge der rationalen Zahlen (Brüche): $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \vee n \in \mathbb{N}\}$.
Die Brüche kann man als periodische oder endliche Dezimalzahlen darstellen, so z.B. ist $\frac{1}{2} = 0,5$ eine endliche Dezimalzahl und $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ eine periodische Dezimalzahl.
- Menge der irrationalen Zahlen:
 $\mathbb{I} =$ Menge aller nicht endlichen und nicht periodischen Dezimalzahlen.
So z.B. sind $\sqrt{2}$ und die Eulersche Zahl e und die Zahl π irrationale Zahlen.
- Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

1.3.4.2 Intervalle reeller Zahlen

Für $a \leq b$ unterscheiden wir folgende Intervalle:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ geschlossenes Intervall von a bis b .
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (linksseitig) halboffenes Intervall von a bis b .
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (rechtsseitig) halboffenes Intervall von a bis b .
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall von a bis b .
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ und $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ und $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.



Aufgabe 1.14

Geben Sie folgende Menge als Intervall an!

$$((-2, 4] \cap [-3, 1)) \cup [0, 5]$$

1.3.4.3 Kreuzmengen

Definition 1.14 Das Gebilde (x_1, x_2, \dots, x_n) für $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$, $n \in \mathbb{N}$ heißt n -Tupel.

Bezeichnungen:

$n = 2$: (x_1, x_2) geordnetes Paar

$n = 3$: (x_1, x_2, x_3) Tripel

$n = 4$ (x_1, x_2, x_3, x_4) Quadrupel

Achtung

Tupel unterscheiden sich von Mengen dadurch, dass die Reihenfolge der Elemente bei Tupeln eine Rolle spielt und bei Mengen nicht. Es ist $M = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ und $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$

Beispiel

Eine Parabel wird durch eine Menge von Punkten dargestellt:

$$f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}. \text{ Kurzschreibweise: } y = x^2, x \in \mathbb{R}.$$

Definition 1.15

$A = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\} = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ heißt Kreuzmenge von A_1, \dots, A_n

Bezeichnung für Kreuzmengen aus n identischen Mengen: $B \times B \times \dots \times B = B^n$

Beispiele:

Rechteck der Seitenlängen 3 und 2:

$$A = \{(x, y) \mid x \in [-1, 2] \wedge y \in [-1, 1]\} = [-1, 2] \times [-1, 1]$$

Dreidimensionaler Würfel der Kantenlänge 1:

$$W = \{(x, y, z) \mid x \in [0, 1] \wedge y \in [0, 1] \wedge z \in [0, 1]\} = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^3$$

Quadrat der Seitenlänge 2:

$$A = [-1, 1]^2$$

Die reelle Zahlenebene:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

Der n -dimensionale reelle Raum:

$$\mathbb{R}^n = \text{Menge aller } n\text{-Tupel mit } x_i \in \mathbb{R} \forall i = 1 \dots n.$$

Weitere Beispiele:

Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2\}$.

Dann ist:

$$AxB = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$$

$$BxA = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Wir sehen, dass das Kreuzprodukt \times nicht kommutativ ist, d.h. es gilt i.A. $A \times B \neq B \times A$.

$$(AxB) \setminus (BxA) = \{(3, 1), (3, 2)\}$$

$$(BxA) \setminus (AxB) = \{(1, 3), (2, 3)\}$$

$$(AxB) \cap (BxA) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$$

Wir sehen, dass in unserem Beispiel $(AxB) \cap (BxA) = (A \cap B) \times (A \cap B)$ ist. Das kann man auch allgemein für beliebige Mengen A und B nachweisen.



Aufgabe 1.15 Zeigen Sie dass für beliebige Mengen A und B folgende Behauptung stimmt:

$$\text{Satz: Es gilt } (AxB) \cap (BxA) = (A \cap B)^2$$

1.3.5 Mächtigkeit von Mengen

Definition 1.16 Sei M eine Menge. Dann ist $|M|$ gleich der Anzahl der Elemente in M .

Beispiele

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 13\} \Rightarrow |M| = 7$$

$$|\{\emptyset\}| = 0$$

$$|p(A)| = 2^{|A|}$$

Definition 1.17

- a) Eine Menge M mit $|M| = k \in \mathbb{N}$ heißt endlich.
 b) Eine Menge M mit $|M| = |\mathbb{N}|$ heißt abzählbar ∞
 c) Eine Menge M mit $|M| > |\mathbb{N}|$ heißt überabzählbar ∞

Definition 1.18 2 Mengen A, B heißen gleichmächtig, falls gilt: $|A| = |B|$

Satz 1.11 Es gilt

$$|M| = |\mathbb{N}|$$

\Leftrightarrow

Es existiert bijektive Abbildung von $f: M \leftrightarrow \mathbb{N}$, die jedes Element aus M genau ein Element aus \mathbb{N} zuordnet und umgekehrt.

\Leftrightarrow

Alle Elemente von M sind durchnummerierbar.

Beispiel

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen.

Behauptung: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

Beweis: Wir definieren eine bijektive Zuordnung $\mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{N}$ der natürlichen zu den ganzen Zahlen wie folgt, d.h. wir numerieren die ganzen Zahlen wie folgt durch:

Wir ordnen der ganzen Zahl 0 die natürliche Zahl 1 zu, den positiven ganzen Zahlen die geraden natürlichen Zahlen und den negativen ganzen Zahlen die ungeraden natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{N}$$

.....

$$-3 \leftrightarrow 7$$

$$-2 \leftrightarrow 5$$

$$-1 \leftrightarrow 3$$

$$0 \leftrightarrow 1$$

$$1 \leftrightarrow 2$$

$$2 \leftrightarrow 4$$

.....

q.e.d

Für den Nachweis, dass auch die Menge \mathbb{Q} der Brüche abzählbar unendlich ist, benötigen wir eine bijektive Abbildung zwischen \mathbb{Q} und \mathbb{N} . Diese lässt sich nicht so leicht konstruieren. Wir verwenden hier den folgenden Satz.

Satz 1.12

- a) Seien $A_i, i = 1, \dots, k$ k endliche Mengen. Dann ist $\bigcup_{i=1}^k A_i = A_1 \cup A_2 \dots A_k$ auch endlich.
 b) Seien $A_i, i = 1, 2, \dots, k$ k abzählbare ∞ Mengen. Dann ist $\bigcup_{i=1}^k A_i$ abzählbar ∞ .
 c) Seien $A_i, i = 1, 2, \dots$ abzählbar unendlich viele abzählbare ∞ Mengen. Dann ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ abzählbar ∞ .

Mit Hilfe dieses Satzes können wir leicht zeigen, dass die Menge der Brüche ebenfalls abzählbar unendlich ist, d.h. es gibt genauso viele Brüche, wie natürliche Zahlen.

Satz 1.13 Es gilt: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$

Beweis: Sei $\mathbb{Q}_n = \{\frac{n}{m} \mid m \in \mathbb{N}\} = \{\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{4}, \dots\} \Rightarrow |\mathbb{Q}_n| = |\mathbb{N}| \Rightarrow \mathbb{Q}_n$ ist für jedes feste $n \in \mathbb{Z}$ abzählbar ∞ .

Weiterhin ist $\mathbb{Q} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Q}_n$

und folglich ist \mathbb{Q} die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbar ∞ Mengen \mathbb{Q}_n . Nach Satz 1.12 c) ist damit \mathbb{Q} abzählbar ∞ , also gilt $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

q.e.d.

Satz 1.14

Es gilt:

- $|(0, 1)| > |\mathbb{N}|$
- $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$
- Jedes reelle Zahlenintervall (a, b) ist überabzählbar ∞ .

1.3.6 Übungs- und Hausaufgaben



Hausaufgabe 3 : Übungsblatt 2, Aufgaben 2 bis 8

1.4 Rechnen mit reellen Zahlen

1.4.1 Der Zahlenaufbau

\mathbb{N} = **Natürliche Zahlen**

erlaubte Operationen: $<, >, =, \neq, +, *$ (Abkürzung für $+$).

Problem: Die Lösung x von $x + 7 = 2$ führt aus \mathbb{N} heraus, es ist $x = -5$.

$\mathbb{Z} = \{z \mid z \in \mathbb{N} \vee -z \in \mathbb{N} \vee z = 0\}$ = **Ganze Zahlen**

erlaubte Operationen: $<, >, =, \neq, +, -, *$ (Abkürzung für $+$).

Problem: Die Lösung x von $x * 7 = 2$ führt aus \mathbb{Z} heraus, es ist $x = \frac{2}{7}$.

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ = **Rationale Zahlen**

Besonderheit: Menge der rationalen Zahlen = Menge der endlichen oder periodischen Dezimalzahlen. Z.B. $\frac{2}{5} = 0,4$, $\frac{7}{3} = 2,666\bar{6}$.

erlaubte Operationen: $<, >, =, \neq, +, -, *, /$.

Problem: Die Diagonale d in einem Quadrat der Seitenlänge 1 ergibt sich nach Pythagoras als Lösung der Gleichung $d^2 = 2$. Diese Lösung $d = \sqrt{2}$ ist kein Bruch, d.h. die Lösung dieser Gleichung führt aus \mathbb{Q} heraus.

$\mathbb{Irr} = \text{Irrationale Zahlen} = \text{Menge der nichtendlichen und nichtperiodischen Dezimalzahlen.}$

Besonderheit: Zur Menge der irrationalen Zahlen gehören z.B. $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$, $\pi = 3,1415926\dots$ und die Eulersche Zahl $e = 2,7182818\dots$.

Bei praktischen Rechnungen muss man irrationale Zahlen runden, dabei entstehen Rundungsfehler, die sich zu sehr großen Fehlern fortpflanzen können.

Besser ist es, bei Rechnungen so lange wie möglich das entsprechende Zahlensymbol e , π , $\sqrt{2}$ usw. zu verwenden und erst zu runden, wenn der Term nicht weiter vereinfacht werden kann. Das machen z.B. Mathematik-Softwaresysteme, die als *Computeralgebrasysteme (CAS)* bezeichnet werden. Mathematik-Software, die nicht mit Symbolen rechnen kann, bezeichnet man demgegenüber als *numerische Software*.

Irrationale Zahlen kann man in berechenbare und nichtberechenbare Zahlen unterscheiden. Eine Zahl heißt berechenbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der sie mit jeder beliebigen vorgegebenen Genauigkeit (= Stellenzahl nach dem Komma) ermitteln kann. Andernfalls heißt sie nicht berechenbar. z.B. ist $\sqrt{2}$ berechenbar, π ist nicht berechenbar.

erlaubte Operationen: $<$, $>$, $=$, \neq , $+$, $-$, $*$, $/$, Potenzieren, $\sqrt{\quad}$, $\log_a(\quad)$.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Irr} = \text{Reelle Zahlen} = \text{Alle Dezimalzahlen.}$

Besonderheit: Zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine dritte. Die reellen Zahlen kann man nicht mehr durchnummerieren (abzählen), d.h. \mathbb{R} ist überabzählbar unendlich, bzw. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

erlaubte Operationen: $<$, $>$, $=$, \neq , $+$, $-$, $*$, $/$, Potenzieren, $\sqrt{\quad}$, $\log_a(\quad)$.

Problem: Die Lösungen x der Gleichung $x^2 + 4 = 0$ führen aus \mathbb{R} heraus, es ist $x = \sqrt{-1} * 2$ oder $x = \sqrt{-1} * 2$.

