HTW Übung 8 Mathematik

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgende Determinanten:

$$\text{a) } A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{c) } C = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden GS mittels Cramerscher Regel! Machen Sie jeweils die Probe!

$$\text{a) } \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{b) } \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Lösen Sie mittels Cramerscher Regel die folgenden Gleichungssysteme nach den Unbekannten x_i auf!

$$\text{a) } \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{b) } \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5:

Durch folgende 4 Messpunkte (x_i,y_i) , i=1,...,4 geht genau ein Polynom 3. Grades

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \; .$$

xi	-1	0	1	2
yi	0	1	0	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a-d dieses Polynoms, indem Sie zunächst ein Gleichungssystem aufstellen und dieses dann mittels Gausschem Algorithmus oder Cramerscher Regel lösen!

Aufgabe 6:

Die Determinante einer nxn-Matrix A ist wie folgt definiert:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{1j} D_{1j} (-1)^{1+j}$$

wobei D_{1j} die Determinante der Matrix ist, die man aus A erhält, wenn man die 1. Zeile und j.te Spalte streicht. Die Berechnung der Determinante nach dieser Formel heisst Entwicklung von det(A) nach der 1. Zeile.

Der folgende Satz besagt, dass man eine Determinante auch nach einer beliebigen Zeile oder beliebigen Spalte entwickeln kann:

Satz: (Laplac’scher Entwicklungssatz)
Es gilt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} D_{ij} (-1)^{i+j} \quad \text{(Entwicklung nach der i.ten Zeile)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} (-1)^{i+j} \quad \text{(Entwicklung nach der j.ten Spalte)}$$

Berechnen Sie den Wert der nachstehenden Determinante mittels Laplac'schen Entwicklungssatz! (D.h., Entwickeln Sie die Determinante nach der Zeile bzw. Spalte, die möglichst viele Nullen enthält!)

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 7: Berechnen Sie die folgenden Determinanten mittels Laplac’schem Entwicklungssatz und begründen Sie Ihr Ergebnis!

a) $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$ b) $A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

c) $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ (d.h. 1. und 2. Spalte von A sind gleich)