Der Gaussche Algorithmus

Anwendung des Gausschen Algorithmus zur (Zeilen-) Rangbestimmung von A.

Dabei werden 4 folgende Operationen durchgeführt, die A auf eine „quasi-„ Diagonalgestalt bringen:

1. Vertauschung von Zeilen von A
2. Vertauschung von Zeilen oder Spalten von A
3. Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl
4. Addition eines Vielfachen einer Zeile von A zu einer anderen Zeile

Alle 4 Operationen stellen äquivalente Umformungen unseres Gleichungssystems dar (d.h. die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn wir die Operationen auf beide Seiten des GS anwenden!)

Gausscher Algorithmus:

1. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

   Suche eine Zeile, deren erstes Element nicht Null ist, also mit $a_{i1} \neq 0$ und vertausche diese Zeile mit der ersten Zeile. (Ist das erste Element in allen Zeilen gleich Null, so vertausche die Spalten).

   Vorteilhaft ist es für die nachfolgenden Rechnungen,
   wenn das erste Element a11 der ersten Zeile gleich 1 ist!

2. Lasse die erste Zeile $\vec{Z}_1$ stehen und transformiere alle weiteren Zeilen $\vec{Z}_i$ von A nach folgender Vorschrift:

$$\vec{Z}_2' = \vec{Z}_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\vec{Z}_1 \quad \dots \quad \vec{Z}_i' = \vec{Z}_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\vec{Z}_1 \quad \dots \quad \vec{Z}_m' = \vec{Z}_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}\vec{Z}_1$$

   Transformation: $A \rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & . & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{mn} \end{pmatrix}$

3. Wir betrachten nun die untere rechte Teilmatrix A* von A ' :

$$A^* = \begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \\ a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

   und wenden die Schritte 1 und 2 auf A* an!

4. Wende die Schritte 1., 2. und 3. wiederholt an!
Das Verfahren bricht ab, wenn $A^* = O$ (= Nullmatrix) ist, oder wenn A^* nur noch aus einem Element besteht !

Wir transformieren A so schrittweise in eine Matrix A* folgender Gestalt:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a^*_{11} & \cdots & a^*_{1r} & a^*_{1r+1} & \cdots & a^*_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & & a^*_{rr} & a^*_{rr+1} & \cdots & a^*_{rn} \\ \hline & O & & & O & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A^*_{(r)} & A^*_{(n-r)} \\ \hline O & O \end{array}\right) \qquad (1)$$

Es gilt für den Rang von A^*: $rg(A^*) = rg(A) = r$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2.und 1.Zeile \\ vewrtauschen \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1.Zeile \\ bleibt\ stehen \\ Z2-2Z1 \\ Z3+2Z1 \\ Z4+3Z1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} Vertauschung \\ 2.und\ 3.\ Zeile \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2.Zeile \\ bleibt\ stehen \\ \\ Z4-Z2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3.Zeile\ bleibt \\ stehen \\ Z4+Z3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^*$$

Dann gilt: rg(A) = rg(A*) = 3