$\mathbb{C} = \{x + \sqrt{-1} * y \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \text{Komplexe Zahlen.}$

Besonderheit: Die neue Zahl $j = \sqrt{-1}$ wird als imaginäre Einheit bezeichnet.

erlaubte Operationen: $=$, \neq , $+$, $-$, $*$, $/$, Potenzieren, $\sqrt{\quad}$, $\log_a(\quad)$. Es sind alle arithmetischen Operationen möglich, es treten keine Probleme mehr auf. Aber in \mathbb{C} gibt es keine Ordnung mehr, man kann komplexe Zahlen nicht anordnen, $<$ und $>$ sind nicht mehr erlaubt.

Mit komplexen Zahlen werden wir uns im Sommersemester befassen. In den folgenden Abschnitten beschäftigen wir uns mit reellen Zahlen.

1.4.2 Brüche und Dezimalzahlen

1.4.2.1 Regeln der Bruchrechnung

Sie müssen die Regeln der Bruchrechnung perfekt beherrschen. Dazu verweisen wir auf das Brückenkurskript, Kapitel 1.4.



Aufgabe 1.16

Lesen Sie sich das Kapitel 1.4. in diesem Brückenkurskript durch!

Link:

http://www.htw-saarland.de/Members/grabowski/uebersicht/v1/Material_mathe_1_MST_KI/ws-07-08/Brueckenkurs-07-08

Lösen Sie anschließend folgende Übungsaufgaben!



Aufgabe 1.17 Vereinfachen Sie folgende Terme!

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$

b) $\frac{7}{2} + \frac{8}{3}$

c) $\frac{(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} - \frac{1}{4}}$

d) $\frac{3x}{x+y} + \frac{2y}{x+y} - \frac{2x+y}{x+y}$

e) $\frac{a}{xy} + \frac{b}{x} - \frac{c}{y}$

f) $\frac{3x}{4-y} : (4+y)$

g) $\frac{x}{x^2-9} + \frac{7-x}{x^2-6x+9}$

h) $\frac{3-x}{x^2-4} + \frac{2x+1}{x^2-4x+4}$

i) $\frac{3}{\frac{x+3}{x-2}} + \frac{\frac{x-102}{x-4}}{x+3}$



Aufgabe 1.5

Lösen Sie diese Aufgaben zur Bruchrechnung in MathCoach!

1. Dividieren Sie Brüche!
2. Kürzen Sie Brüche!
3. Bilden Sie den Hauptnenner!
4. Vereinfachen Sie Terme!
5. Ordnen Sie Brüche an!

1.4.2.2 Umrechnung von Dezimalzahlen in Brüche

Brüche sind endliche oder periodische Dezimalzahlen.

Beispiele:

$$\frac{1}{5} = 0.2 \text{ und } \frac{1}{3} = 0.33\bar{3}$$

Die Umrechnung von Brüchen in Dezimalzahlen erfolgt einfach durch schriftliche Division.

Beispiel:

$$\frac{3}{11} = 3 : 11 = 0,207207\overline{207}...$$

Die Umrechnung von Dezimalzahlen in Brüche erfolgt so:

Endliche Dezimalzahlen mit k Nachkommastellen werden mit 10^k erweitert, d.h. die Zahl wird mit 10^k multipliziert, das ergibt den Zähler des Bruches; und anschließend durch 10^k dividiert. Das Ergebnis kann man dann noch kürzen.

Beispiel:

$$21.345 = \frac{21.345 \cdot 10^3}{10^3} = \frac{21345}{1000} = \frac{4269}{200}$$

Nicht endliche, aber periodische Dezimalzahlen p , bei denen die Periode in der k -ten Nachkommastelle beginnt und m Ziffern die Periode bilden, werden wie folgt umgerechnet:

1. Sie werden mit 10^m multipliziert, wir erhalten $10^m * p$
2. Die Differenz $q = 10^m * p - p$ ist immer eine endliche Dezimalzahl
3. Diese endliche Dezimalzahl q wird wie oben beschrieben als Bruch dargestellt
4. Anschließend wird $q = 10^m * p - p$ nach p umgestellt, wir erhalten das Ergebnis: $p = \frac{q}{10^m - 1}$

Beispiele

1. $p = 0.\overline{3}$ ist umzurechnen.

Es ist $m = 1$, nur eine Ziffer (die 3) ist an der Periode beteiligt, und wir erhalten

$$10 * p - p = 3.\overline{3} - 0.\overline{3} = 3$$

Daraus folgt

$$p = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2. $p = 21.12\overline{3}$ ist umzurechnen.

Es ist $m = 1$ (nur die Ziffer 3 ist an der Periode beteiligt) und wir erhalten

$$10 * p - p = 211.2\overline{3} - 21.12\overline{3} = 211.23\overline{3} - 21.12\overline{3} = 211.23 - 21.12 = 190.11 = \frac{19011}{100}$$

Daraus folgt

$$p = \frac{\frac{19011}{100}}{10-1} = \frac{19011}{900} = \frac{6337}{300}$$

3. $p = 21.12\overline{345}$ ist umzurechnen.

Es ist nun $m = 3$, denn die drei Ziffern 345 sind an der Periode beteiligt, und wir erhalten

$$10^3 * p - p = 21123.45\overline{345} - 21.12\overline{345} = 21123.45 - 21.12 = 21101.88 = \frac{2110188}{100}$$

Daraus folgt

$$p = \frac{\frac{2110188}{100}}{10^3-1} = \frac{2110188}{99900} = \frac{527547}{24975}$$



Aufgabe 1.18 Rechnen Sie folgende Dezimalzahlen in Brüche um!

a) $0.2\overline{4}$

c) $341.901\overline{123}$

b) $12.\overline{12}$

d) $-1.2\overline{87}$

1.4.3 Das Summen- und das Produktzeichen

1.4.3.1 Rechnen mit dem Summen- und Produktzeichen

Möchte man das Quadrat aller Zahlen von 1 bis 10 addieren, so müsste man schreiben: $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100$. Wir verwenden dafür eine abkürzende Schreibweise: $\sum_{i=1}^{10} i^2$. Die abkürzende Schreibweise lohnt sich, wenn man viele Summanden addieren möchte. Für die Summe der Quadrate aller Zahlen von 1 bis 1000 schreiben wir dann z.B. $\sum_{i=1}^{1000} i^2$.

\sum heißt *Summenzeichen*. Im folgenden beschäftigen wir uns mit diesem Summenzeichen \sum und außerdem mit dem *Produktzeichen* \prod .

Definition 1.19 (Summen- und Produktzeichen) Wir verwenden für die Summe von n reellen Zahlen folgende abkürzende Schreibweise:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Der erste Summand wird gebildet durch die Zuordnung $i = 1$ zu a_i und man erhält a_1 . Im folgenden wird der Laufindex i jeweils um 1 erhöht und man erhält den nächsten Summanden. Der letzte

Summand a_n ergibt sich dann für $i = n$. Diese Schreibweise lässt sich verallgemeinern, für $m \leq n$ ist:

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{i=m}^n a_i$$

i heißt Summationsindex, m und n sind die Summationsgrenzen und a_m, \dots, a_n sind die Summanden.

Analog definieren wir das Produkt von reellen Zahlen:

$$a_1 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=1}^n a_i \quad \text{und} \quad a_m \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{i=m}^n a_i$$

Beispiele zum Summen- und Produktzeichen.

- a) $4 + 8 + 16 = \sum_{i=2}^4 2^i$
- b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i}$
- c) $-x + x^2 - x^3 + x^4 = \sum_{i=1}^4 (-1)^i \cdot x^i$
- d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \prod_{i=2}^5 \frac{1}{i}$
- e) $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = \prod_{i=1}^3 i^2$



Aufgabe 1.19 Stellen Sie den Term mittels Summen- bzw. Produktzeichen dar!

- a) $2 - 4 + 6 - 8 + 10$
- b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6}$



Aufgabe 1.20 Berechnen Sie den Wert der Summen und Produkte!

- a) $\sum_{i=2}^4 2^i$
- b) $\sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i}$
- c) $\sum_{i=1}^4 (-1)^i \cdot i$
- d) $\prod_{i=1}^4 \frac{i}{i+1}$
- e) $\prod_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \cdot \frac{i+1}{i}$
- f) $\sum_{i=-1}^2 \left((2i)^2 - i \right)$
- g) $\sum_{i=1}^5 (2i + 3i^2 - 4)$

1.4.3.2 Eigenschaften von Summen- und Produktzeichen

Für das Summen- und Produktzeichen gelten natürlich die gleichen Regeln wie für das Addieren und Multiplizieren von reellen Zahlen. Zum Beispiel gelten folgende Eigenschaften:

Satz 1.15 Es ist:

1. $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$
2. $\sum_{i=1}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^n a_i$
3. $\sum_{i=1}^n c = n \cdot c$
4. $\sum_{i=k}^n c = (n-k+1) \cdot c$

Analog gilt für das Produktzeichen:

Satz 1.16 *Es ist:*

1. $\prod_{i=1}^n (a_i)^n = (\prod_{i=1}^n a_i)^n$
2. $\prod_{i=1}^n a_i \cdot b_i = \prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i$
3. $\prod_{i=1}^n c = c^n$
4. $\prod_{i=k}^n c = c^{(n-k+1)}$



Aufgabe 1.21 Die Summe

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

bezeichnet man als arithmetisches Mittel der Zahlen x_1, \dots, x_n . Rechnen Sie die Summen auf der linken Seite der folgenden Gleichungen aus und weisen Sie dadurch nach, dass sie gleich der rechten Seite sind!

- a) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$
- b) $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot (\bar{x})^2$

1.4.3.3 Indexverschiebung

Die Darstellung einer Summe von Zahlen durch ein Summenzeichen ist nicht eindeutig. Z.B. Kann man leicht prüfen, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{10} i = \sum_{i=11}^{20} (i - 10) = \sum_{i=21}^{30} (i - 20) = \sum_{i=-9}^0 (i + 10)$$

Oft ist es sinnvoll, den Laufindex i von einem anderen Startwert als 1 anfangen zu lassen. Damit sich der Wert der Summe nicht verändert, ist folgende Regel zu beachten:

Wenn wir die Summationsgrenzen unter und über dem Summenzeichen um eine konstante Zahl c erhöhen, so müssen wir in den Summanden a_i die Indexvariable i um diese Konstante c verringern!
 Wenn wir die Summationsgrenzen unter und über dem Summenzeichen um eine konstante Zahl c verringern, so müssen wir in den Summanden a_i die Indexvariable i um diese Konstante c erhöhen!
 Diesen Vorgang nennt man *Indexverschiebung*.

Satz 1.17 (Indexverschiebung) *Es gilt für jede Zahl $c \geq 0$:*

$$\sum_{i=n}^m a_i = \sum_{i=n+c}^{m+c} a_{i-c} = \sum_{i=n-c}^{m-c} a_{i+c}$$

Analog gilt:

$$\prod_{i=n}^m a_i = \prod_{i=n+c}^{m+c} a_{i-c} = \prod_{i=n-c}^{m-c} a_{i+c}$$



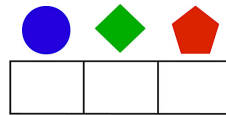
Aufgabe 1.22 Füllen Sie die richtigen Werte in die leeren Felder (Kästchen) ein!

- a) $\sum_{i=2}^4 2^i = \sum_{i=3}^5 \square$
- b) $\sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \cdot \frac{1}{i} = \sum_{i=\square}^{\square} (-1)^i \cdot \frac{1}{i-1}$
- c) $\prod_{i=0}^5 \frac{i}{i+1} = \prod_{i=-10}^{\square} \square$
- d) $\prod_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \cdot \frac{i+1}{i} = \prod_{i=10}^{\square} (-1)^{i-8} \cdot \frac{i-8}{i-9}$

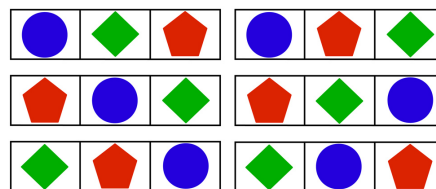
1.4.4 Der binomische Lehrsatz

1.4.4.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 3 Symbole auf 3 Felder zu legen, so dass in jedem Feld ein Symbol liegt?



