HTW Übung 9 Mathematik

Prof.Dr.B.Grabowski e-mail: grabowski@htw-saarland.de Tel.: 5867-424

Eigenschaften von Determinanten

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Rang und die Determinante folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben seien 3 Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ mit det($\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$) = 7.
Berechnen Sie die Determinante der 3 Vektoren:

$$\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_3, \quad \vec{b}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_3$$

Homogene Gleichungssysteme

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gausschen Algorithmus die jeweilige Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme!
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit des GS die Lösungsmenge als Vektorraum an und geben Sie die Dimension und die Basis an!

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -2x_1 &= -x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 &= -x_3 \\ x_1 + x_2 &= 2x_3 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2x_3 \\ 2x_1 &= -3x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

Für welche $a \in \mathrm{R}$ ist dieses GS

a) eindeutig
b) mehrdeutig
d) Geben Sie im Falle der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung an!

Inhomogene Gleichungssysteme

Aufgabe 5:

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus!

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & 8 & -4 \\ 4 & 2 & -16 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 50 \end{pmatrix}$

Hinweis: Wenden Sie den GA auf die Matrix $(A \mid \vec{b})$ an, die das GS $A\vec{x} = \vec{b}$ charakterisiert:

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Gausschen Algorithmus die jeweilige Lösungsmenge folgender Gleichungssysteme!
Geben Sie im Falle der Lösbarkeit des GS die Lösungsmenge als affinen Raum an und geben Sie die Dimension, die Basis und den Aufpunkt an!

a) $\begin{matrix} x_1 + x_2 = x_3 + 2 \\ -2x_1 = -x_3 - 2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 5 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 2x_3 + 7 \\ 2x_1 = -3x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 + 28 = 0 \end{matrix}$