HTW	Übung 7 MST Mathematik I Geometrie von Geraden und Ebenen, Lineare Unabhängigkeit Prof. Dr.B.Grabowski

Aufgabe 0

a) Geben Sie 2 linear unabhängige Vektoren im R^3 an!
b) Geben Sie eine Basis im R^3 an!
c) Geben Sie eine Basis im R^4 an!
d) Welche der 4 Mengen von Vektoren bilden keine Basis im R^3? (Begründung!)

$$M0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad M1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \quad M3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

e) Geben Sie die Menge aller Vektoren im R^2 an, die parallel zur Geraden y=2x+1 verlaufen! Welche Dimension hat dieser Vektorraum?

f) Geben Sie einen affinen Raum der Dimension 1 im R^3 an!

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen ist ein Vektorraum (VR), welche ein affiner Raum (AR) und welche weder noch (Begründung)? Wenn es sich um einen VR oder AR handelt, so geben Sie die Dimension des Raumes, die Basis und ggf. den Aufpunkt an!

a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ b) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t \in R \right\}$ c) $M = \left\{ \vec{v} \mid \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2t \end{pmatrix} \mid \quad t > 0 \right\}$

Aufgabe 2

3 Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig, falls gilt:

„aus $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$“.

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 3 linear unabhängige Vektoren. Seien $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{b}_2 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_3$, $\vec{b}_3 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3$. Untersuchen Sie unter Verwendung der obigen Definition der linearen Unabhängigkeit, ob $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ linear unabhängig sind!

Aufgabe 3

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

a) A·E b) $B^T \cdot C$ c) 4C + 7 D

Aufgabe 4

Geben Sie den Rang der folgenden Matrizen A – E an !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen mittels Gausschem Algorithmus!
Hinweis:
Beim Gausschen Algorithmus versuchen Sie durch Anwendung der Operationen

1) Vertauschung von Zeilen (oder Spalten)
2) Multilplikation einer Zeile (oder Spalte) mit einer reellen Zahl ≠ 0
3) Addition des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte)

in die Diagonalform:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & a_{rr} & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ zu bringen. Der Rang ist dann r.

Der Gaussche Algorithmus ist in beigefügen Unterlagen erklärt.

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$