Offensichtlich sind das folgende 6 Möglichkeiten:



Wir haben 3 Möglichkeiten, den 1. Platz zu belegen (1. Spalte der Grafik). Ist der 1. Platz belegt, so haben wir noch 2 Möglichkeiten, für den 2. Platz (das wird durch die Zeilen der Grafik dargestellt). Für den 3. Platz verbleibt dann nur noch eine Möglichkeit. Insgesamt sind das $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten. In Verallgemeinerung dieser Tatsache kann man zeigen, dass es genau $k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten gibt, k Objekte auf k Plätzen anzuordnen.

Die Anzahl verschiedener Layouts einer Tastatur mit 50 Zeichen ist dann zum Beispiel gleich $50 \cdot 49 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.



Die Kenntnis dieser Anzahl ist dann von praktischem Interesse, wenn man unter allen Varianten die beste finden möchte. Das Gebiet, welches sich mit derartigen Fragen befasst, nennt man kombinatorische Optimierung.

Das Produkt $k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 1$ der ersten k natürlichen Zahlen kommt auch in vielen anderen mathematischen Fragestellungen vor. Deshalb führt man eine abkürzende Schreibweise dafür ein: $k! = k \cdot (k - 1) \cdot \dots \cdot 1$. $k!$ bezeichnet man als k Fakultät.

Die **Fakultät** und auch der sogenannte **Binomialkoeffizient**, die wir im folgenden erläutern werden, sind abkürzende Schreibweisen für zwei mathematische Ausdrücke, die häufig in mathematischen Rechnungen vorkommen. Sie finden vor allem in der Kombinatorik Anwendung.

Auch können **Binomische Formeln** leicht unter Verwendung der **Binomialkoeffizienten** ausgerechnet werden.

Definition 1.20 (Die Fakultät) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man $n!$ (sprich **n Fakultät**) als:

$$0! = 1 \text{ und } n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \text{ für } n > 0$$

Die Fakultät $n!$ ist für $n > 0$ folglich das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen.

a) $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

b) $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Definition 1.21 (Der Binomialkoeffizient) Für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$, definiert man den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (sprich **n über k**) als:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)}$$

a) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$

b) $\binom{5}{4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{1} = 5$



Aufgabe 1.6 Berechnen Sie Fakultät und Binomialkoeffizient!

1.4.4.2 Kombinatorik

Satz 1.18 (Kombinatorische Bedeutung von Fakultät und Binomialkoeffizient) Es gilt:

1. **Kombinatorische Bedeutung von $n!$**

$n!$ ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, n verschiedene Objekte auf n Plätze anzuordnen.

2. **Kombinatorische Bedeutung von $\binom{n}{k}$**

$\binom{n}{k}$ ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten, aus n verschiedenen Objekten genau k ($k \leq n$) auszuwählen.

Wieviele Worte ergeben sich aus den 3 Buchstaben A,B,C?

Es ergeben sich die folgenden $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten: (A,B,C) (A,C,B) (B,A,C) (B,C,A) (C,A,B) (C,B,A).

Wieviele Wortkombinationen mit genau zwei der 3 Buchstaben A,B,C kann man bilden?

Es sind alle Paare aus den Buchstaben A,B,C zu bilden, deshalb ist $k=2$ und $n=3$ und es gibt genau $\binom{3}{2} = 3$ solche Paare: (A,B) (A,C) (B,C).

Zahlenlotto „6 aus 49“:

Wieviele mögliche verschiedene Tipps gibt es beim Zahlenlotto „6 aus 49“?

Die Anzahl der verschiedenen Tipp-Möglichkeiten ist gleich der Anzahl, 6 verschiedene Zahlen aus 49 Zahlen auszuwählen, also gleich

$$\binom{n}{k} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816.$$

Die Chance, beim Lotto „6 aus 49“ 6 Richtige zu ziehen ist also 1 zu ca. 14 Millionen.



Aufgabe 1.23 Auf einer Feier erhalten 10 Personen ein Glas Wein, je zwei stoßen miteinander an. Wie oft erklingen die Gläser?



Aufgabe 1.24 Am Ende eines Skiwochenendes fahren alle 30 Teilnehmer in einer langen Schlange den Berg hinunter. Auf wieviele Arten können sie sich zu einer Schlange formieren?



Aufgabe 1.25 5 Bücher sollen auf 5 Regalplätze verteilt werden. Dabei stammen 2 vom gleichen Autor Peter Meier, die anderen 3 von 3 anderen Autoren.

1. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die 5 Bücher in die 5 Regalplätze einzuordnen?
2. Bei wieviel Anordnungen stehen die beiden Bücher von Peter Meier nebeneinander?

1.4.4.3 Binomischer Lehrsatz

Ausdrücke der Form $(a + b)^n$ bezeichnet man als **Binomische Formeln**.

Mit Hilfe der Binomialkoeffizienten lassen sich die Binomischen Formeln ausmultiplizieren.

Satz 1.19 (Der Binomische Lehrsatz) Für alle $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

zum Binomischen Lehrsatz:

$$(a + b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \cdot a^{0-k} \cdot b^k = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \cdot a^{1-k} \cdot b^k = \binom{1}{0} \cdot a^1 \cdot b^0 + \binom{1}{1} \cdot a^0 \cdot b^1 = a + b$$

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \cdot a^{2-k} \cdot b^k = \binom{2}{0} \cdot a^2 \cdot b^0 + \binom{2}{1} \cdot a^1 \cdot b^1 + \binom{2}{2} \cdot a^0 \cdot b^2 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \cdot a^{3-k} \cdot b^k \\ &= \binom{3}{0} \cdot a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1} \cdot a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} \cdot a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3} \cdot a^0 \cdot b^3 \\ &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \end{aligned}$$



Aufgabe 1.26 Rechnen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes die Binomische Formel $(a + b)^4$ aus!

1.4.4.4 Pascalsches Dreieck

Die Berechnung der Koeffizienten $\binom{n}{k}$ beim Ausrechnen der Binomischen Formel ist recht mühselig. Mit Hilfe des sogenannten **Pascalschen Dreiecks** können wir die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ relativ leicht ermitteln. Im Pascalschen Dreieck ordnen wir die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ in Form eines Dreiecks an.

In der ersten Zeile steht $\binom{0}{0}$.

In der 2. Zeile stehen $\binom{1}{0}$, $\binom{1}{1}$.

In der 3. Zeile stehen $\binom{2}{0}$, $\binom{2}{1}$, $\binom{2}{2}$.

Und in der n+1.ten Zeile stehen alle Koeffizienten

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}.$$

Wir erhalten dann das Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\
 & & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & & & & \text{usw. usf.} & & & &
 \end{array}$$

Rechnen wir alle Binomialkoeffizienten in diesem Dreieck aus, so ergeben sich folgende Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & \text{usw. usf.} & & & &
 \end{array}$$

Wir erkennen folgende Gesetzmäßigkeiten im Dreieck:

- Die Ränder des Dreiecks $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$ sind für jedes $n=0,1,\dots$, gleich 1.
- Das Dreieck ist symmetrisch um die vertikale Mittelachse.
- Jeder Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ der nicht am Rand steht, ist die Summe der beiden Koeffizienten $\binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n-1}{k}$ der vorhergehenden Reihe, in dessen Mitte er steht.

Wenn wir also die 5. Reihe berechnen wollen, so müssen wir nur folgende Zeile anfügen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & & & & & \text{usw. usf.} & & & &
 \end{array}$$

Es ist also

$$\binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4 \text{ und } \binom{4}{4} = 1.$$

Nach Binomischen Lehrsatz würde sich dann z.B. ergeben:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4.$$

Satz 1.20 (Eigenschaften des Binomialkoeffizienten) Für Binomialkoeffizienten gelten folgende nützliche Eigenschaften:

1. Symmetrie:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$, gilt:

$$(a) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$(b) \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$(c) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. *Rekursivität:*

Für alle $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$, gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$



Aufgabe 1.27 Beweisen Sie Rekursivität des Binomialkoeffizienten:

Für alle $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$, gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$



Aufgabe 1.28 Multiplizieren Sie mittels Pascalschem Dreieck das Polynom $(x + y)^6$

aus!



Aufgabe 1.7

Rechnen Sie mit den Gesetzmäßigkeiten im Pascalschen Dreieck!

1.4.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Soll eine Zahl a n mal mit sich selbst multipliziert werden, so schreibt man abkürzend:

$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$. Der Term a^n wird "a hoch n" gelesen. Berechnet man das Produkt $x = a^n$, so sprechen wir vom *Potenzieren*. a heißt *Basis* und n heißt *Exponent*.

Die Gleichung $x = a^n$ kann man nach a und nach n umstellen. Es ist $a = \sqrt[n]{x}$ und $n = \log_a(x)$. Die erste Operation nennt man *Wurzelziehen*, die zweite Operation heißt *Logarithmieren*. Das heißt, das Logarithmieren und das Wurzelziehen sind die beiden Umkehroperationen des Potenzierens.

1.4.5.1 Das Potenzieren

Für das Potenzieren gelten Rechengesetze. Die grundlegenden Potenzgesetze sind die folgenden:

1. $a^0 = 1$
2. $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$
3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
4. $a^{(-n)} = \frac{1}{a^n}$
5. $\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{(-m)} = a^{(n-m)}$
6. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
7. $(a^n)^m = a^{(n \cdot m)}$
8. $a^{n^m} = a^{(n^m)}$

Beispiele:

$$a) \left(\frac{x^3}{x^{-3}}\right)^{-1} = (x^3 \cdot x^3)^{-1} = (x^6)^{-1} = \frac{1}{x^6}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \left(\frac{x^2}{a^3}\right)^{-2} \cdot 3x^2 \cdot a^{-4} \\ & = \left(\frac{a^3}{x^2}\right)^2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot a^{-4} = \frac{a^6}{x^4} \cdot 3 \cdot x^2 \cdot a^{-4} = 3 \cdot \frac{a^2}{x^2} = 3 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^2 \end{aligned}$$



Aufgabe 1.29 Berechnen Sie folgende Potenzen und vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich!

$$\text{a) } \frac{(15 \cdot x)^2}{5 \cdot x^{-3}}$$

$$\text{c) } (a^8 - 1) \cdot (a^4 + 1)^{-1}$$

$$\text{b) } \left(\frac{x^2}{a^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3a^2}{4x^3}\right)^2 \cdot 5xa^{-4}$$

$$\text{d) } 27 \cdot 3^{-6}$$

$$\text{e) } (a - b)^3 + 3(b - a)^3$$



Aufgabe 1.8 Rechnen Sie mit Potenzen!

1.4.5.2 Das Wurzelziehen

Definition 1.22 (Rechenregeln für das Wurzelziehen) Die Gleichung

$x = a^n$ kann man nach a und nach n umstellen. Es ist $a = \sqrt[n]{x}$ ("n-te Wurzel aus x").

Diese Operation nennt man Wurzelziehen, d.h., das Wurzelziehen ist eine Umkehroperation des Potenzierens.

a heißt Wurzel, x heißt Radikand und n Radikator.

Aus den Potenzgesetzen, die für die Ausgangsgleichung $x = a^n$ gelten, folgen entsprechende Gesetze für die Wurzel. Dazu muss man sich nur klarmachen, dass gilt: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Wurzelgesetze sind damit z.B. die folgenden:

$$1. \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = x^{\frac{1}{n}} \cdot y^{\frac{1}{n}} = (x \cdot y)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x \cdot y}$$

$$2. \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$$

$$3. \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$$

$$4. \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = x^{-\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{x}}$$

usw., usf..

