

HTW	Mathematik 1 Lösungen zu Übung2
	MST

Zu Aufgabe 1

Zu a)

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Vor.: m sei ungerade

Beh: m^2 ist ungerade

Beweis: (direkt)

Sei m ungerade $\rightarrow m$ ist nicht durch 2 teilbar $\rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m=2k+1$

$\rightarrow m^2=(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1 = 2n + 1$ mit $n=2k^2+2k$.

$\rightarrow m^2$ ist nicht durch 2 teilbar $\rightarrow m^2$ ist ungerade!

qed.

Zu b)

Sei $m \in \mathbb{N}$

Vor: $m \in \mathbb{N}$, m^2 ist ungerade

Beh: m ist ungerade

Beweis: (indirekt)

Sei m nicht ungerade $\rightarrow m$ ist gerade $\rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: m=2k$

$\rightarrow m^2=(2k)^2 = 4k^2 = 2n$ mit $n=2k^2$.

$\rightarrow m^2$ ist durch 2 teilbar $\rightarrow m^2$ ist nicht ungerade !

qed.

Zu c)

Vor: $a > b$, $a, b \in \mathbb{N}$

Beh: $\frac{a-b}{a+b}$ ist unkürzbar $\Rightarrow \frac{a}{b}$ ist unkürzbar

Beweis: (indirekt)

Sei $\frac{a}{b}$ kürzbar $\rightarrow \exists k, p, q \in \mathbb{N}: a = kp$ und $b = kq \rightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{k(p-q)}{k(p+q)}$ ist ebenfalls

(durch k) kürzbar.

qed.

zu d)

Beh: $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{n^2 + 1}{n + 1} \geq 1$

Beweis:

Es gilt: $\frac{n^2 + 1}{n + 1} > 1 \Leftrightarrow n^2 + 1 \geq n + 1 \Leftrightarrow n^2 \geq n \Leftrightarrow n \geq 1$.

Da für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt, ist die Behauptung des Satzes (aufgrund der Äquivalenz zur Aussage $n \geq 1$) wahr.

qed.

HTW	Mathematik 1 Lösungen zu Übung2
	MST

zu e)

$$\text{Beh.: } \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis: (Vollst. Induktion)

IA: $n=1$: LS=1, RS=1 \rightarrow LS=RS

qed.

$$\text{IS: Vor.: } \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Beh.: } \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

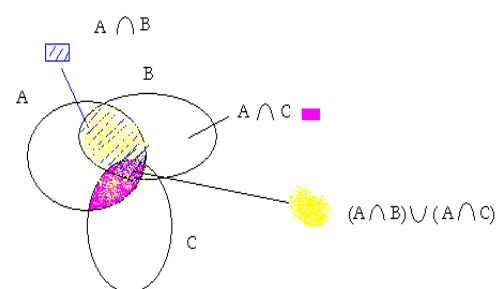
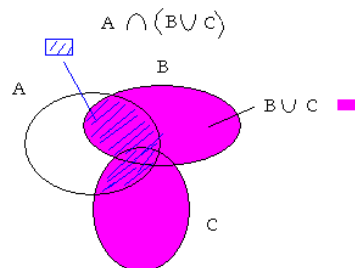
Bew.:

$$\begin{aligned} LS_{Beh} &= \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &\stackrel{\text{RS der Vor.}}{=} \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = RS_{Beh.} \end{aligned}$$

q.e.d

Zu Aufgabe 2

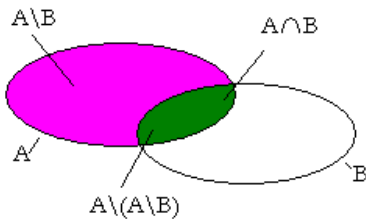
a)



$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow \\ (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Leftrightarrow \\ x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) & \end{aligned}$$

HTW	Mathematik 1 Lösungen zu Übung2
	MST

b)



Zu Aufgabe 3

a) zu 6 , b) zu 5 , c) zu 2, d) zu 3), e) zu 1, f) zu 4 .

Zu Aufgabe 4

a)

$$B \cup C = \{7,14,18,21,24,28,35\}$$

$$B \cup \bar{C}_D = \{7,14,21,28,35\} \cup \{9,12,15,27,30\} = \{7,9,12,14,15,21,27,28,30,35\}$$

$$B \setminus C = \{7,14,28,35\}$$

$$A \times B = \{(2,7), (4,7), (8,7), (16,7), (32,7), (2,14), (4,14), (8,14), (16,14), (32,14), (2,21), (4,21), (8,21), (16,21), (32,21), (2,28), (4,28), (8,28), (16,28), (32,28), (2,35), (4,35), (8,35), (16,35), (32,35)\}$$

$$B \times A = \{(7,2), (7,4), (7,8), (7,16), (7,32), (14,2), (14,4), (14,8), (14,16), (14,32), \dots, \dots, (35,2), (35,4), (35,8), (35,16), (35,32)\}$$

$$A \cap D = \emptyset = \{\} \text{ (leere Menge), } B \cap C = \{21\}$$

b) Die Potenzmenge -wir schreiben $\wp(A)$ - einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A: $\wp(A) = \{M \mid M \subseteq A\}$.

$$\text{Demzufolge ist: } \wp(C) = \{\emptyset, \{18\}, \{21\}, \{24\}, \{18,21\}, \{18,24\}, \{21,24\}, \{18,21,24\}\}$$

c) $|D| = 8$

Zu Aufgabe 5

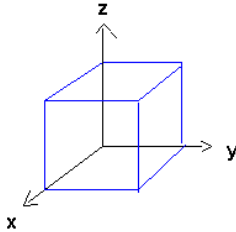
a) $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : n = 3k\}$

b) $Q = \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N}\}$

HTW	Mathematik 1 Lösungen zu Übung2
	MST

Zu Aufgabe 6

a)



3-dimensionale Würfel mit Kantenlänge 1.

b) $M = (1,4) = \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4 \}$. (offenens Intervall von 1 bs 4).

Zu Aufgabe 7

$$M = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : x = 3z \}$$

Es ist $|M| \equiv |N|$.

Begründung: Es ist $|M| \equiv |Z|$ (weil jedes $z \in Z$ eineindeutig durch die Zuordnung $x=3z$ auf $x \in M$ abbildbar ist). Weiterhin haben wir in der Vorlesung gezeigt: $|Z| \equiv |N|$. Daraus folgt: $|M| \equiv |N|$.