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2 - \sqrt{2}} \\ & = \frac{3}{2 - \sqrt{2}} \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right) \\ & = \frac{3 \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})} \\ & = \frac{3 \cdot (2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{3}{2} \cdot (2 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.30** Vereinfachen Sie folgende Terme!

a) $\sqrt[3]{x^6(2y)^{12}}$

b) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y}}$

c) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{y}}$

d) $\sqrt{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[3]{y}}$

**Aufgabe 1.31** Erweitern Sie den Nenner mit Hilfe der Binomischen Formeln so, das keine Wurzeln mehr im Nenner vorhanden sind!

a) $\frac{2 + 3\sqrt{5}}{4 - \sqrt{15}}$

b) $\frac{6 - 14\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}}$

c) $\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

**Aufgabe 1.9** Rechnen Sie mit Wurzeln!

1.4.5.3 Das Logarithmieren

Definition 1.23 (Rechenregeln für das Logarithmieren) Die Gleichung $x = a^n$ kann man nach n umstellen. Es ist $n = \log_a(x)$. a bezeichnet man als Basis des Logarithmus und n heißt Logarithmus von x zur Basis a . Diese Operation nennt man Logarithmieren. D.h., das Logarithmieren ist eine Umkehroperation des Potenzierens.

Spezielle Logarithmen:

Ist die Basis gleich der Eulerschen Zahl $e=2,718\dots$, so sprechen wir vom nat \tilde{A} $\frac{1}{4}$ rlichen Logarithmus und schreiben kurz $\log_e(x) = \ln(x)$.

Ist die Basis $a = 10$, so sprechen wir vom dekadischen Logarithmus und schreiben kurz $\log_{10}(x) = \lg(x)$.

Aus den Potenzgesetzen, die für die Ausgangsgleichung $x = a^n$ gelten, folgen entsprechende Gesetze für den Logarithmus.

Die grundlegenden Logarithmengesetze sind die folgenden:

1. 1-Regel: $\log_a(a) = 1$
2. 0-Regel: $\log_a(1) = 0$
3. Potenzregel: $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$
4. Produktregel: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
5. Quotientenregel: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
6. Reziproke Regel: $\log_a(x) = \frac{1}{\log_x(a)}$
7. Logarithmen-Umrechnung: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Daraus lassen sich weitere Regeln ableiten, wie zum Beispiel:

8. $a^{\log_a(x)} = x$ insbesondere $e^{\ln(x)} = x$
9. Potenzregel: $\log_{a^x}(b) = \frac{1}{x} \cdot \log_a(b)$

Beispiel:Vereinfachen Sie $4 \log_{256}(16) - 2 \log_4(64)$!

Es ist:

$$\begin{aligned}
& 4 \log_{256}(16) - 2 \log_4(64) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{\log_{16}(256)} - 2 \cdot \log_4(4^3) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{\log_{16}(16^2)} - 2 \cdot \log_4(4^3) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \log_{16}(16)} - 2 \cdot 3 \cdot \log_4(4) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 3 \\
&= -4
\end{aligned}$$

**Aufgabe 1.32** Vereinfachen Sie folgende Terme ohne Taschenrechner!

a) $\lg(4) + 2 \cdot \lg(5)$

c) $\log_{(a+b)}(a+b)^2$

e) $\lg\left(\frac{a^3 b}{c^2}\right)$

b) $e^{5 \cdot \ln(2)}$

d) $\log_5(625)$

f) $\lg\left(\sqrt[3]{a^4 b^2}\right)$

**Aufgabe 1.33** Berechnen Sie folgende Logarithmen ohne Taschenrechner!

a) $-\log_{125}(625) + 5 \cdot \log_{125}(5)$

c) $5 \cdot \log_{125}\left(\frac{1}{5}\right) + 16 \cdot \log_{125}(5)$

b) $2 \cdot \log_{16}\left(\frac{1}{4}\right) + 20 \cdot \log_{16}(4)$

d) $\log_{27}(81) + 14 \cdot \log_{27}(27)$

**Aufgabe 1.10** Berechnen Sie Logarithmen!**Aufgabe 1.11** Rechnen Sie mit Logarithmen!**Aufgabe 1.12** Vereinfachen Sie Terme!**1.4.6 Beträge, Gleichungen und Ungleichungen**

Sie müssen die Regeln des Rechnens mit Beträgen, und die Methoden zum Auflösen von Gleichungen und Ungleichungen beherrschen. Sie sollten Gleichungen und Ungleichungen lösen können, gerade in den Fällen, bei denen es sich um quadratische Gleichungen und Ungleichungen handelt, oder diese Beträge enthalten. Wir verweisen dazu auf das Brückenkursskript.

**Aufgabe 1.34**

Lesen Sie sich das Kapitel 1.7. in diesem Brückenkursskript durch!

Link:

http://www.htw-saarland.de/Members/grabowski/uebersicht/v1/Material_mathe_1_MST_KI/ws-07-08/Brueckenkurs-07-08

Lösen Sie folgende Übungsaufgaben!



Aufgabe 1.35 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen grafisch und analytisch!

a) $\frac{x-2}{x+1} \leq 2, x \neq -1$

d) $\|x - 2\| > 5$

b) $x^2 \geq 20$

e) $\|x - 2\| < x + 1$

c) $-x^2 > 16 - 8x$

f) $\|x - 2\| < |x + 1|$



Aufgabe 1.36 Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $\frac{x-2}{x+1} = 2, x \neq -1$

d) $\|x - 2\| = 5$

b) $x^2 = 20$

e) $\|x - 2\| = x + 1$

c) $-x^2 = 16 - 8x$

f) $\|x - 2\| = |x + 1|$

1.4.7 Hausaufgabe



Hausaufgabe 4 : Übungsblatt 3

Kapitel 2

Einführung in die Vektorrechnung

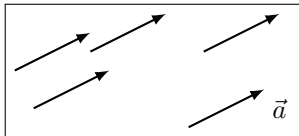
In der Physik und der Technik werden viele Größen nicht nur durch einen Zahlenwert, sondern auch durch eine Richtung beschrieben. Dazu gehören Kräfte, Wege, Geschwindigkeiten und viele weitere Größen.

Anschaulich kann man diese Größen durch Pfeile darstellen, wobei die Information über die Größe in der Länge des Pfeiles steckt und die Richtung durch die Lage des Pfeils und seine Pfeilspitze charakterisiert wird.

Solche Objekte nennt man in der Mathematik **Vektoren** und kennzeichnet sie durch einen Buchstaben und durch einen symbolischen Pfeil über dem Buchstaben.

Beispiele: \vec{a} , \vec{b} , \vec{r} , \vec{F} .

Ein Vektor \vec{a} beschreibt alle Pfeile, die gleiche Länge und gleiche Richtung besitzen. D.h., zwei Vektoren sind gleich, wenn sie die gleiche Richtung und die gleiche Länge besitzen.



In der Mathematik werden Vektoren verwendet, um die gerichtete Strecke (Verbindung) zwischen 2 Punkten im \mathbb{R}^n darzustellen. Die Richtung eines Vektors kann durch die Angabe von Winkeln zu den Koordinatenachsen beschrieben werden.

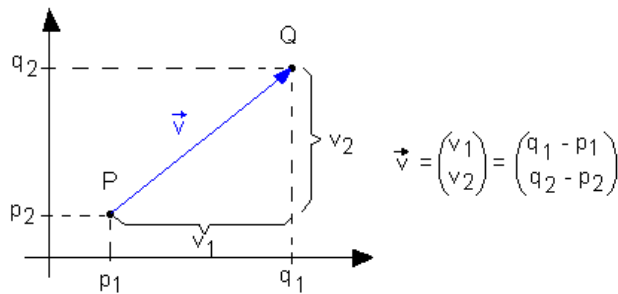
Alternativ zur Angabe von Länge und Richtung lässt sich ein Vektor eindeutig durch Koordinaten im rechtwinklige kartesische Koordinatensystem beschreiben.

In den folgenden Abschnitten beschäftigen wir uns mit der Darstellung von Vektoren im n -dimensionalen reellen Raum \mathbb{R}^n und mit Rechenoperationen zum Rechnen mit Vektoren, sowie der physikalischen bzw. geometrischen Bedeutung dieser Operationen.

2.1 Punkte und Vektoren in der Ebene

Ein Punkt in der Ebene wird durch seine Koordinaten $P = (p_1, p_2)$ eindeutig charakterisiert.

Durch einen Vektor kann man 2 Punkte P und Q miteinander verbinden; durch Abtragen des Vektors \vec{v} an den Punkt $P = (p_1, p_2)$ gelangt man zum Punkt $Q = (q_1, q_2)$. Man schreibt $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ oder $P + \vec{v} = Q$, wobei die Operation $+$ das Abtragen des Vektors \vec{v} an den Punkt P bedeutet.



Wir können den Vektor \vec{v} mathematisch eindeutig durch die 2 Komponenten v_1 und v_2 darstellen, die seine Ausdehnung in x- und y-Richtung beschreiben. Mathematisch wird \vec{v} als geordnetes Paar $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei seine Komponenten untereinander geschrieben werden, um ihn von einem Punkt (v_1, v_2) mit gleichen Koordinaten zu unterscheiden.

Wir sehen an der Grafik, dass die Komponenten v_1, v_2 des Vektors \vec{v} mit den Koordinaten der beiden Punkte P und Q, die \vec{v} miteinander verbindet, zusammenhängen. Es ist $v_i = q_i - p_i$ die Differenz der i-ten Koordinate der beiden Punkte Q und P, die der Vektor verbindet.

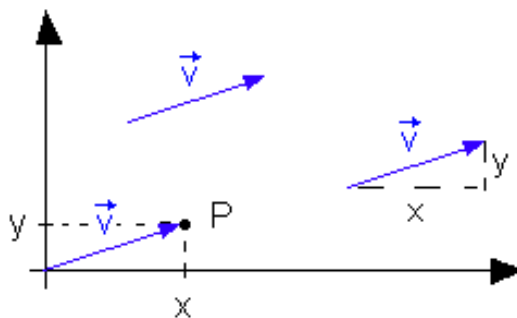
Andererseits sehen wir, dass die Operation Abtragen von $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ an den Punkt $P = (p_1, p_2)$ im Ergebnis den Punkt $Q = P + \vec{v} = (p_1 + v_1, p_2 + v_2) = (q_1, q_2)$ liefert, dessen Koordinaten sich aus der Addition der Koordinaten von P und \vec{v} ergeben.



Aufgabe 2.1

- a) Welcher Vektor \vec{v} führt vom Punkt $P = (1, -1)$ zum Punkt $Q = (3, 0)$?
- b) Wie lauten die Koordinaten des Punktes Q, der entsteht, wenn man an den Punkt $P = (3, 1)$ den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ abträgt?

Da zwei Vektoren gleich sind, wenn sie die gleiche Richtung und die gleiche Länge besitzen, sind zwei Vektoren gleich, wenn ihre Koordinaten v_i übereinstimmen. Folgendes Bild zeigt mehrere identische Vektoren \vec{v} . Sie unterscheiden sich lediglich durch die Lage ihres Anfangspunktes, an dem sie abgetragen werden (dadurch unterscheidet sich dann auch der Endpunkt).



Der Vektor $\vec{0P}$, der den Koordinatenursprung 0 mit dem Punkt P verbindet, wird als **Ortsvektor** des Punktes P bezeichnet. Der Ortsvektor $\vec{0P}$ von P hat offensichtlich die gleichen Koordinaten wie der Punkt P.

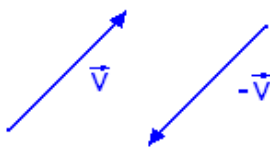
Um Vektoren und Punkte voneinander zu unterscheiden, verwendet man zur Darstellung eines Punktes die Zeilenschreibweise und zur Darstellung eines Vektors die Spaltenschreibweise, bei der

die einzelnen Komponenten untereinander angeordnet sind:

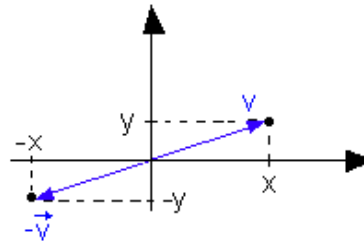
$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad x \text{ und } y \text{ bilden hierbei die Koordinaten des Punktes } P = (x, y).$$

Der Vektor \vec{v}_1 , der genauso lang wie \vec{v} ist, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt, wird als **Gegenvektor** zu \vec{v} bezeichnet; wir schreiben $\vec{v}_1 = -\vec{v}$. Wir erhalten den Gegenvektor zu einem Vektor \vec{v} , indem wir Pfeilspitze und Anfangspunkt von \vec{v} vertauschen. Offensichtlich erhalten wir die Koordinaten des Gegenvektors zu einem Vektor \vec{v} , indem wir einen Vorzeichenwechsel in allen Koordinaten von \vec{v} durchführen; so ist zum Beispiel der Gegenvektor zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Vektor

$$\vec{v}_1 = -\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Gegenvektor



Koordinaten des Gegenvektors

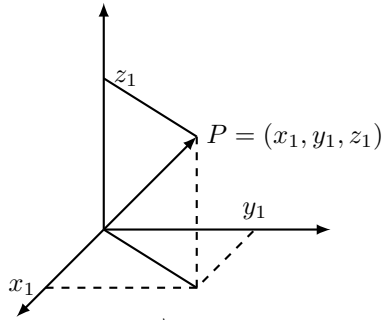


Aufgabe 2.2

- Zeichnen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf mindestens 3 verschiedene Weisen in ein Koordinatensystem ein!
- Zeichnen Sie den Ortsvektor zum Punkt $P = (1, 2)$ ein!
- Zeichnen Sie den Vektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ in das Koordinatensystem ein! Was stellen Sie fest bezüglich Länge und Richtung von \vec{v} und \vec{v}_1 ?
- Zeichnen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und seinen Gegenvektor $-\vec{v}$ in ein Koordinatensystem ein!

2.2 Punkte und Vektoren im \mathbb{R}^n

Im dreidimensionalen Anschauungsraum kommt eine 3. Angabe, die Höhe zur Lagebeschreibung eines Punktes und damit als Koordinate eines Vektors hinzu. Jeder Punkt im Raum wird durch die Angabe der Koordinaten $P = (x, y, z)$ beschrieben, wobei die Reihenfolge vorgeschrieben ist.

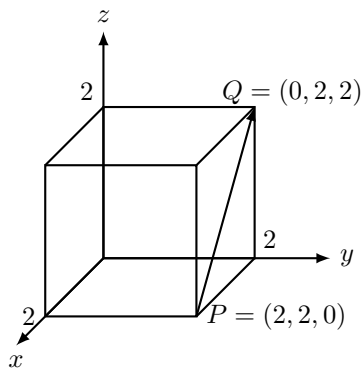


Der Vektor \overrightarrow{OP} , der vom Ursprung des Koordinatensystems ausgeht und am Punkt P endet, ist

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, y_1 \text{ und } z_1 \text{ bilden hierbei die Koordinaten des Punktes } P.$$

Die Koordinaten von Vektoren, die nicht im Koordinatenursprung beginnen, können auch im dreidimensionalen Raum als Differenzen der Koordinaten des Endpunktes und des Anfangspunktes beschrieben werden. So hat ein Vektor von einem Punkt $A = (x_a, y_a, z_a)$ zu einem Punkt $B = (x_b, y_b, z_b)$ die Vektordarstellung:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}$$

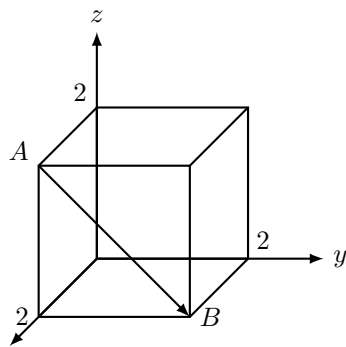


Der Vektor \vec{v} , der den Punkt $P = (2, 2, 0)$ mit dem Punkt $Q = (0, 2, 2)$ verbindet ist

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 2 - 2 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 2.3



- a) Welcher Vektor \overrightarrow{AB} verbindet im oben gezeichneten Würfel die Eckpunkte A und B miteinander?
- b) Welcher Vektor \vec{v} führt vom Punkt $P = (1, -1, 2)$ zum Punkt $Q = (-3, 0, 5)$?
- c) Wie lauten die Koordinaten des Punktes Q , der entsteht, wenn man an den Punkt $P = (3, 1, 4)$ den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ abträgt?
- d) Wie lauten die Koordinaten des Gegenvektors zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?



Aufgabe 2.1 Stelle Vektoren und Ortsvektoren grafisch dar!



Aufgabe 2.2 Berechne Punkte und Vektoren!

Wir wollen unsere Erkenntnisse nun auf den \mathbb{R}^n verallgemeinern.

Definition 2.1 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{i,n} \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n\}$ heißt *n-dimensionaler reeller Punktraum*.

Definition 2.2 Seien P und Q zwei Punkte aus dem \mathbb{R}^n . Das Gebilde \overrightarrow{PQ} für welches gilt: \overrightarrow{PQ} ist die gerichtete Strecke zwischen P und Q und heißt *Vektor zwischen P und Q* . Schreibweise: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Wir bezeichnen mit $P + \vec{v} = Q$ das *Abtragen eines Vektors an einen Punkt*.

Satz 2.1 Seien $P = (p_1, \dots, p_n)$ und $Q = (q_1, \dots, q_n)$ zwei Punkte im \mathbb{R}^n und $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ der Vektor, der P und Q miteinander verbindet. Dann gilt für die Koordinaten v_i von \vec{v}

$$v_i = q_i - p_i \text{ bzw. es ist}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{v} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}.$$

Andererseits gilt für die Koordinaten q_i des Endpunktes Q der Abtrageoperation:

$$Q = P + \vec{v} = (p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n)$$

Bemerkung: Wir schreiben die Koordinaten eines Vektors stets untereinander im Unterschied zu einem Punkt, dessen Koordinaten nebeneinander geschrieben werden.

Definition 2.3 $V^n = \left\{ \vec{v} \mid \exists P \in \mathbb{R}^n \exists Q \in \mathbb{R}^n : \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \right\}$
 $= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_i \in \mathbb{R} \forall_i = 1 \dots n \right\} = \mathbb{R}^n$ heißt *n-dimensionaler reeller Vektorraum*.

Definition 2.4 • Der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, der den Ursprungspunkt O mit einem Punkt P verbindet, hat die gleichen Koordinaten wie P und heißt **Ortsvektor** von P .

• Der Vektor $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$ heißt **Gegenvektor** zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

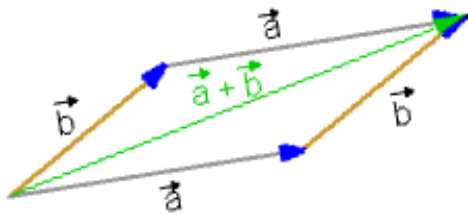
Bemerkung: Der Gegenvektor $-\vec{v}$ zu \vec{v} hat die gleiche Länge wie \vec{v} und zeigt in die entgegengesetzte Richtung (d.h. Pfeilspitze und Vektor-Fuss sind vertauscht).

Wir verwenden folgende abkürzende Schreibweisen für besondere Lagen von zwei Vektoren zueinander:

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ parallel zu \vec{b}
 $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Rightarrow$ in gleiche Richtung
 $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Rightarrow$ in verschiedener Richtung
 $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$ senkrecht

2.3 Addition, Subtraktion und Vielfachbildung von Vektoren

2.3.1 Grafische Addition von Vektoren

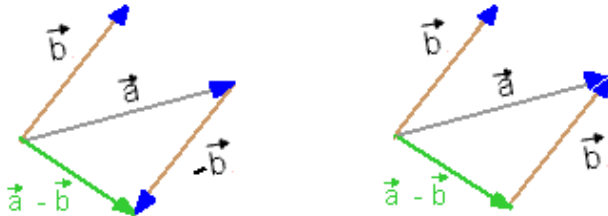


Wir addieren $\vec{a} + \vec{b}$, indem wir den Vektor \vec{b} am Vektor \vec{a} abtragen, oder umgekehrt, indem wir \vec{a} an \vec{b} abtragen. Der Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ wird als **Resultierende** von \vec{a} und \vec{b} bezeichnet. \vec{c} verbindet den Anfang von \vec{a} mit dem Ende von \vec{b} .

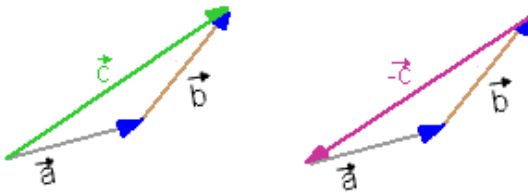
2.3.2 Grafische Subtraktion von Vektoren

Die Differenz zweier Vektoren lässt sich durch den „Gegenvektor“ einfach erklären.

Wir subtrahieren $\vec{a} - \vec{b}$, indem wir an den Vektor \vec{a} den Vektor $-\vec{b}$, d.h. den Gegenvektor zu \vec{b} abtragen. Das geschieht praktisch, indem wir den Vektor \vec{b} mit der Spitze zuerst an \vec{a} abtragen.

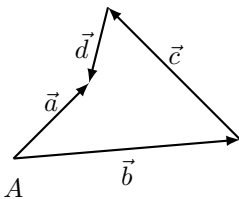


Der der Resultierenden $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ zweier Kräfte entgegengesetzte Vektor $\vec{d} = -\vec{c}$ heißt Gegenkraft zu \vec{c} . Es gilt offensichtlich: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = 0$ bzw. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0$.



Vektorkette:

Es oft notwendig, einen unbekanntem Vektor durch andere bekannte darzustellen. Dabei hilft das Bilden einer Vektorkette. Von einem beliebigen Startpunkt wählt man einen geschlossenen Weg über beliebig viele Wege und addiert dabei alle betroffenen Vektoren, die im Umlaufsinn liegen und addiert den Gegenvektor beim Durchlaufen gegen den Umlaufsinn. Die so gebildete Summe wird immer $\vec{0}$.



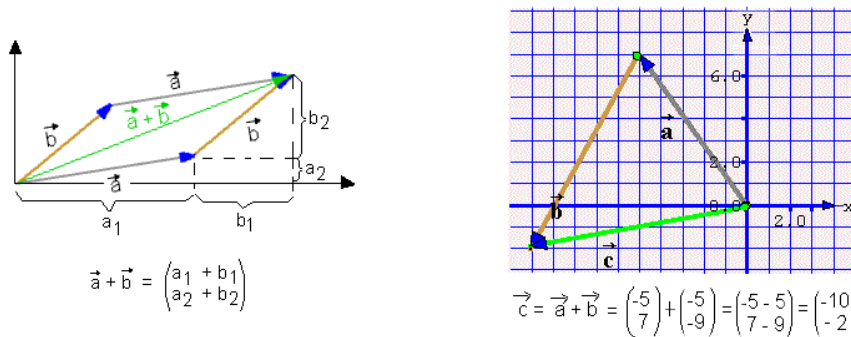
Vom Punkt A aus würde eine Vektorkette so aussehen: $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} - \vec{a} = \vec{0}$. Diese Vektorgleichung kann nach jedem Vektor umgestellt werden.



Aufgabe 2.3 Grafische Addition und Subtraktion von Vektoren

2.3.3 Rechnerische Addition von Vektoren

Zwei Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert.



$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 5 \\ 7 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Definition 2.5 Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im \mathbb{R}^n . Dann ist

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel.

$$\text{Seien } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dann ist } \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-2) \\ 5 + 3 \\ -4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2.3.4 Rechnerische Subtraktion von Vektoren

Wir erinnern daran, dass jede Komponente des Gegenvektors $-\vec{a}$ einen Vorzeichenwechsel bzgl. \vec{a} erhält.

$$\text{Beispiel Ist } \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ so ist } -\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Differenz zweier Vektoren kann auf die Addition mit dem Gegenvektor zurückgeführt werden. Deshalb werden zwei Vektoren subtrahiert, indem man ihre Koordinaten subtrahiert.

Definition 2.6 Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im \mathbb{R}^n . Dann ist

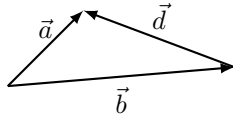
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel

$$\text{Seien } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dann ist } \vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 5 - 3 \\ -4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

\vec{d} zeigt von der Pfeilspitze von \vec{b} zur Pfeilspitze von \vec{a} .



2.3.5 Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Addieren wir \vec{a} mit sich selbst, so entsteht der Vektor $\vec{a} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ \vdots \\ 2a_n \end{pmatrix} = 2\vec{a}$. D.h., $2\vec{a}$ ist der Vektor, den man erhält, wenn man die Koordinaten von \vec{a} komponentenweise mit 2 multipliziert. $2\vec{a}$ ist offensichtlich doppelt so lang wie \vec{a} . Das können wir verallgemeinern.

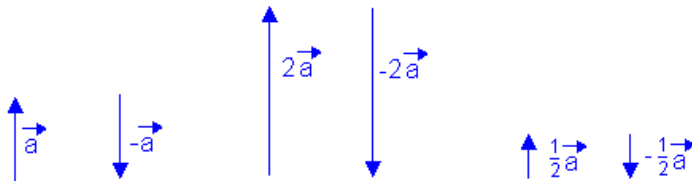
Definition 2.7 Bei der Multiplikation eines Vektors \vec{v} mit einer Zahl λ (Skalar genannt) wird diese Zahl als Faktor mit jeder Komponente des Vektors multipliziert.

$$\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot v_n \end{pmatrix}$$

Der so gebildete Vektor bleibt in der Richtung gleich oder nimmt bei negativem Wert von λ die Gegenrichtung an, in seiner Länge ändert sich der Vektor um das λ -fache. Für $\lambda = 0$ erhält man den Nullvektor.

Folgende Bilder zeigen die Eigenschaften der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Allgemein gilt:

1. $\lambda \cdot \vec{a}$ ist $|\lambda|$ mal so lang wie \vec{a} .
2. Ist $|\lambda| > 1$, so wird \vec{a} verlängert, ist $|\lambda| < 1$, so wird \vec{a} verkürzt.
3. Ist $\lambda > 0$, so hat $\lambda \cdot \vec{a}$ die gleiche Richtung wie \vec{a} .
4. Ist $\lambda < 0$, so ist die Richtung von \vec{a} entgegengesetzt zu \vec{a} .



2.3.6 Eigenschaften von $+, -, * \lambda$

Fassen wir die Definitionen von Addition, Multiplikation mit Skalar und Subtraktion zusammen, so gilt:

Satz 2.2 Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ zwei Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 + \mu \cdot b_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Satz 2.3 Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (kommutativ)
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (assoziativ)
3. $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda * \vec{a} + \lambda * \vec{b}$ (distributiv)
4. $(\lambda + \mu) * \vec{a} = \lambda * \vec{a} + \mu * \vec{a}$ (distributiv)



Aufgabe 2.4 Seien $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- a) Berechnen Sie die Resultierende Kraft $\vec{F} = 2 \cdot \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{F}_3$!
- b) Berechnen Sie die Gegenkraft $-\vec{F}$ zu \vec{F} !



Aufgabe 2.4

Addition und Subtraktion von Vektoren und Multiplikation mit einem Skalar

2.4 Der Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors \vec{a} oder in Kurzschreibweise $|\vec{a}|$ ist seine Länge. Ist der Vektor in Komponentenschreibweise gegeben, so lässt sich seine Länge durch Anwenden des Satzes von Pythagoras berechnen.

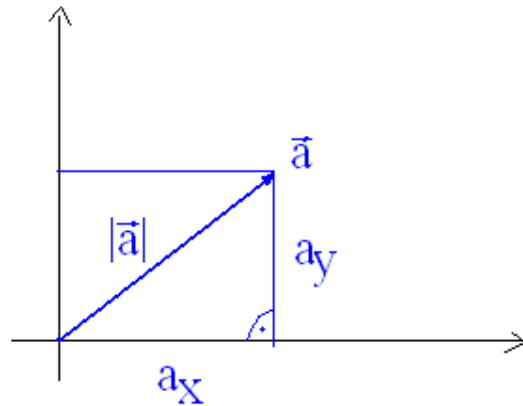


Abbildung 2.1: Die Länge (der Betrag) eines Vektors

In der Ebene erhalten wir:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Das können wir auf den \mathbb{R}^n verallgemeinern.

Definition 2.8 Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Dann ist die Länge von \vec{a} gleich

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

$|\vec{a}|$ wird auch als Betrag von \vec{a} bezeichnet.

Beispiel Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ so ist der Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{42}.$$



Aufgabe 2.5

Gegeben sind die Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die folgenden Vektoren:

a. $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ b. $\vec{c} = |\vec{a}| \cdot \vec{b} + |\vec{b}| \cdot \vec{a}$

Bestimmen Sie die Längen folgender Vektoren:

c. $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a}$ d. $\vec{g} = \vec{c} + 3\vec{a}$

e. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Definition 2.9 Ein Vektor \vec{a} mit der Länge $|\vec{a}| = 1$ heißt normiert(er Vektor).

Satz 2.4 Sei \vec{a} ein Vektor und $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Skalar. Dann gilt:

1. $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$
2. $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat die Länge 1

Bemerkung:

1. bedeutet: Die Länge von $\lambda \cdot \vec{a}$ ist das $|\lambda|$ fache der Länge von \vec{a} .
2. bedeutet: Wollen wir einen Vektor normieren, so multiplizieren wir ihn mit dem Reziproken seines Betrages.



Aufgabe 2.6 Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. Welche Länge hat \vec{a} ?
2. Geben Sie den Vektor \vec{b} an, der in die gleiche Richtung zeigt wie \vec{a} , d.h. $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a}$ und für den gilt: $|\vec{b}| = 1$.
3. Geben Sie den Punkt Q an, der 10 Längeneinheiten von $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in Richtung des Vektors \vec{a} entfernt ist.



Aufgabe 2.5

Betrag eines Vektors

2.4.1 Hausaufgabe



Hausaufgabe 5 : Übungsblatt 4, Aufgaben 1-3

2.5 Das Skalarprodukt zweier Vektoren

In den folgenden Abschnitten führen wir 3 verschiedene Produkte von Vektoren ein. Wir beginnen mit dem sogenannten **Skalarprodukt** zweier Vektoren. Das Skalarprodukt zweier Vektoren darf auf keinen Fall verwechselt werden mit der Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Beim Skalarprodukt handelt es sich um eine spezielle Multiplikation, die viele Anwendungen gerade bei physikalischen Themen hat.

Zum Beispiel gilt für die mechanische Arbeit (W) die Beziehung:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}$$

Wenn man nur die reinen Zahlenwerte einsetzt, gilt diese Formel bekanntlich nur dann, wenn Kraft und Weg in gleicher Richtung liegen. In jedem anderen Fall muss der zwischen der Kraft und dem Weg liegende Winkel berücksichtigt werden, denn es leistet nur die Komponente der Kraft einen Anteil zur Arbeit, die in Richtung des Weges zeigt. Die so beschriebene Produktbildung entspricht mathematisch dem Skalarprodukt der Vektoren „Kraft“ (\vec{F}) und „Weg“ (\vec{s}).

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\gamma),$$

wobei γ der zwischen den Vektoren liegende Winkel ist.

Beachte: Das Ergebnis der Skalarmultiplikation zweier Vektoren ist ein Skalar, kein Vektor.

2.5.1 Karthesische Definition des Skalarproduktes

Wir definieren das Skalarprodukt zunächst als komponentenweise Multiplikation.

Definition 2.10 Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist definiert als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$



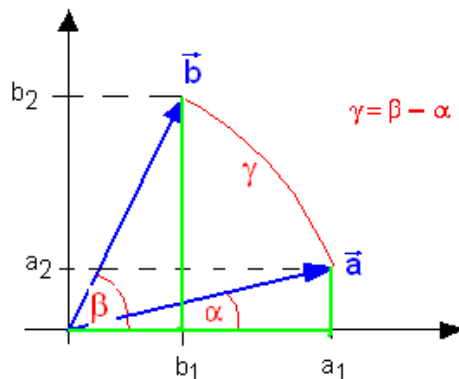
Aufgabe 2.7

Ein Schrägaufzug wird durch ein Drahtseil bewegt. Die auf das Seil wirkende Kraft lässt sich durch den Vektor $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ kN}$ ausdrücken. Der tiefste Punkt liegt bei $P_u(550; 300; 150)$, der höchste Punkt bei $P_o(670; 350; 200)$. Die Angaben der Punkte sind in Meter und beziehen sich auf einen Vermessungspunkt. Welche Arbeit wird für eine Aufzugsfahrt verrichtet?

2.5.2 Der Winkel zwischen 2 Vektoren

Wie hängt die o.g. Definition des Skalarproduktes mit der obigen Formel für die Arbeit W zusammen, in der Beträge und eingeschlossener Winkel der Vektoren vorkommen?

Das wollen wir uns im zweidimensionalen Fall verdeutlichen.



Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Wir zeichnen diese in ein Koordinatensystem ein und erkennen 2 (grün gezeichnete) rechtwinkligen Dreiecke. Aus den Gesetzmäßigkeiten in rechtwinkligen Dreiecken wissen wir, dass gilt:

$$a_1 = |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha), a_2 = |\vec{a}| \cdot \sin(\alpha), b_1 = |\vec{b}| \cdot \cos(\beta), b_2 = |\vec{b}| \cdot \sin(\beta).$$

Wir erhalten folglich für das Skalarprodukt von \vec{a} mit \vec{b} :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= |\vec{a}| \cdot \cos(\alpha) \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\beta) + |\vec{a}| \cdot \sin(\alpha) \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\beta) \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| (\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)) \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\gamma) \end{aligned}$$

$\gamma = \beta - \alpha$ ist dabei der von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel.

Die letzte Gleichung folgt aus den sogenannten Additionstheoremen für die cosinus- und sinus-Funktion:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta).$$

Dieses Ergebnis können wir auf den \mathbb{R}^n verallgemeinern.

Satz 2.5 Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren und γ der durch \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ($0 \leq \gamma \leq 90^\circ$). Dann gilt für das Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

Wir erhalten damit eine Möglichkeit, den Winkel, den 2 Vektoren miteinander einschließen, zu berechnen:

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Beispiel

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, gesucht ist der eingeschlossene Winkel γ :

$$\begin{aligned} \cos(\gamma) &= \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-5) \cdot 4}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{-3 + 6 - 20}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{26}} \approx -0,541 \end{aligned}$$

$\gamma = \arccos(-0,541) = 122,7^\circ$.

Beispiel

Berechnen Sie den Winkel zwischen der x -Achse und dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Die x-Achse kann durch den Einheits-Vektor $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dargestellt werden, der in die gleiche Richtung wie die x-Achse zeigt und auf die Länge 1 normiert ist. Dann erhalten wir für den gesuchten Winkel γ_x :

$$\cos(\gamma_x) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{3}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{1^2}} \approx 0,48666$$

$$\gamma_x = \arccos(0,48666) \approx 60,9^\circ.$$



Aufgabe 2.8

- Bestimmen Sie den Winkel des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu allen 3 Koordinatenachsen!
- Bestimmen Sie alle Seitenlängen und Innen-Winkel des Dreiecks, welches durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ aufgespannt wird!

Stehen zwei Vektoren senkrecht aufeinander, so ist $\gamma = 90^\circ$ und $\cos(\gamma) = 0$. Daraus folgt eine weitere oft benötigte Eigenschaft des Skalarproduktes, die besagt, dass es immer dann Null wird, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Satz 2.6 Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren mit $|\vec{a}| \neq 0$ und $|\vec{b}| \neq 0$ und sei γ der durch \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ($0 \leq \gamma \leq 90^\circ$). Dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \cos(\gamma) = 0 \iff \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ stehen senkrecht aufeinander.}$$

Beispiel

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie einen Vektor der x, y -Ebene, der auf \vec{a} senkrecht steht.

Lösung:

Es gibt unendlich viele Vektoren mit dieser Eigenschaft, weil der Betrag bzw. die Länge des Vektors nicht zu berücksichtigen ist. Der gesuchte Vektor muss die Bedingung erfüllen, dass das Skalarprodukt null wird. Daraus erhält man den Ansatz:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = 0.$$

Jede Lösung der Gleichung $3 \cdot b_x + (-2) \cdot b_y = 0$ liefert eine Lösung. Da in der Gleichung 2 Variablen stehen, kann eine davon beliebig gewählt werden und die zweite ergibt sich in Abhängigkeit der gewählten ersten: $b_x = \frac{2}{3}b_y$. Wählt man $b_y = 3$ erhält man $b_x = 2$ und den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Jeder Vektor $\lambda \cdot \vec{b}$ mit $\lambda \neq 0$ steht ebenfalls senkrecht auf \vec{a} .

Bei Vektoren der Ebene findet man immer einen orthogonalen Vektor, indem man die Komponenten vertauscht und eines der beiden Komponentenvorzeichen ändert.

Bemerkung: 2 senkrecht aufeinanderstehende Vektoren werden auch als **orthogonal** bezeichnet.



Aufgabe 2.9 Bestimmen Sie die Zahl k so, dass die Vektoren orthogonal sind

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2k \\ k \end{pmatrix}$$

2.5.3 Eigenschaften des Skalarproduktes

In der Literatur wird häufig auch die Bezeichnung (\vec{a}, \vec{b}) für das Skalarprodukt verwendet, d.h. es ist $(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Im folgenden Satz und den darauffolgenden Betrachtungen zum Satz von Pythagoras werden wir diese Schreibweise verwenden.

Satz 2.7 Das Skalarprodukt besitzt folgende Eigenschaften:

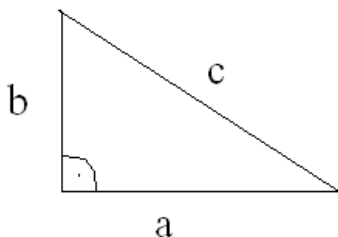
Seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren im \mathbb{R}^n und seien λ und μ zwei reelle Zahlen. Dann gilt:

1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (kommutativ)
2. $(\lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}, \vec{c}) = \lambda \cdot (\vec{a}, \vec{c}) + \mu \cdot (\vec{b}, \vec{c})$ (linear)
3. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften lassen sich viele Eigenschaften aus der Geometrie beweisen.

Wir beweisen im folgenden den Satz von Pythagoras mit Hilfe des Skalarproduktes.

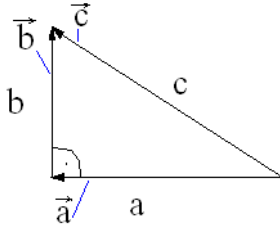
Satz 2.8 Sei ein rechtwinkliges Dreieck gegeben, wobei die Seitenlängen der senkrecht aufeinander stehenden Seiten a und b betragen und die dritte Seite die Länge c besitzt.



Dann gilt: $c^2 = a^2 + b^2$.

Beweis:

Wir betrachten die Seiten des Dreiecks als Vektoren.



Dann gilt:

1. \vec{a} und \vec{b} stehen senkrecht aufeinander, d.h. es gilt $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.
2. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
3. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$, $(\vec{b}, \vec{b}) = |\vec{b}|^2$, $(\vec{c}, \vec{c}) = |\vec{c}|^2$.

Aus den im obigen Satz genannten Eigenschaften des Skalarproduktes folgt dann die Behauptung des Satzes von Pythagoras:

$$\begin{aligned}
 c^2 = |\vec{c}|^2 &= (\vec{c}, \vec{c}) \\
 &= (\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) \\
 &= (\vec{a}, \vec{a}) + 2 \cdot (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{b}) \\
 &= (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{b}, \vec{b}) \\
 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \\
 &= a^2 + b^2.
 \end{aligned}$$

q.e.d



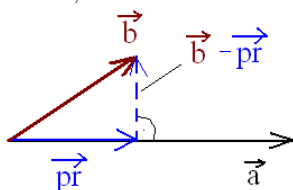
Aufgabe 2.10 Zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} haben folgende Eigenschaften:

$|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, \vec{a} und \vec{b} stehen senkrecht aufeinander. Weiterhin sei $\vec{v} = 2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{a}$.

1. Wie groß ist das Skalarprodukt zwischen \vec{b} und dem Vektor \vec{v} ?
2. Wie groß ist der Winkel zwischen \vec{b} und \vec{v} ?

2.5.4 Die Vektorprojektion

Mit Hilfe des Skalarproduktes lässt sich die sogenannte Vektorprojektion einführen. Unter dem Projektionsvektor \vec{pr} eines Vektors \vec{b} auf einen Vektor \vec{a} versteht man die Senkrechtprojektion von \vec{b} auf \vec{a} , siehe Grafik.



Offensichtlich gilt für den Projektionsvektor $\vec{p\vec{r}}$:

1. $\vec{p\vec{r}} = \lambda \cdot \vec{a}$ ($\vec{p\vec{r}}$ ist parallel zu \vec{a}).
2. $(\vec{b} - \vec{p\vec{r}}, \vec{a}) = 0$ ($\vec{b} - \vec{p\vec{r}}$ und \vec{a} stehen senkrecht aufeinander).

Daraus lässt sich der Projektionsvektor ermitteln:

Es ist

$$\begin{aligned} & (\vec{b} - \vec{p\vec{r}}, \vec{a}) = 0 \\ \iff & (\vec{b}, \vec{a}) - (\vec{p\vec{r}}, \vec{a}) = 0 \\ \iff & (\vec{b}, \vec{a}) - (\lambda \cdot \vec{a}, \vec{a}) = 0 \\ \iff & (\vec{b}, \vec{a}) - \lambda \cdot (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \\ \iff & \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{(\vec{a}, \vec{a})} = \lambda \\ \iff & \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} = \lambda \end{aligned}$$

und für den Projektionsvektor ergibt sich:

$$\vec{p\vec{r}} = \lambda \cdot \vec{a} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}.$$



Aufgabe 2.11

1. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Projektion von \vec{b} auf \vec{a} , sowie die Projektion von \vec{b} auf \vec{a} ! Skizzieren Sie beide Projektionsvektoren, sowie \vec{a} und \vec{b} im Koordinatensystem!

2. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Projektion von \vec{a} auf \vec{b} !

2.5.5 Hausaufgabe



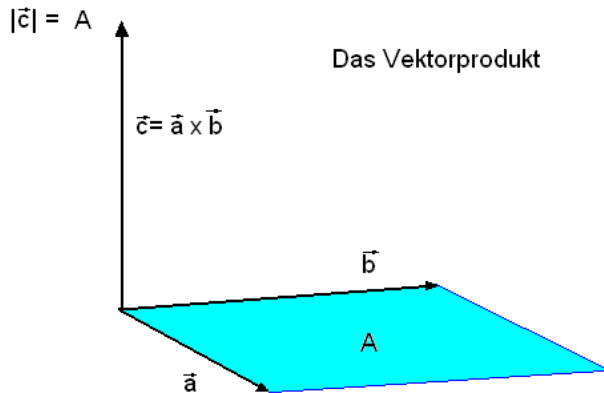
Hausaufgabe 6 : Übungsblatt 4, Aufgaben 4-8

2.6 Das Vektorprodukt

Ein weiteres wichtiges Produkt von Vektoren ist das sogenannte **Vektorprodukt**. Im Gegensatz zum Skalarprodukt ist dieses nur für Vektoren im dreidimensionalen reellen Raum \mathbb{R}^3 definiert und liefert als Ergebnis wieder einen Vektor. Andere Bezeichnungen sind Kreuzprodukt oder äußeres Produkt.

Schreibweise: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Das Vektorproduktes \vec{c} ist zunächst über seine Richtung und Länge definiert.



Definition 2.11 Das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ hat folgende Richtung und Länge:

1. *Richtung:* Der Ergebnisvektor \vec{c} steht senkrecht zu beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} , aus denen er gebildet wird, d. h. er steht senkrecht auf der Ebene, die von den beiden Vektoren aufgespannt wird. Seine Orientierung ergibt sich durch die sogenannte Rechte-Hand-Regel. Dabei zeigt der Daumen der rechten Hand auf den Vektor \vec{a} , der Zeigefinger der rechten Hand auf \vec{b} . Die Richtung von \vec{c} ergibt sich dann automatisch aus der Richtung des Mittelfingers der rechten Hand, wie bei einer rechtsdrehenden Schraube.
2. *Länge:* Die Länge $|\vec{c}|$ von \vec{c} ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogrammes, das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird. D.h., es ist:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\gamma)$$

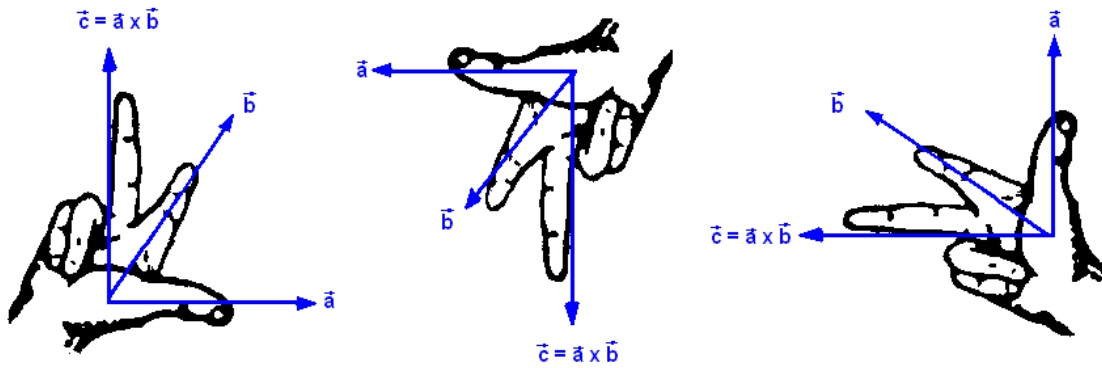
Die zweite Eigenschaft wird kann man verwenden, um zu überprüfen, ob 2 Vektoren in gleicher Richtung verlaufen (kollinear sind). In diesem Fall wird nämlich kein Parallelogramm aufgespannt, es ist also $\gamma = 0^\circ$ und damit $\sin(\gamma) = 0$ und folglich ist der Betrag des Vektorproduktes $|\vec{c}|$ gleich 0 bzw. \vec{c} gleich dem Nullvektor $\vec{0}$.

Satz 2.9 Es gilt: \vec{a} und \vec{b} sind parallel $\iff \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$



Aufgabe 2.12 Gegeben sind die drei Punkte $A = (2, 4, -1)$, $B = (-5, -6, 1)$ und $C(14, 20, -4)$. Liegen die drei Punkte A , B und C auf einer Geraden?

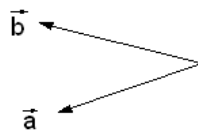
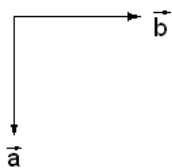
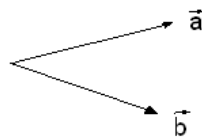
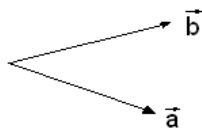
Schauen wir uns nun die Richtung des Kreuzproduktes an.



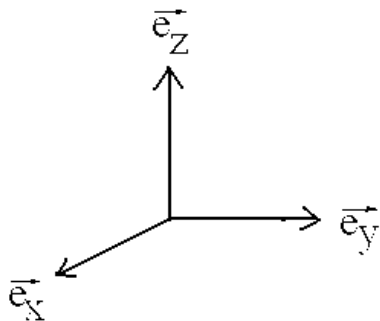
Rechte-Hand-Regel



Aufgabe 2.13 Zeichnen Sie in folgende Grafiken den Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ein!



Aufgabe 2.14 Seien $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsvektoren in einem kartesischen Koordinatensystem, wobei die 3 Vektoren wie im Bild eingezeichnet liegen.



Welchen Zusammenhang gibt es zwischen

1. $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ und $\vec{e}_y \times \vec{e}_x$?
2. $\vec{e}_x \times \vec{e}_y$ und \vec{e}_z ?

Offensichtlich gilt:

1. $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}$.
2. $\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$, $\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$.
3. $\vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y$, $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$.
4. $\vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x$, $\vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x$.

Diese Eigenschaften lassen sich verallgemeinern.

Satz 2.10 Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
3. $(\lambda \cdot \vec{a} \times \mu \cdot \vec{b}) \times \vec{c} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \mu (\vec{b} \times \vec{c})$

Wir haben das Vektorprodukt bisher nur geometrisch durch Richtung und Länge definiert. Unter Verwendung der 3 Eigenschaften des Skalarproduktes, die insbesondere für die Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ gelten, kann man die Komponentenschreibweise des Vektorproduktes herleiten.

Satz 2.11 Es gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\text{Es sind } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

und analog $\vec{b} = b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z$.

Daraus ergibt sich unter Verwendung der o.g. Eigenschaften 1-3 des Kreuzproduktes

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \times (b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y + b_z \vec{e}_z) \\
 &= a_x b_x (\vec{e}_x \times \vec{e}_x) + a_x b_y (\vec{e}_x \times \vec{e}_y) + a_x b_z (\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \\
 &\quad + a_y b_x (\vec{e}_y \times \vec{e}_x) + a_y b_y (\vec{e}_y \times \vec{e}_y) + a_y b_z (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) \\
 &\quad + a_z b_x (\vec{e}_z \times \vec{e}_x) + a_z b_y (\vec{e}_z \times \vec{e}_y) + a_z b_z (\vec{e}_z \times \vec{e}_z) \\
 &= a_x b_y \vec{e}_z - a_x b_z \vec{e}_y \\
 &\quad - a_y b_x \vec{e}_z + a_y b_z \vec{e}_x \\
 &\quad + a_z b_x \vec{e}_y - a_z b_y \vec{e}_x \\
 &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z \\
 &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

q.e.d

Die Komponentenschreibweise sieht zunächst kompliziert aus, lässt sich aber mit Hilfe von Eselsbrücken einprägen. In jeder Zeile stehen nur Komponenten, die die Eckpunkte eines Rechtecks bilden, das man sich über das Vektorprodukt legen kann.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$


Die durch die Diagonale verbundenen Komponenten werden multipliziert, wobei man oben links beginnt und dann subtrahiert man die durch Multiplikation verbundenen Komponenten der anderen Diagonalen. Das Rechteck wird anschließend um eins nach unten verschoben, wobei die fehlenden Zahlenwerte ergänzt werden.

Am besten schreibt man sich beide Vektoren doppelt untereinander und streicht jeweils die erste und letzte Zeile, weil die nicht benötigt werden. Dann verschiebt man das Rechteck der Reihe nach dreimal und notiert die jeweils entstehenden Differenzausdrücke.


$$\begin{array}{r}
 \cancel{a_x} \quad \cancel{b_x} \\
 a_y \quad b_y \\
 \quad \times \quad \rightarrow a_y b_z - a_z b_y \\
 a_z \quad b_z \\
 \quad \times \quad \rightarrow a_z b_x - a_x b_z \\
 a_x \quad b_x \\
 \quad \times \quad \rightarrow a_x b_y - a_y b_x \\
 a_y \quad b_y \\
 \cancel{a_z} \quad \cancel{b_z}
 \end{array}$$

Beispiel Zu bilden ist das Vektorprodukt der Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{r}
 \cancel{3} \quad \cancel{-1} \\
 2 \quad 3 \\
 \times \\
 -5 \quad 4 \\
 \times \\
 3 \quad -1 \\
 \times \\
 2 \quad 3 \\
 \cancel{-5} \quad \cancel{4}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2 \cdot 4 - (-5) \cdot 3 = 23 \\
 (-5) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -7 \\
 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 11
 \end{array}
 \quad
 \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 23 \\ -7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

 **Aufgabe 2.15** Gegeben sind die Vektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Berechnen Sie $\vec{u} \times \vec{v}$ und $\vec{v} \times \vec{u}$, was fällt auf?
- Berechnen Sie $\vec{v} \times \vec{w}$
- Berechnen Sie die Fläche, des von den Vektoren \vec{u} und \vec{w} aufgespannten Parallelogramms
- Berechnen Sie $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$
- Berechnen Sie $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ und $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$. Was fällt auf?
- $A = (1, 3, 4)$, $B = (-2, 2, 5)$ und $C = (4, 6, 3)$ bilden die Punkte eines Dreiecks im Raum.
 - Drücken Sie die Seiten des Dreiecks durch Vektoren aus.
 - Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit Hilfe des Vektorproduktes.

 **Aufgabe 2.16** Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ drei Vektoren im \mathbb{R}^3 mit folgenden Eigenschaften

- $\vec{b} \parallel (\vec{a} \times \vec{c})$
- $|\vec{b}| = 5$

Wie groß ist das Skalarprodukt zwischen \vec{b} und $\vec{v} = 2 \cdot \vec{b} - 3 \cdot \vec{a}$?

2.7 Das Spatprodukt

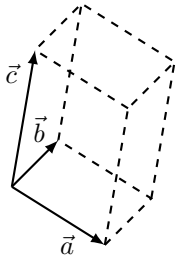
Das dritte Produkt von Vektoren ist das **Spatprodukt**. Dieses wird aus 3 Vektoren im \mathbb{R}^3 gebildet und ist gleich dem Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt der ersten beiden Vektoren mit dem dritten Vektor. Wie bei Vektorprodukt kommt es hier auf die Reihenfolge der drei Vektoren des Spatproduktes an!

Definition 2.12 Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ drei Vektoren. Dann heißt

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Spatprodukt von \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} .

Auch das Spatprodukt hat eine geometrische Bedeutung. Man kann zeigen, dass der Betrag des Spatproduktes gleich dem Volumen des durch \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Körpers ist, den man auch als Spat bezeichnet.



Satz 2.12 Sei V das Volumen des durch die 3 Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Spats. Dann gilt:
 $\left| [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \right| = V.$

Die Berechnung des Spatproduktes ergibt folgende Formel:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_y b_z + b_x c_y a_z + c_x a_y b_z - a_z b_y c_x - b_z c_y a_x - c_z a_y b_x \end{aligned}$$

Auch für diese Formel gibt es eine Eselsbrücke, mit deren Hilfe sich die Formel leicht merken, bzw. aufstellen lässt. Dazu schreiben wir die 3 Vektoren spaltenweise nebeneinander und rechts daneben noch einmal die ersten beiden Spalten \vec{a} und \vec{b} . Wir können nun jeweils 3 Diagonalen von links oben nach rechts unten (durchgehende Linie) und 3 Diagonalen von rechts unten nach links oben (gestrichelte Linie) bilden. Die Produkte der 3 Zahlen der Diagonalen von links oben nach rechts unten (durchgehende Linien) werden im Spatprodukt addiert und davon die Produkte der 3 Zahlen der Diagonalen von rechts unten nach links oben (gestrichelte Linien) subtrahiert.

$$\begin{array}{cccc|cc} a_x & b_x & c_x & & a_x & b_x \\ a_y & b_y & c_y & & a_y & b_y \\ a_z & b_z & c_z & & a_z & b_z \end{array}$$

$$= \underline{a_x b_y c_z + b_x c_y a_z + c_x a_y b_z} - \overline{a_z b_y c_x - b_z c_y a_x - c_z a_y b_x}$$

Beispiel

Wie groß ist das Volumen V des durch die 3 Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Spats? Dazu berechnen wir zunächst das Spatprodukt der drei Vektoren:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & \\ 3 & -1 & 0 & 3 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= -1 - 6 = -7 \end{aligned}$$

Folglich ist das Volumen $V = 7$.



Aufgabe 2.17 Gegeben sind die Vektoren: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Wie groß ist das Volumen, das durch diese 3 Vektoren aufgespannten Spats?
- Berechnen Sie $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ und $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$. Was fällt Ihnen auf, wenn man 2 Vektoren im Spatprodukt vertauscht?
- Wie groß ist das Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}]$ für beliebige Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die beide ungleich dem Nullvektor sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

Satz 2.13 Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ 3 Vektoren im \mathbb{R}^3 . Dann gilt

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] \\ &= [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

d.h. die Vertauschung zweier Vektoren im Spatprodukt bewirkt eine Vorzeichenänderung!

Definition 2.13 3 Vektoren im \mathbb{R}^3 heißen **komplanar**, falls sie in einer Ebene liegen.

Offensichtlich können wir mit Hilfe des Spatproduktes herausfinden, ob 3 Vektoren komplanar sind. Da sie in diesem Falle kein Volumen aufspannen, ist ihr Spatprodukt gleich 0.

Satz 2.14 Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind komplanar} \iff [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0.$$



Aufgabe 2.18 (Quelle: Abitur 2006 Mathe 1./2. Fach Aufgabe 2.2)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkteschar $A_k = (k, 0, -2k)$, $k \in \mathbb{R}$, und die beiden Punkte $B = (0, 1, 2)$ und $C = (2, 2, 0)$ gegeben.

- Bestimmen Sie k so, dass A_k , B und C auf einer Geraden liegen.
- Für $k \neq -2$ bildet jeder Punkt A_k mit den Punkten B und C ein Dreieck. Zeigen Sie, dass das Dreieck $\triangle A_k BC$ einen Flächeninhalt von $\frac{3}{2}|k+2|$ hat.
- Ermitteln Sie alle $k \in \mathbb{R}$, so dass das Dreieck $\triangle A_k BC$ einen Flächeninhalt von 4,5 hat.
- Weisen Sie nach: Die Höhe h_a des Dreiecks $\triangle A_{-5} BC$ liegt außerhalb des Dreiecks.

2.7.1 Hausaufgabe



Hausaufgabe 7 : Übungsblatt 5

Literaturverzeichnis

[Pap01] L.Papula. Mathematik für Ingenieure. *Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig/Wiesbaden*, Band 1, 2005.